СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ ВО ВТУЗЫ

СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих во втузы

ПОД РЕДАКЦИЕЙ М. И. СКАНАВИ

Издание третье, дополненное

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1978

51
С23
УДК 51(075.4)

Авторы книги: **В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский, Т. Н. Маслова, И. Ф. Орловская, Р. И. Позойский, Г. С. Ряховская, М. И. Сканави, З. А. Скопец, Н. М. Федорова**

Рецензент: кафедра высшей математики МАИ им. С. Орджоникидзе.

Рекомендовано Учебно-методическим управлением
по высшему образованию Министерства высшего
и среднего специального образования СССР
для использования при подготовке к поступлению в вузы

Сборник конкурсных задач по математике для
С23 поступающих во втузы. Учебн. пособие./[Под ред. М. И. Сканави]. — 3-е изд., доп. — М.: Высш. школа, 1978. — 519 с., ил.

В пер.: 95 к.

На обороте тит. л. авт.: В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский и др.

Настоящий сборник составлен в соответствии с действующими программами конкурсных экзаменов по математике для поступающих во втузы. Он является пособием для поступающих в высшие учебные заведения и одновременно имеет целью оказать помощь кафедрам высшей математики втузов при составлении материалов для письменных и устных вступительных экзаменов.

Сборник состоит из двух частей: «Задачи для письменных экзаменов» (часть I) и «Задачи для устных экзаменов и дополнительные задачи для письменных экзаменов», (часть II). Все задачи части I разбиты на три группы по уровню их сложности.

$С\frac{60601-507}{001(01)-78}259-78$ 51

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий «Сборник» состоит из двух частей: «Задачи для письменных экзаменов» (часть I) и «Задачи для устных экзаменов и дополнительные задачи для письменных экзаменов» (часть II).

«Сборник» содержит разнообразные задачи, которые могут быть предложены на экзаменах по математике для поступающих в высшие технические учебные заведения. Задачи части I разделены на три группы (А, Б и В) по их нарастающей сложности. Ясно, что такое разделение имеет более или менее условный характер. Однако авторы полагают, что умение решать задачи из группы А должно определить уровень подготовки поступающих, минимально необходимый для получения удовлетворительной оценки по математике на вступительных экзаменах во втузы. Успешное решение задач из группы Б определяет более высокое качество усвоения школьной программы и, следовательно, повышенную экзаменационную оценку. Наконец, к группе В отнесены такие задачи, решение которых позволит экзаменующемуся обнаружить способность к самостоятельному логическому мышлению и устойчивые практические навыки. Решение любой из предлагаемых в «Сборнике» задач, кроме немногих — их порядковые номера отмечены звездочкой — не требует знаний, выходящих за рамки программы вступительных экзаменов по математике.

Тому, кто готовится к конкурсным вступительным экзаменам, нет необходимости решать все задачи подряд, а только те из намеченного для себя раздела, которые привлекут внимание содержанием или вызовут желание именно на них проверить степень достигнутого умения прилагать накопленные теоретические знания к практике.

Опыт первого и второго изданий «Сборника», рекомендованного МВ и ССО СССР в качестве пособия для поступающих в высшие технические учебные заведения, получил признание и одобрение математической общественности страны. Использование задач «Сборника» при составлении вариантов и билетов для письменных и устных конкурсных экзаменов кафедрами математики втузов способствовало решению важной и сложной проблемы унификации требований, предъявляемых к математической подготовке поступающих.

Осуществляя настоящее (третье) издание «Сборника», авторы сочли целесообразным взять как можно больше задач из предшествующего издания, причем без изменения их порядковых номеров. Тем самым сохранилась возможность одновременного пользования книгами данного и предшествующего изданий, например, на подготовительных курсах и факультетах, а также в практике такого проведения письменного вступительного экзамена, когда экзаменующиеся берут тексты предлагаемых задач непосредственно из экземпляров «Сборника», принадлежащих институту и в достаточном количестве разложенных на столах аудитории, в которой проводится экзамен.

Тексты почти всех задач и ответов в данном издании «Сборника» приведены в соответствие с терминологией и символикой, принятыми в действующих школьных учебниках по математике. Для справок составлен «Указатель обозначений, встречающихся в книге» (см. с. 518, 519).

Так как окончательного установления терминологии в школьном курсе математики еще не произошло, то для данного издания «Сборника» авторы сочли допустимым оставить некоторые из традиционных формулировок. Если, например, в тексте задачи подразумевается прямая, содержащая некоторый отрезок, то вместо этого иногда говорится просто «отрезок» или «сторона» («расстояние от точки до стороны», «треугольник вращается вокруг стороны»). Когда говорится о каком-либо многоугольнике, вписанном в данную фигуру с границей l, то это значит, что все его вершины принадлежат l, и т. д.

Авторы не всегда пользовались возможностью формализовать запись условия задачи при помощи символов логики и множеств, чтобы не создавать затруднений в восприятии содержания задачи для тех, кто еще не в полной мере успел привыкнуть к символическому языку математики.

Некоторые номера задач «Сборника» заключены в скобки. Это служит указанием на то, что в предшествующем издании «Сборника» задача под данным номером имеет другое содержание или отсутствует.

В главах 5 и 7 добавлены задачи, получившие порядковый номер, одинаковый с номером предшествующей задачи; такие повторные номера также заключены в скобки.

Третье издание «Сборника» дополнено большим количеством задач, пригодных для проверки знаний, приобретенных учащимися средних школ:

а) по началам математического анализа (**14.361—14.690**);

б) по применению метода координат, векторов и геометрических преобразований (**15.101—15.300**).

Так как эти массивы новых задач образуют отдельные рубрики в составе глав 14 и 15, то их номера, в виде исключения, скобками не выделяются.

Теперь в главах 14, 15 и 16, образующих вторую часть «Сборника», оказалось некоторое количество задач, более пригодных для письменных, чем для устных экзаменов. Размещение их в надлежащих местах первой части «Сборника» вызвало бы нежелательную перенумерацию задач, перешедших из предыдущего издания.

