МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗКОЙ РЕСПУБЛИКИ

БАЛЫКЧИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ ПРИ КГТУ ИМ.И.РАЗЗАКОВА

РАССМОТРЕНО	**УТВЕРЖДАЮ**
УМК БК при КГТУ им.И.Раззакова	Директор БК при КГТУ им.И.Раззакова
____________ Деркенбаева Д.К.	____________ Бейшеева Г.С
«___»_____2022г.	«___»_____2022г.

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

«*ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ*»

для студентов 2 курса колледжа.

Составила : преподаватель математики Акишова М.К

г. Балыкчы 2022

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Пояснительная записка	4
Элементы комбинаторики	5
Упражнения по комбинаторике	9
Контрольная работа по теме: «Элементы комбинаторики»	9
Элементы теории вероятностей	10
Упражнения по теории вероятностей	16
Контрольная работа по теме: «Элементы теории вероятностей»	17
Используемая литература	20

Пояснительная записка.

Программой и календарно-тематическим планом по дисциплине ПОВТ-1-21,ЭБУ-1-21,ОПУТ-1-21 «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов, профиль получаемого образования которых технический или экономический предусмотрено 18 часов комбинаторики (9ч. – лекций, 9ч. – практических занятий)

Для того, чтобы облегчить усвоение данного раздела Теория вероятностей и математическая статистика в помощь студентам написана данная методическая разработка.

Элементы комбинаторики.

Комбинаторные задачи.

Комбинаторными называются задачи, в которых вычисляют количество всех подмножеств либо количество всех кортежей, составленных из элементов какого-либо множества и удовлетворяющих определённым условиям. *Комбинаторика* это наука, изучающая решение комбинаторных задач.

Поэтому необходимо знать, что такое множество и что такое кортеж. Множество это неопределяемое понятие в математике. Будем понимать под множеством совокупность объектов одной природы. Эти объекты будем называть элементами множества. Множества бывают бесконечные (множество натуральных чисел, множество звёзд на небе и т.п.) и конечные. В конечных множествах число элементов можно сосчитать. Например, конечным является множество студентов второго курса колледжа.

Опр 1. *Кортежем* длины n называется упорядоченный набор из n элементов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

С теоретико-множественной точки зрения кортежами являются многозначные числа, координаты точек на плоскости. Поскольку в записи чисел и координат точек важен порядок записи цифр. Вообще два различных кортежа отличаются и составом элементов и порядком записи этих элементов. $(1, 2, 3) \neq (2, 1, 3)$. Во множествах элементы можно записывать в любом порядке. Поэтому два различных множества отличаются только составом элементов. $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$.

Опр 2. *Подмножеством множества А* называется множество В, состоящее из элементов, принадлежащих множеству А.

Правило суммы. Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами, то выбор a или b можно осуществить $m+k$ способами.

Пример 1. В вазе лежат 3 груши и 4 яблока. Сколькими способами можно выбрать один фрукт грушу или яблоко.

Решение.

По правилу суммы выбираем грушу или яблоко 3+4=7 способами.

.

Правило произведения. Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами, то выбор пары a и b можно осуществить $m{\cdot}k$ способами.

Пример 2. В вазе лежат 3 груши и 4 яблока. Сколькими способами можно выбрать два фрукта: грушу и яблоко.

Решение.

По правилу произведения выбираем пару грушу и яблоко 3·4=12 способами.

Размещения, перестановки сочетания.

Решим задачу: сколько всевозможных двузначных чисел можно записать, используя цифры 5, 8, 2.

Составим такие числа: 58, 52, 55, 85, 82, 88, 25, 28, 22. Всего 9 чисел. С теоретико-множественной точки зрения эти числа представляют собой кортежи длины 2, в которых элементы могут повторяться. В комбинаторике такие кортежи называют размещениями с повторениями.

Опр 3. *Размещение с повторениями из k элементов по m элементов* это кортеж длины m, составленный из повторяющихся элементов множества, в котором k элементов.