В соответствии с программой средней школы, в «Сборнике» рассматриваются только множества действительных чисел: действительные корни функций, уравнений, систем уравнений. Отсутствие действительных корней отмечается символом $\varnothing$ — «пустое множество». Однако в интересах тех, кто прежде изучал действия с комплексными числами и теорему Безу, оставлено несколько соответствующих задач (по преимуществу, в последней главе «Смешанные задачи»). Номера таких задач снабжены звездочкой.

Так как программой вступительных экзаменов по математике для поступающих, окончивших школу в 1977 и в 1978 годах, не предусмотрена проверка их навыков в применении координат и геометрических преобразований к решению задач, то задачи из главы 15, относящиеся к названным методам (**15.101—15.131, 15.250—15.300**), не следует в ближайшие два года использовать для проведения письменных вступительных экзаменов. Эти задачи рекомендуются для самостоятельного решения учащимся, получившим повышенную математическую подготовку в специальных математических школах и интернатах, а также в юношеских школах, функционирующих при различных вузах страны.

Всю работу по подготовке «Сборника» к новому изданию авторский коллектив выполнял без участия нашего самого активного соавтора и научного редактора его первого и второго изданий

М. И. Сканави, скончавшегося 2 февраля 1972 г. Общее редактирование настоящего издания «Сборника» осуществлено Б. А. Кордемским.

Не перечисляя фамилий учащихся и преподавателей школ, подготовительных курсов, подготовительных факультетов втузов, высказавших критические замечания, добрые советы и предложивших справедливые поправки, авторы их сердечно благодарят.

Слово к тем, кто готовится к вступительным экзаменам

При самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам по математике этот «Сборник» не может и не должен служить единственным пособием: он не содержит решений или указаний к решению, в нем нет никаких теоретических разъяснений — ничего, кроме задач и ответов. «Сборник» предназначен для самоконтроля уровня успехов, достигнутых в изучении тех разделов математики, которые определены программой вступительных экзаменов.

Внутри каждой группы А, Б и В авторы намеренно расположили задачи не «по типам», а «перемешали» их для того, чтобы этим создать для Вас обстановку «неожиданного» возникновения задачи на экзамене. Обдумывание и логический анализ содержания задачи авторы считают более полезным для ее успешного решения, чем припоминание типа задачи и последующего решения по «шаблону». Поэтому, поставив перед собой цель решать задачи из этого «Сборника», окиньте взглядом всю последовательность задач намеченного Вами раздела и сделайте выборку, прикидывая в уме — ясен ли Вам план решения прочитанной задачи.

Не торопитесь решать задачи сразу тем способом, который первым придет Вам в голову. Подумайте, не обнаружится ли лучший, например, менее трудоемкий, подход к решению? При этом в ходе самого решения допустимо привлечение любых формул, теорем, правил алгебры, векторов и преобразований к решению геометрических задач, тригонометрии — к решению задач алгебры и геометрии, использование метода координат, свойств функций и производных, способа «проб» и «подбора», рассуждений «по соображению», лишь бы полученный Вами ответ был в конечном счете строго обоснован. Иными словами, Вам разрешается в условиях экзамена переходить границы между разными разделами математики во всех направлениях, поскольку Вы отчитываетесь за полный курс математики.

Пусть, например, на экзамене Вы должны найти наибольшее возможное значение суммы

$$S=3\cos x+4\sin x$$

(x — любое действительное число).

Если Вы владеете только методами алгебры, то Вам доступно такое решение:

$$3\cos x+4\sin x=3\left(\cos x+\frac{4}{3}\sin x\right);$$

пусть $4/3=\operatorname{tg}\alpha$, тогда

$$S=3(\cos x+\operatorname{tg}\alpha\sin x)=\frac{3}{\cos\alpha}(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x)=$$

$$=\frac{3}{\cos\alpha}\cos(\alpha-x).$$

Так как наибольшее значение $\cos(\alpha - x)$ равно 1 и оно достигается, например, при $x = \alpha = \operatorname{arctg}(4/3)$, то

$$S_{\text{наиб}} = \frac{3}{\cos\alpha} = 3\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 3\sqrt{1+\frac{16}{9}} = 5.$$

Если Вы владеете еще и методами математического анализа, то возникает конкурирующее решение:

производная $S' = (3\cos x + 4\sin x)' = -3\sin x + 4\cos x$;

$$-3\sin x + 4\cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$$

— точка максимума функции S (вспомните, как это обосновать!). Тогда

$$S_{\max} = \frac{3}{\sqrt{1+16/9}} + \frac{4\cdot 4/3}{\sqrt{1+16/9}} = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5.$$

Нетрудно показать, что $S_{\max}$ является наибольшим значением функции S на промежутке, длина которого равна периоду данной функции, а следовательно, и на всей числовой прямой.

Если, наконец, Вы владеете методами векторной алгебры, то возникает еще одно конкурирующее решение.

Введем два вектора $\vec{e} = \{\cos x;\ \sin x\}$ и $\vec{a} = \{3;\ 4\}$; тогда

$$S = 3\cos x + 4\sin x = \vec{a}\cdot\vec{e} = |\vec{a}|\cdot|\vec{e}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{e}});$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5;\quad |\vec{e}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1,$$

$$S = 5\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{e}}) \Rightarrow S_{\text{наиб}} = 5,$$

например, при $\widehat{\vec{a},\ \vec{e}} = 0°$; соответствующее значение $x = \operatorname{arctg}(4/3)$.

Если при домашней подготовке Вас затрудняет решение выбранной задачи, то обратитесь к учителю, к учебнику или к тем пособиям, которые учат умению решать задачи. Несовпадение полученного Вами ответа с ответом из «Сборника», как правило, сигнализирует о каком-либо неблагополучии в ходе решения или в вычислениях. В некоторых случаях может оказаться, наоборот, ошибка или опечатка в ответах «Сборника», своевременно не обнаруженная авторами. Вместе с тем в Вашем распоряжении есть возможность (а в иных случаях и обязанность) провести внутреннюю проверку полученных Вами результатов, исходя из условий решаемой задачи,— не пренебрегайте этой возможностью! Обоснованная уверенность в правильности своего решения придаст Вам силы и вдохновит на решение более трудных задач. Желаем успеха!

Слово к экзаменационным комиссиям втузов

«Сборник» содержит большое число задач (около 6000) в диапазоне трех степеней трудности (А, Б, В), разнообразных и сходных по содержанию. Это позволит экзаменационным комиссиям, пожелавшим использовать для экзаменов настоящий «Сборник», значительно сократить затраты труда на изготовление экзаменационных материалов. Опасаться того, что при этом в каком-то смысле раскрываются «экзаменационные секреты», нет оснований. Если поступающий во втуз настолько подготовлен, что может решить любую выборку задач из данного «Сборника», то можно безусловно считать, что курс математики средней школы в требуемом объеме он усвоил достаточно хорошо.

При составлении вариантов для письменных экзаменов было бы неверным брать задачи только из одной какой-либо группы — это может привести к ненужным крайностям: к большому числу несправедливых двоек или дутых пятерок. Авторы рекомендуют включать в экзаменационные задания задачи из разных групп. Оптимальным следует признать вариант, содержащий пять задач, на полное решение которых достаточно четырех астрономических часов аудиторной работы. При этом втузам с умеренной, средней и большой программами курсов математики целесообразно для письменных вступительных экзаменов выбирать задачи из групп А, Б, В части I «Сборника» и соответствующие этим группам задачи из части II, например, в соответствии со следующими формулами: 3А+2Б, 2А+2Б+В, 3Б+2В — для тех групп поступающих, которые окончили среднюю школу до 1977 года.

Варианты конкурсных письменных экзаменов и билеты устных экзаменов для окончивших среднюю школу в 1977 г. и позже должны включать одну-две задачи по началам математического анализа (например, из числа задач, представленных в гл. 14) и не более одной задачи на применение векторов (например, из числа задач, представленных в гл. 15)

Естественно, что каждое из предлагаемых на экзаменах (письменных или устных) заданий должно содержать только те разделы математики, которые входят в программу вступительных экзаменов, действующую в данном году.

Задачи для устных экзаменов (часть II) по уровню сложности не распределены — рядом с простым вопросом может оказаться сложный. Есть среди них и такие, ответ на которые может повысить экзаменационную оценку, а не ответ — ее не снизить (некоторые из них помечены звездочкой). Это обязывает экзаменатора, пожелавшего воспользоваться «Сборником» на устных экзаменах, проявить известную осторожность и объективность как в самом выборе задания, так и в оценке ответа экзаменующегося.

В последней главе «Сборника» помещены задачи, также не рубрицированные по степеням их трудности. Среди них есть повышенно сложные и имеющие нетрадиционный характер. Авторы считают, что такие задачи полезны для самостоятельной работы готовящихся в вузы, но включать эти задачи в экзаменационные материалы, может быть, и не следует.

Авторы будут весьма благодарны всем, кто пришлет свои критические замечания любого характера и соображения о возможных формах и способах использования «Сборника» в условиях экзамена.

В. К. Егерев, В. В. Зайцев, В. А. Кордемский, Т. Н. Маслова, И. Ф. Орловская, Р. И. Позойский, Г. С. Ряховская, З. А. Скопец, Н. М. Федорова

ЧАСТЬ I
ЗАДАЧИ ДЛЯ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

Глава 1
АРИФМЕТИКА

Найти значения выражений (1.001—1.040):

1.001. $$\frac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}.$$

1.002. $$\left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1{,}25+\left(\frac{6}{7}-\frac{17}{28}\right):(0{,}358-0{,}108)\right)\times$$
$$\times 1{,}6-\frac{19}{25}.$$

1.003. $$\frac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}.$$

1.004. $$\left(\frac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{70}}+0{,}125\right):2\frac{1}{2}+0{,}43.$$

1.005. $$\frac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}-\frac{\left(2\frac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\frac{1}{2}}.$$

1.006. $$\frac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\frac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)56}-27\frac{1}{6}.$$

1.007. $$\frac{\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}\right)\cdot 2{,}52}{\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}}.$$

1.008. $\left(\dfrac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-1\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}}\cdot 5,2\right):\left(\dfrac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125}+5,7\right).$

1.009. $\dfrac{0,4+8\left(5-0,8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8,9-2,6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}\cdot 90.$

1.010. $\dfrac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3}+0,75\right)\cdot 3\frac{9}{13}}\cdot 34\frac{2}{7}+\dfrac{0,3:0,01}{70}+\dfrac{2}{7}.$

1.011. $\dfrac{\left(\frac{3}{5}+0,425-0,005\right):0,1}{30,5+\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}}+\dfrac{6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}}{26:3\frac{5}{7}}-0,05.$

1.012. $\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1,9+19,5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0,16}:\dfrac{3,5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0,5\left(1\frac{1}{20}+4,1\right)}.$

1.013. $\dfrac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0,6-0,005\right)\right)\cdot 1,7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\dfrac{4,75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0,25.$

1.014. $\dfrac{\left(4,5\cdot 1\frac{2}{3}-6,75\right)\cdot 0,66\ldots}{\left(3,(3)\cdot 0,3+0,(2)+\frac{4}{9}\right):2\frac{2}{3}}+\dfrac{1\frac{4}{11}\cdot 0,22:0,3-0,96}{\left(0,2-\frac{3}{40}\right)\cdot 1,6}.$

1.015. $\dfrac{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0,625-\frac{13}{18}:\frac{26}{9}}+\dfrac{\left(\frac{0,216}{0,15}+0,56\right):0,5}{\left(7,7:24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4,5}.$

1.016. $\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2,2\,(0,(24)-0,(09))+\frac{2}{11}.$

1.017. $\dfrac{0,128:3,2+0,86}{\frac{5}{6}\cdot 1,2+0,8}\cdot\dfrac{\left(1\frac{32}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot 3,6}{0,505\cdot\frac{2}{5}-0,002}$.

1.018. $\dfrac{3\frac{1}{3}:10+0,175:0,35}{1,75-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}-\dfrac{\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{15}\right):1,4}{\left(0,5-\frac{1}{9}\right)\cdot 3}$.