Число всех размещений с повторениями из k элементов по m элементов вычисляют по формуле: $\tilde{A}_k^m = k^m$.

Читают: «А из к по м с волной равно к в степени м».

В последнем примере нужно было вычислить $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Решим задачу: сколько всевозможных двузначных чисел можно записать, используя цифры 5, 8, 2. При этом цифры в записи чисел не должны повторяться.

Составим такие числа: 58, 52, 85, 82, 25, 28. Всего 6 чисел. С теоретико-множественной точки зрения эти числа представляют собой кортежи длины 2, в которых элементы не повторяются. В комбинаторике такие кортежи называют размещениями без повторений.

Опр 4. *Размещение без повторений из k элементов по m элементов* это кортеж длины m, составленный из неповторяющихся элементов множества, в котором k элементов.

Число всех размещений без повторений из k элементов по m элементов вычисляют по формуле: $A_k^m = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-m+1)$.

Символ A_k^m читают: «А из к по м».

В последнем примере нужно было вычислить $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Решим задачу: сколько всевозможных трёхзначных чисел можно записать, используя цифры 5, 8, 2. При этом цифры в записи чисел не должны повторяться.

Составим такие числа: 582, 528, 852, 825, 258, 285. Всего 6 чисел. С теоретико-множественной точки зрения эти числа представляют собой кортежи длины 3, в которых элементы не повторяются. По сути, чтобы записать данные числа, мы переставляли цифры 5, 8, 2 местами. В комбинаторике такие кортежи называют перестановками из трёх элементов.

Опр 5. Размещение без повторений из k элементов по k элементов называют *перестановками из k* элементов.

Число всех перестановок из k элементов вычисляют по формуле: $P_k = k!$.

Читают: «П из к равно к-факториал».

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$

Считают, что $1! = 1$ *и* $0! = 1$.

В последнем примере нужно было вычислить $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Опр 6. *Сочетание из k элементов по m элементов* это m-элементное подмножество множества, в котором k элементов.

Число всех сочетаний из k элементов по m элементов вычисляют по формуле: $C_k^m = \frac{k!}{(k-m)!m!}$

Символ C_k^m читают: «Ц из к по м».

Например. В группе 25 студентов. На научную конференцию нужно отправить делегацию из пяти человек. Вычислите, сколько всевозможных делегаций можно составить из студентов данной группы.

Решим задачу. Поскольку порядок студентов в делегации не важен, а важен только состав делегации и повторение делегируемых невозможно, в данной задаче нужно найти число всех сочетаний из 25 по 5.

$$C_{25}^5 = \frac{25!}{(25-5)!\,5!} = \frac{25!}{20!\,5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 20 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$
$$= \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 5 = 53130$$

Всего можно сформировать 53130 делегаций.

Упражнения по комбинаторике.

1. Вычислите:

   a. $A_8^6 - P_4$;

   b. $\frac{A_9^3}{P_6} - C_{21}^1$.

2. Решите уравнение: $A_x^2 - C_x^{x-1} = 24$.

3. Сколько различных четырёхзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр: а) 0, 1, 3, 5; б)1, 3, 5, 7?

4. Сколькими способами можно расставить в очереди 7 человек?

5. В студенческой группе 22 человек. Для участия в соревнованиях требуется 6 человек. Сколько всего команд можно составить из студентов группы?

6. Для участия в танцевальном конкурсе требуется составить 4 пары из 7-ми юношей и 6-ти девушек. Сколькими способами это можно сделать?

7. На окружности выбрано 6 различных точек. Сколько существует вписанных треугольников с вершинами в этих точках?

8. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых первая цифра отлична от нуля?

9. У Васи 7 марок, а у Коли 5. Сколькими способами они могут обменять 2 марки Васи на 2 марки Коли?

Контрольная работа по теме: «Элементы комбинаторики»

Вариант I.

1. Вычислите: а) $\frac{P_8}{A_8^5}$; б) $C_{10}^7\ P_3$.

2. Сколько различных четырёхзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр: а) 0, 2, 4, 6; б)2, 3, 4, 6?