1.019. $\dfrac{0,125:0,25+1\frac{9}{16}:2,5}{(10-22:2,3)\cdot 0,46+1,6}+\left(\dfrac{17}{20}+1,9\right)\cdot 0,5$.

1.020. $\left(\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}-\left(0,6:3\frac{3}{4}\right)2\frac{1}{2}+3,75:1\frac{1}{2}\right):2,2$.

1.021. $\left(2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right)\times$

$$\times\frac{0,1(6)+0,(3)}{0,(3)+1,1(6)}.$$

1.022. $\dfrac{0,5+\frac{1}{4}+0,1666\ldots+0,125}{0,\ (3)+0,4+\frac{14}{15}}+\dfrac{(3,75-0,625)\cdot\frac{48}{125}}{12,8\cdot 0,25}$.

1.023. $\left(26\frac{2}{3}:6,4\right)\cdot\left(19,2:3\frac{5}{9}\right)-\dfrac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0,5:18\frac{2}{3}\cdot 11}-\dfrac{1}{18}$.

1.024. $\dfrac{0,725+0,6+\frac{7}{40}+0,42(6)+0,12(3)}{0,128\cdot 6\frac{1}{4}-\left(0,0345:\frac{3}{25}\right)}\cdot 0,25$.

1.025. $\left((520\cdot 0,43):0,26-217\cdot 2\frac{3}{7}\right)-$

$$-\left(31,5:12\frac{3}{5}+114\cdot 2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}\right).$$

1.026. $$\frac{(3,4-1,275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0,5\cdot\left(2+\frac{12,5}{5,75+\frac{1}{2}}\right).$$

1.027. $$\left(\frac{3,75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1,875}-\frac{2\frac{3}{4}+1,5}{2,75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{10}{11}.$$

1.028. $$((21,85:43,7+8,5:3,4):4,5):1\frac{2}{5}+1\frac{11}{21}.$$

1.029. $$\left(1\frac{2}{5}+3,5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3,4:2\frac{1}{8}-0,35.$$

1.030. $$\frac{\left(0,3275-\left(2\frac{15}{88}+\frac{4}{33}\right):12\frac{2}{9}\right):0,07}{(13-0,416):6,05+1,92}.$$

1.031. $$\frac{0,8333\ldots-0,4\,(6)}{1\frac{5}{6}}\cdot\frac{1,125+1\frac{3}{4}-0,41\,(6)}{0,59}.$$

1.032. $$\frac{\left(0,666\ldots+\frac{1}{3}\right):0,25}{0,12333\ldots:0,0925}+12,5\cdot0,64.$$

1.033. $$\frac{\left(\frac{5}{8}+2,708333\ldots\right):2,5}{(1,3+0,7(6)+0,(36))\cdot\frac{110}{401}}\cdot0,5.$$

1.034. $$\frac{((7-6,35):6,5+9,8999\ldots)\cdot\frac{1}{12,8}}{\left((1,2:36)+\left(1\frac{1}{5}:0,25\right)-1,8\,(3)\right)\cdot1\frac{1}{4}}:0,125.$$

1.035. $$\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot0,(26)}{\left(18\frac{1}{2}-13,777\ldots\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot0,5.$$

1.036. $\dfrac{3{,}75:1\frac{1}{2}+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}$.

1.037. $\dfrac{\left(\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}$.

1.038. $\dfrac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}$.

1.039. $\left(\dfrac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\dfrac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+$

$+1{,}364:0{,}124.$

1.040. $5\frac{4}{7}:\left(8{,}4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(6-\dfrac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right)-20{,}384:1{,}3\right)$.

Найти X из пропорции **(1.041—1.045)**:

1.041. $\dfrac{\left(4-3{,}5\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{X}=\dfrac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}$.

1.042. $\dfrac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}=\dfrac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{X}$.

1.043. $\dfrac{0{,}125X}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}$.

1.044. $$\frac{X}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\frac{9\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}.$$

1.045. $$\frac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7}{X}=\frac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\left(5\frac{1}{2}-3{,}25\right)}.$$

[1.046.] Вычислить наиболее рациональным способом:

$$\frac{\sqrt{6{,}3\cdot 1{,}7}\cdot\left(\sqrt{\frac{6{,}3}{1{,}7}}-\sqrt{\frac{1{,}7}{6{,}3}}\right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2-4\cdot 6{,}3\cdot 1{,}7}}.$$

Глава 2

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Группа А

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров (2.001—2.124):

2.001. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$

2.002. $\left(\left(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q}\right)^{-2}+\left(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}\right)^{-2}\right):\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}.$

2.003. $\dfrac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}}:$

$$:\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right).$$

2.004. $\left(\dfrac{(a+b)^{-n/4}\cdot c^{1/2}}{a^{2-n}b^{-3/4}}\right)^{4/3}:\left(\dfrac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{1/6},$

$$a=\frac{19}{31},\quad b=0{,}04,\quad c=6\frac{8}{15}.$$

2.005. $\dfrac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\dfrac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}.$

2.006. $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+3\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}.$

2.007. $\dfrac{\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)^2+\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)^2}{2(m-n)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-$

$$-3\sqrt{mn}.$$

2.008. $\left(\left(\dfrac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)\cdot 3^{-2}\right)^5.$

2.009. $$\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}.$$

2.010. $t\cdot\dfrac{1+\dfrac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\dfrac{4}{\sqrt{t+4}}.$

2.011. $\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2.$

2.012. $\dfrac{x-1}{x+x^{1/2}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}.$

2.013. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):$

$$:\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right).$$

2.014. $\dfrac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\dfrac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\times$

$$\times\frac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}.$$

[2.015]. $\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}}:\sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}.$

2.016. $\left(\dfrac{(z^{2/p}+z^{2/q})^2-4z^{2/p+2/q}}{(z^{1/p}-z^{1/q})^2+4z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}.$

2.017. $\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1.$

2.018. $\left(\dfrac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\dfrac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}\cdot(5-2x^2),$

$$x=\sqrt{3{,}92}.$$

2.019. $\dfrac{(x^2-y^2)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$,

$x=64,\ y=31/78.$

2.020. $\sqrt{\dfrac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4+\frac{8}{a}+\frac{4}{a^2}}{\sqrt{2}}}$.

2.021. $\dfrac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-1}$. 2.022. $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$.

2.023. $\sqrt[4]{6x\left(5+2\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

2.024. $\sqrt[6]{4x\left(11+4\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{3x}-2\sqrt{2x}}$.

2.025. $\dfrac{a^3-a-2b-\frac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\right)\cdot\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:$

$:\left(\dfrac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a-b}\right),\ a=23,\ b=22.$

2.026. $\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{4/3}}\right)^{3/2}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}$.

2.027. $\dfrac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

2.028. $\dfrac{x\,(x^2-a^2)^{-1/2}+1}{a\,(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\dfrac{a^2\sqrt{x+a}}{x-(x^2-a^2)^{1/2}}+$

$+\dfrac{1}{x^2-ax}$.

2.029. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{(r^2+4)\cdot\sqrt{1+\frac{4}{r^2}}}-\sqrt[3]{(r^2-4)\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}$.

2.030. $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a}+\frac{a}{\sqrt{2}}+2}-\frac{a^2\cdot\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}$.

2.031. $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\times$

$\times\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}$.

2.032. $\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}+4\sqrt{\frac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}+2}$, $a=0{,}04$

2.033. $\frac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}$.

2.034. $1-\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:$

$:\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$.

2.035. $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$.

2.036. $\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+m\sqrt{\frac{3n}{m}}+\sqrt{3np}\right)\times$

$\times\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-p\sqrt{\frac{3n}{p}}\right)$.

2.037. $\frac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\frac{2}{x^{3/2}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}$.

2.038. $\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$.

$$2.039.\quad \frac{9b^{4/3}-\frac{a^{3/2}}{b^2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2}+6a^{3/4}b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\cdot\frac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}},$$

$$a=3\sqrt{7},\ b=4.$$

$$2.040.\quad \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{a-b-c}{abc},$$

$$a=0{,}02,\ b=-11{,}05,\ c=1{,}07.$$

$$2.041.\quad \frac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\frac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\frac{a^2+2}{1-a^3}.$$

$$2.042.\quad \frac{\sqrt{2}\,(x-a)}{2x-a}-\left(\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{1/2},\ a=0{,}32,\ x=0{,}08.$$

$$2.043.\quad \frac{\left(m^2-\frac{1}{n^2}\right)^m\cdot\left(n+\frac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\frac{1}{m^2}\right)^n\cdot\left(m-\frac{1}{n}\right)^{m-n}}.$$

$$2.044.\quad \left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):$$

$$:\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}.$$

$$2.045.\quad \left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}.$$

$$2.046.\quad \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\cdot\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right).$$

$$2.047.\quad \frac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)}\cdot(b^2+b+ab+a).$$

2.048. $\frac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\frac{4p^2-3pq}{2+pq^2}$, $p=0{,}78$, $q=7/25$.

2.049. $$\left(\frac{pq^3}{(p+q)^{5/2}}-\frac{2pq^2}{(p+q)^{3/2}}+\frac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\left(\frac{p^2}{(p+q)^{5/2}}-\frac{p^2q}{(p+q)^{7/2}}\right).$$

2.050. $\frac{2(x^4+4x^2-12)+x^4+11x^2+30}{x^2+6}$.

2.051. $$\frac{(a^2-b^2)\left(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b}\right)}{a\sqrt[3]{b}+a\sqrt{a}-b\sqrt[3]{b}-\sqrt{ab^2}}:\frac{a^3-b}{a\sqrt[3]{b}-\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt{a}},\quad a=4{,}91,\quad b=0{,}09.$$

2.052. $$\left((1-x^2)^{-1/2}+1+\frac{1}{(1-x^2)^{-1/2}-1}\right)^{-2}:\left(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}\right).$$

2.053. $((1-p^2)^{-1/2}-(1+p^2)^{-1/2})^2+2(1-p^4)^{-1/2}$.

2.054. $\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$.

2.055. $$\left(\frac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}+\frac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}-2\right):\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-y}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x+y}}\right).$$

2.056. $$\left(\frac{4}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}-\frac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2},$$

$$a=\sqrt[3]{5{,}32},\quad b=\sqrt[4]{1{,}005},\quad c=7{,}04.$$

2.057. $\left(\left(\frac{x}{y-x}\right)^{-2}-\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\cdot\frac{x^4}{x^2y^2-y^4}$.

2.058. $\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$,

$$a=1\frac{33}{40},\quad b=0{,}625,\quad c=3{,}2.$$

2.059. $\left(\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right):\frac{(x-y)^2+4xy}{1+\frac{y}{x}}$.

2.060. $\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}$.

2.061. $\left(x^2+2x-\frac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\frac{2x^2+x+2}{3x+1}\right)$, $x=7,(3)$

2.062. $\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right)$.

2.063. $\frac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\frac{x^2}{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$.

2.064. $\frac{2b+a-\frac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}$.

2.065. $\frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)$.

2.066. $\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}$.

2.067. $\frac{a^{1/2}+ab^{-1}}{a^{-1/3}-a^{-1/6}b^{-1/3}+b^{-2/3}}-\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$.

2.068. $\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}}$, $a=7{,}4$, $b=\frac{5}{37}$, $c=2\frac{12}{43}$.

2.069. $\frac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b}:a^{1/3}$.

2.070. $\dfrac{(a^2-b^2)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}$.

2.071. $\dfrac{(m-1)\sqrt{m}-(n-1)\sqrt{n}}{\sqrt{m^3n}+mn+m^2-m}$.

2.072. $\dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}\right)+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}$.

2.073. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)}$.

2.074. $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}}\right)^2+4a^{\frac{m+n}{mn}}}{\left(a^{\frac{2}{m}}-a^{\frac{2}{n}}\right)\left(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}}\right)}$.

2.075. $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{m}}-9x^{\frac{2}{n}}\right)\cdot\left(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}}\right)^2-12x^{\frac{m+n}{mn}}}$.

2.076. $\dfrac{3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-4\sqrt{3}}+5\sqrt{2{,}4}\left(\sqrt{15}+3\right)$.

2.077. $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}$,

$a=1-\sqrt{2},\quad b=1+\sqrt{2}$.