3. У студентов первого курса в понедельник 4 пары различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?
4. Из 15 членов туристической группы надо выбрать трёх дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?
5. Сколько всевозможных трёхзначных чисел можно составить, используя цифры: 4, 5, 6, 7, 8?

Вариант II.

1. Вычислите: а) $\frac{P_9}{A_9^6}$; б) $C_7^3 P_4$.
2. Сколько различных четырёхзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр: а) 1, 2, 3, 4; б)0, 2, 3, 4?
3. Сколькими способами можно расставить на полке 4 различные книги?
4. Для ремонта здания прибыла бригада из 12 человек. Трёх из них надо отправить на четвёртый этаж, а из оставшихся четырёх на пятый этаж. Сколькими способами это можно сделать?
5. На первом курсе колледжа изучают 9 дисциплин. Сколько различных вариантов расписания можно составить на понедельник, если в расписании нужно поставить 3 пары?

Элементы теории вероятностей.

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются испытанием.

Результат, исход испытания называется событием. Для обозначения событий используются заглавные буквы латинского алфавита: A, B, C, D, E, F, ….

Опр 1.Два события называются *совместимыми,* если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример 1. Испытание: Бросание игральной кости. Событие A – появление 4-х очков, событие B – появление чётного числа очков. A и B совместимы.

Опр 2. Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 2. Выпадение герба или цифры при однократном бросании монеты.

Пример 3. Испытание: однократное бросание игральной кости. События A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 соответственно выпадение 1-го, 2-х, 3-х, 4-х, 5-ти, 6-ти очков. Эти события несовместимые.

Опр 3. Два события A и B называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит. Событие противоположное событию A, обозначается $\bar{A}$.

Пример 4. Выпадение герба или цифры при однократном бросании монеты – противоположные события.

Опр 4. Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом. Событие называется *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Пример 5. Испытание: извлечение из урны шара, в которой все шары белые. Событие A – вынут белый шар. Событие B – вынут чёрный шар. A – достоверное, а B – невозможное. A и B здесь противоположные события.

Опр5. Событие A называется *случайным*, если оно может объективно наступить или не наступить в данном испытании.

Пример 6. Событие A_6 – выпадение 6-ти очков при бросании игральной кости.

Опр 6. Говорят, что совокупность событий образует *полную группу событий* для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них.

Пример 7. Выпадение герба и цифры при бросании монеты. Попадание в цель и промах при стрельбе по мишени.

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых событий U_1, U_2, … , U_N, связанную некоторым испытанием. Предположим, что в этом испытании каждое из событий U_i

(i изменяется от 1 до N) равновозможно, т.е. условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед другими возможными.

Опр7. События U_1, U_2, … , U_N, образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий, будем называть *элементарными* событиями.

Пример 7. Испытание: бросание игральной кости. Выпадения 1-го, 2-х, 3-х, 4-х, 5-ти, 6-ти очков – элементарные события.

Опр8. Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если наступление события A влечёт за собой событие B.

Пример 8. Пусть при бросании игральной кости события U_2, U_4, U_6 – выпадение 2-х, 4-х, 6-ти очков соответственно. Событие A – выпадение чётного числа очков. События U_2, U_4, U_6 благоприятствуют событию A.

Опр 9. (Классическое определение вероятности) *Вероятностью P(A) события A* называется отношение m/n, где m – число элементарных событий, благоприятствующих событию A; n – число всех элементарных событий.

Пример 9. Пусть А – выпадение герба при бросании одной монеты $P(A)=1/2$

Пример 10. $P(A)=3/6=1/2$ – вероятность выпадения чётного числа очков при бросании игральной кости.

Из данного определения вероятности вытекают следующие свойства:

1) Вероятность достоверного события равна единице. $P(A)=m/n=n/n=1$.
2) Вероятность невозможного события равна нулю. $P(A)=m/n=0/n=0$.
3) Вероятность случайного события есть положительное число, заключённое между нулём и единицей.