2.078. $\left(\dfrac{1}{t^2+3t+2}+\dfrac{2t}{t^2+4t+3}+\dfrac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\cdot\dfrac{(t-3)^2+12t}{2}$.

2.079. $\left(\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{\dfrac{m^2-9}{m}}}+\right.$

$\left.+\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{\dfrac{m^2-9}{m}}}\right)^2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{m^2}{4}}$.

2.080. $\dfrac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\dfrac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)}$.

2.081. $\left(\frac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\frac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}-\frac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}:\sqrt[4]{t^2-4}$.

2.082. $\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}$,

$a=3,\ b=\sqrt{3},\ c=-\sqrt{5}$.

2.083. $\left(2-x+4x^2+\frac{5x^2-6x+3}{x-1}\right):\left(2x+1+\frac{2x}{x-1}\right)$.

2.084. $\left(\frac{2-b}{b-1}+2\cdot\frac{a-1}{a-2}\right):\left(b\cdot\frac{a-1}{b-1}+a\cdot\frac{2-b}{a-2}\right)$,

$a=\sqrt{2}+0{,}8,\ b=\sqrt{2}-0{,}2$.

2.085. $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$.

2.086. $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}$.

2.087. $\frac{\sqrt{3}\,(a-b^2)+\sqrt{3}\,b\sqrt[3]{8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+\left(2b\sqrt{2a}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}$.

2.088. $\left(\sqrt{1-x^2}+1\right):\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)$.

2.089. $\frac{8-n}{2+\sqrt[3]{n}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\frac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\times$

$\times\frac{4-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{n}}$.

2.090. $\frac{(a-b)^3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+$

$+\frac{3\left(\sqrt{ab}-b\right)}{a-b}$.

2.091. $\dfrac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{1/2}+x^{1/3}y^{1/6}}\cdot\dfrac{(x^{1/3}+y^{1/3})^2-4\sqrt[3]{xy}}{x^{5/6}y^{1/3}-x^{1/2}y^{2/3}}+$

$+2x^{-2/3}y^{-1/6}.$

2.092. $\left(x\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{(x+1)^2}}+\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)^{-3/5}:(x^2-1)^{4/5}.$

2.093. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\times$

$\times\left(\sqrt{t}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}+2\right).$

2.094. $\dfrac{m^{4/3}-27m^{1/3}\cdot n}{m^{2/3}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{2/3}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}.$

2.095. $z^{\frac{p-3}{p^2+3p}}:z^{\frac{12}{9-p^2}}\cdot z^{\frac{3}{3p-p^2}}.$

2.096. $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}}:\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\right.$

$\left.-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right).$

[2.097.] $\dfrac{(\sqrt{x}+2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-1\right)-(\sqrt{x}-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}+1\right)}{(2-\sqrt{x+2}):\left(\sqrt{\dfrac{2}{x}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)}.$

2.098. $\dfrac{1-\sqrt{2t}}{\dfrac{1-\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{1}{2t}+\sqrt[4]{4t^2}}}{1+\sqrt[4]{\dfrac{1}{2t}}}-\sqrt{2t}\right)^{-1}.$

2.099. $\dfrac{\left(x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{2/3}\right)}{\left(x^{4/3}-8y\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right).$

2.100. $\dfrac{\left(z-z\sqrt{z}+2-2\sqrt{z}\right)^2\cdot\left(1+\sqrt{z}\right)^2}{z-2+\dfrac{1}{z}}-$

$-z\sqrt{z}\sqrt{\dfrac{4}{z}+4+z}.$

2.101. $\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{a}\right)^{-1}.$

2.102. $\left(\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\cdot\frac{1+a(a-2)}{a^2-a+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{(a+1)^2}}.$

2.103. $\left(\sqrt{ab}-ab\left(a+\sqrt{ab}\right)^{-1}\right):$

$$:\left(2\left((ab)^{\frac{1}{2}}-b\right)\cdot(a-b)^{-1}\right).$$

2.104. $\left(\frac{a}{b}\sqrt[3]{b-\frac{4a^6}{b^3}}-a^2\sqrt[3]{\frac{b}{a^6}-\frac{4}{b^3}}+\right.$

$$\left.+\frac{2}{ab}\sqrt[3]{a^3b^4-4a^9}\right):\frac{\sqrt[3]{b^2-2a^2}}{b^2}.$$

2.105. $\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)\cdot\frac{x^2-1}{2}+$

$$+\sqrt{1-x^2}.$$

2.106. $\frac{4a^2-b^2}{a^6-8b^6}\cdot\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a^4+2a^2b^2+4b^4}{4a^2+4ab+b^2}\times$

$$\times\sqrt{a^2+2b\sqrt{a^2-b^2}},\ a=4/3,\ b=0{,}25.$$

2.107. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\left(\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}\right):$

$$:\left(\left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\right),\ a=0{,}75,\quad b=4/3.$$

2.108. $\left(-4a\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ax}}{a^2}}\right)^3+\left(-10a\sqrt{x}\cdot\sqrt{(ax)^{-1}}\right)^2+$

$$+\left(-2\left(\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}}\right)^2\right)^3,\ a=3\frac{4}{7},\quad x=0{,}28.$$

2.109. $\frac{2\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\left(\sqrt{\frac{c-d}{c+d}}+\sqrt{\frac{c^2+cd}{c^2-cd}}\right),\ c=2,\ d=7.$

2.110. $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right),\ x=\frac{1}{a-1}.$

2.111. $\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}.$

2.112. $$\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-t^3}+\sqrt[3]{\frac{t^5+2t^4+4t^3}{4-4t+t^2}}\right):$$
$$:\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{2}}\right).$$

2.113. $$\frac{x^{3/p}-x^{3/q}}{(x^{1/p}+x^{1/q})^2-2x^{1/q}(x^{1/q}+x^{1/p})}+\frac{x^{1/p}}{x^{(q-p)/pq}+1}.$$

2.114. $$\left(\frac{9-4a^{-2}}{3a^{-1/2}+2a^{-3/2}}-\frac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-1/2}+3a^{-3/2}}\right)^4.$$

2.115. $$4ab+\frac{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\right)a^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}-$$
$$-\frac{\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}}.$$

2.116. $$\left(\left(\sqrt{mn}-\frac{mn}{m+\sqrt{mn}}\right):\frac{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}{m-n}-\right.$$
$$\left.-m\sqrt{n}\right)^2:\sqrt[3]{mn\sqrt{mn}}-\left(\frac{m}{\sqrt{m^4-1}}\right)^{-2}.$$

2.117. $$\left((a^{1/2}-b^{1/2})^{-1}(a^{3/2}-b^{3/2})-\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}}\right):$$
$$:\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+(a(1-a^2)^{-1/2})^2}.$$

2.118. $$\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot(\sqrt{3}+5)^{-1}.$$

2.119. $$\frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}.$$

2.120. $$\frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}.$$

2.121. $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$.

2.122. $5\sqrt{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+\sqrt{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-$

$-11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}$.

2.123. $2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-$

$-4\sqrt{15\cdot\sqrt{27}}$.

2.124. $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+$

$+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.

Проверить равенства (2.125—2.134):

2.125. $4:\left(0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)=10\sqrt[4]{1{,}5}:\left(0{,}25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}\right)$.

2.126. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

2.127. $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8$.

2.128. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}$.

2.129. $\dfrac{25\cdot\sqrt[4]{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{250}+5\sqrt[4]{8}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\dfrac{5}{\sqrt{2}}+2}=-1$.

2.130. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}}=$

$=\sqrt{2}$.

2.131. $\left(\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2-\left(\dfrac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2=2\sqrt{61+24\sqrt{5}}$.

2.132. $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$

2.133. $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}.$

2.134. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}.$

Сделать указанную подстановку и результат упростить (2.135—2.145):

2.135. $\dfrac{x^3-a^{-2/3}\cdot b^{-1}(a^2+b^2)x+b^{1/2}}{b^{3/2}\cdot x^2},\ x=a^{2/3}b^{-1/2}.$

2.136. $\dfrac{1-b}{\sqrt{b}}x^2-2x+\sqrt{b},\ x=\dfrac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}.$

2.137. $\left(\dfrac{x+2b}{x-2b}+\dfrac{x+2a}{x-2a}\right):\dfrac{x}{2},\ x=\dfrac{4ab}{a+b}.$

2.138. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4),\ x=\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}.$

2.139. $\dfrac{(z-1)(z+2)(z-3)(z+4)}{23},\ z=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}.$

2.140. $\dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)},\ x=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}.$

2.141. $\dfrac{(1-y)(y+2)}{y^2\cdot(y+1)^2},\ y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}.$

2.142. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}},\ x=\sqrt{6}.$

2.143. $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}},\ x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right).$

2.144. $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}},\ x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right).$

2.145. $\dfrac{1-ax}{1+ax}\cdot\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}},\ x=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}.$

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби (2.146—2.151):

2.146. $\dfrac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$. 2.147. $\dfrac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$.

2.148. $\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. 2.149. $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

2.150. $\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. 2.151. $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$.

2.152. Показать, что если

$$z=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a},$$

то

$$z^3+3bz-2a=0.$$

2.153. Если $\sqrt{8-a}+\sqrt{5+a}=5$, то чему равен $\sqrt{(8-a)(5+a)}$?

2.154. Чему равна сумма $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$, если известно, что разность $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$ (величину x находить не нужно)?

2.155. Преобразовать $(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)$ так, чтобы получилось $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

Группа Б

Упростить выражения и вычислить их, если даны значения параметров (2.156—2.290):

2.156. $$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:$$

$$:\frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}-(1-a^2).$$

2.157. $\dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}$.

2.158. $\sqrt[4]{(1-2a+a^2)(a^2-1)(a-1)}:\dfrac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}$.

2.159. $\left(\left(\dfrac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt{a^3}}\right)^{3/2}+\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}\right)^2\right):(a^{1/4}+b^{1/4})$.

2.160. $\dfrac{\left(a^2b\sqrt{b}-6a^{5/3}b^{5/4}+12ab\sqrt[3]{a}-8ab^{3/4}\right)^{2/3}}{ab\sqrt[3]{a}-4ab^{3/4}+4a^{2/3}\sqrt{b}}$.

2.161. $\dfrac{a^3-3a^2+4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}{a^3+3a^2-4+(a^2-4)\sqrt{a^2-1}}$.

2.162. $\dfrac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}$.

2.163. $\left(\dfrac{(x+\sqrt[3]{2ax^2})\cdot(2a+\sqrt[3]{4a^2x})^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-(2a)^{-1/3}\right)^{-6}$.

2.164. $\dfrac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}$.

2.165. $\dfrac{t^2-t-6-(t+3)\sqrt{t^2-4}}{t^2+t-6-(t-3)\sqrt{t^2-4}}$.

2.166. $\dfrac{\dfrac{|b-1|}{b}+b|b-1|+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$.

2.167. $\dfrac{m^5+m^4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}$.

2.168. $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\cdot|x-3|$.

2.169. $\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}$.

2.170. $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$.

2.171. $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}$.

2.172. $\left(2-\dfrac{1}{4a^{-1}}-\dfrac{4}{a}\right)\times$

$$\times\left((a-4)\sqrt[3]{(a+4)^{-3}}-\dfrac{(a+4)^{3/2}}{\sqrt{(a^2-16)(a-4)}}\right).$$

2.173. $\dfrac{m\cdot|m-3|}{(m^2-m-6)\cdot|m|}$. 2.174. $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{(x^3-4x^2+3x)\cdot|x-2|}$.

2.175. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}$. 2.176. $\dfrac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}$.

2.177. $\dfrac{2x-x|x-1|+x|x|+3}{|x|+x^2}$. 2.178. $\dfrac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$.

2.179. $\dfrac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$. 2.180. $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$.

2.181. $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\left(\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2\right)^{1/3}}$.

2.182. $\dfrac{(ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2))\cdot((ax+by)^2-4abxy)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$.

2.183. $\dfrac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$. 2.184. $\dfrac{2|a+5|-a+\dfrac{25}{a}}{3a^2+10a-25}$.