Действительно. Случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных событий, т.е. $0<m<n \Rightarrow 0<P(A)=m/n<1$.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству: $0\le P(A)=m/n\le 1$.

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.

Опр10. *Суммой событий А и В* называется событие С=А+В, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий А или В.

Пример 11. Испытание: стрельба 2-х стрелков (каждый делает по одному выстрелу). Событие А – попадание в мишень первым стрелком. Событие В – попадание в мишень вторым стрелком. С=А+В – попадание в мишень хотя бы одним стрелком.

Аналогично, суммой конечного числа событий A_1, A_2, …,A_k называется событие $A=A_1+A_2+\ldots+A_k$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий Ai ($i=\overline{1,k}$).

Опр 11. *Произведением событий A и B* называется событие C=AB, состоящее в том, что в результате испытания происходит и событие A и событие B. Аналогично, произведением конечного числа событий A_1, A_2, …,A_k называется событие $A=A_1\bullet A_2\bullet\ldots\bullet A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

Пример 12.

См. пример 11. Событие C – оба стрелка попали в мишень.

Теорема. Вероятность суммы несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий: P(A+B)=P(A)+P(B).

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Пример 13.В урне 10 шаров: 3 красных, 5 синих и 2 белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

Вероятность вынуть красный шар P(A)=3/10, синий P(B)=5/10.

Т. к. A и B несовместимы, то

P(A+B)=P(A)+P(B)=3/10+5/10=8/10=0,8.

Теорема умножения вероятностей.

Опр 12. Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет.

Пример 14. Пусть в урне находятся 2 белых и 2 чёрных шара. Пусть событие A – вынут белый шар. Очевидно P(A)=1/2. После первого испытания вынутый шар кладётся обратно в урну. Шары перемешиваются и снова вынимается шар. Событие В – во втором испытании вынут белый шар. Р(В)=1/2, т.е. события А и В независимые.

Если же шар в урну не возвращается, то вероятность события В уменьшается. Р(В)=1/3, если в первом испытании был вынут белый шар. И увеличивается Р(В)=2/3, если был вынут чёрный шар. А и В – зависимые события.

Опр 13. Пусть А и В – зависимые события. *Условной вероятностью* $P_A(B)$ события В называется вероятность события В, найденная в предположении, что событие А уже наступило.

Пример 15.

См. пример 14 $P_A(B)=1/3$.

Теорема 1. **Вероятность произведения двух зависимых событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB)=P(A) \bullet P_A(B)$.**

Теорема 2. Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A) \bullet P(B)$.

Пример 16. Найти вероятность одновременного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие А) равна 0,8, а вторым (событие В) – 0,7. События А и В независимы, поэтому по теореме 2 искомая вероятность $P(AB)=0{,}7 \bullet 0{,}8=0{,}56$.

Теорема сложения вероятностей совместимых событий.

Теорема. Вероятность суммы двух совместимых событий А и В равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Замечание.

Если события А и В несовместимы, то их произведение невозможно,т.е. $P(AB)=0$.

Теорема. Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из n попарно несовместимых событий $B_1, B_2,\ldots,Bn$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А: $P(A)=P(B_1)P_{B1}(A)+P(B_2)P_{B2}(A)+\ldots+P(Bn)P_{Bn}(A)$ (*).

(*) – формула полной вероятности.

Упражнения по теории вероятностей.

1. Для проведения лотереи напечатали 3000 билетов, из которых 600 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?
2. В урне 8 красных, 4 синих, 10 зелёных шаров. Из урны наудачу извлекают 1 шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется красным?
3. Бросают два игральных кубика. Какое событие более вероятно: выпадение в сумме 6-ти очков или выпадение 7-ми очков?
4. Участники жеребьёвки тянут из ящика жетоны от 1 до 100. Какова вероятность того, что номер первого извлечённого из ящика жетона:
   a. Содержит цифру 5;
   b. Равен 102;

c. Не превосходит 100;

d. Не содержит цифру 5?

5. В магазин поступили 18 велосипедов, 6 из них оказались с дефектами. Какова вероятность того, что два купленных велосипеда будут без дефектов?

6. В лотерее участвуют 1000 билетов. 5 из них с выигрышем в 5000 рублей, 10 билетов с выигрышем в 2000 рублей, 20 билетов с выигрышем в 1000 рублей, 100 билетов с выигрышем в 100 рублей. Остальные невыигрышные. Какова вероятность того, что наудачу купленный билет окажется с выигрышем не менее 1000 рублей?

7. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равно 0,5, для второго -0,9, для третьего – 0,7. Найдите вероятность того, что:

   a. Все три стрелка одновременно попадут в цель;

   b. В цель попадёт хотя бы один стрелок.

8. Имеется три одинаковые урны. В каждой из них лежат шары. В первой урне – 3 белых шара и 4 чёрных; во второй – 5 белых и 5 чёрных; в третьей – 4 белых и 6 чёрных. Какова вероятность того, что из наугад выбранной урны будет извлечён белый шар?

9. Студенты решают контрольную работу по математике. Вероятность того, что Петров решит все задания без ошибок равна 0,3. А вероятность того, что Васильев сделает ошибки равна 0,4. Определите вероятность того, что:

   a. Васильев и Петров выполнят контрольную работу без ошибок;

   b. Петров с ошибками, а Васильев нет;

   c. Васильев ошибётся, а Петров нет;

   d. Хотя бы один из них решит контрольную работу без ошибок.

Контрольная работа по теме: «Элементы теории вероятностей»

Вариант I.

1. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?
2. Монета подброшена два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет герб?
3. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.
4. В клетке есть пушистые и гладкошёрстые хомяки. Среди пушистых 3 белых, 2 чёрных и 4 рыжих. Среди гладкошёрстых 2 белых, 3 чёрных и 1 - рыжий. Какова вероятность того, что выбранный наугад хомяк будет белым или пушистым?
5. В трёх одинаковых коробках лежат жетоны. В первой коробке – 2 жёлтых и 3 красных, во второй коробке – 3 жёлтых и 4 красных, в третьей – 1 жёлтый и 5 красных. Какова вероятность того, что из наугад выбранной коробки будет извлечён жёлтый жетон?

Вариант II.

1. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара превышает 10?
2. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 рублей, на 4 билета – выигрыш по 50 рублей, на 10 билетов – выигрыш по 20 рублей, на 20 билетов – выигрыш по 10 рублей, на 165 билетов – выигрыш по 5 рублей, на 400 билетов – выигрыш по 1 рублю. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не менее 10 рублей?

3. В первом ящике 2 белых и 10 чёрных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 чёрных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара белые?
4. Бросают игральную кость. Какова вероятность того, что выпадет 3 очка или нечётное число очков?
5. В двух одинаковых аквариумах живут чёрные и красные рыбки. В первом – 3 красных и 5 чёрных рыбок, а во втором – 4 красных и 2 чёрных. Какова вероятность того, что из наугад выбранного аквариума будет выловлена сачком чёрная рыбка?

Используемая литература.

1. Баврин И.И. Высшая математика. Учебник для студентов естественнонаучных специальностей педагогических вузов. – М.: Академия, 2010
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – Высшая математика в упражнениях и задачах. М.,: Высш. шк., 1999.
3. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. – Справочное пособие по методам решения задач по математике. М.: Наука 1989.
4. Богомолов Н.В. – Практические занятия по Теория вероятностей и математическая статистика. М.,: Издательство Юрайт, 2013.
5. Гусак А.А. – Высшая математика. Минск: ТетраСистемс, 2004.
6. Вентцель Е.С. – Теория вероятностей. М.,: Высш. шк., 2001.
7. Стойлова Л.П. –Математика. М.,: Издательский центр Академия., 2002.
8. Лысенко Ф.Ф., Калабухова С.Ю. - Математика. Подготовка к ЕГЭ. Элементы теории вероятностей. Ростов-на-Дону, ЛЕГИОН-М, 2011.