2.185. $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{|x|\cdot(x-2)}$.

2.186. $\dfrac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\dfrac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}$.

2.187. $\dfrac{1+2a^{1/4}-a^{1/2}}{1-a+4a^{3/4}-4a^{1/2}}+\dfrac{a^{1/4}-2}{(a^{1/4}-1)^2}$.

2.188. $\dfrac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}\cdot|2x^2-x-1|}$. 2.189. $\dfrac{|r-1|\cdot|r|}{r^2-r+1-|r|}$.

2.190. $\left(\frac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\frac{(z+4)^2-12}{z^3-8}-\frac{1}{z-2}\right):\frac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$

2.191. $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}$.

2.192. $\frac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{a}+a}$.

2.193. $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{x}\,(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2-\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}}$.

2.194. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}$.

2.195. $\frac{a^4-a^2-2a-1}{a^3-2a^2+1}:\frac{a^4+2a^3-a-2}{1+\frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}}$.

2.196. $\frac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1}-\frac{|x-1|}{x-1}$. 2.197. $\frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$.

2.198. $\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\cdot\sqrt{\frac{b+2}{b-2}}$.

2.199. $\left(\frac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\frac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right):$

$:\left(\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}\right)$.

2.200. $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3\cdot y^4}\right)^{-1/2}\times$

$\times\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)$.

2.201. $\sqrt{\frac{p^2-q\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt[3]{q}}+p\sqrt[3]{q}}\cdot\left(p+\sqrt[6]{p^3q^2}\right)^{-1/2}$.

2.202. $\dfrac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\dfrac{m-4\sqrt{m-4}}{2}.$

2.203. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-2}\cdot\left(2x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}}.$

2.204. $b\sqrt{2}\cdot\dfrac{8+\sqrt{16-b^2}}{\sqrt{4+\sqrt{16-b^2}}}-\sqrt{(4+b)^3}+\sqrt{(4-b)^3}.$

2.205. $\left(\dfrac{bx+4+\dfrac{4}{bx}}{2b+(b^2-4)x-2bx^2}+\dfrac{(4x^2-b^2)\dfrac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx}\right)\cdot\dfrac{bx}{2}.$

2.206. $\dfrac{\sqrt{x^9-x^6y^3}-y^2\sqrt[3]{\dfrac{8x^6}{y^3}-8x^3}+xy\sqrt[3]{y^3-\dfrac{y^6}{x^3}}}{\sqrt[3]{x^8}\,(x^2-2y^2)+\sqrt[3]{x^2y^{12}}}:$

$$:\frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}{x+y}.$$

2.207. $\dfrac{(x^2-3x+2)^{-1/2}-(x^2+3x+2)^{-1/2}}{(x^2-3x+2)^{-1/2}+(x^2+3x+2)^{-1/2}}-1+$

$$+\frac{(x^4-5x^2+4)^{1/2}}{3x}.$$

2.208. $\dfrac{((\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2-(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2)^2-(16m+4n)}{4m-n}+$

$$+\frac{10\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt{m}}.$$

2.209. $\left(\dfrac{x-9}{x+3x^{1/2}+9}:\dfrac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}.$

2.210. $\dfrac{2\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}}{2\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)}.$

2.211. $(z^2-z+1):\left(\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+2\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-3\right)^{1/2}.$

2.212. $(x^4-7x^2+1)^{-2}\cdot\left(\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-14\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+77\right),$

$$x=\frac{\sqrt[4]{125}}{5}.$$

2.213. $\dfrac{\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{(x^2+1)\cdot\frac{1}{x}}.$ **2.214.** $\dfrac{x^2+4}{x\sqrt{4+\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2}}.$

2.215. $\left((z-3)\cdot(z+3)^{-1}-\dfrac{(z+3)^{3/2}}{\sqrt{(z^2-9)(z-3)}}\right)\times$

$$\times\frac{\frac{1}{3}-\frac{z}{18}-\frac{1}{2z}}{(z+3)^{-1}}.$$

2.216. $\dfrac{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\frac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\frac{m-2}{m+2}}}.$

2.217. $\dfrac{b^{-1/6}\cdot\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{(2a^2-b^2-ab)\cdot\sqrt[6]{a^9b^4}}:$

$$:\left(\frac{3a^3}{2a^2-ab-b^2}-\frac{ab}{a-b}\right).$$

2.218. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}.$

[2.219]. $\left(\dfrac{9}{a+8}-\dfrac{a^{1/3}+2}{a^{2/3}-2a^{1/3}+4}\right)\cdot\dfrac{a^{4/3}+8a^{1/3}}{1-a^{2/3}}+\dfrac{5-a^{2/3}}{1+a^{1/3}}.$

2.220. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}.$

2.221. $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2+\sqrt{1-x^2}}.$

2.222. $\left(\frac{2-n}{n-1}+4\cdot\frac{m-1}{m-2}\right):\left(n^2\cdot\frac{m-1}{n-1}+m^2\cdot\frac{2-n}{m-2}\right),$

$$m=\sqrt[4]{400},\quad n=\sqrt{5}.$$

2.223. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}+\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}-\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}.$

2.224. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}}+|x-2|.$

2.225. $\left(x^2+6x+1+\left(\dfrac{\dfrac{x-3}{1+3x}-\dfrac{x-5}{1+5x}}{1+\dfrac{(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}}\right)^{-1}\right)^{1/2}.$

2.226. $\left(\frac{1}{(x+3)^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{9}\right)+\frac{2}{(x+3)^3}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)\right)^{-1/2}.$

2.227. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}.$

2.228. $\sqrt{\left(y^2+\frac{4}{y^2}\right)^2-8\left(y+\frac{2}{y}\right)^2+48}.$

2.229. $\dfrac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\dfrac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}},\quad x=2.$

2.230. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}},\quad x=3.$

2.231. $\dfrac{1+z}{1+\sqrt{1+z}}-\dfrac{1-z}{1-\sqrt{1-z}},\quad z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

2.232. $\dfrac{z^3}{3}-z,\quad z=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$

2.233. $x^3+3x,\quad x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$

2.234. $\dfrac{1+\sqrt{1+x}}{x+1}+\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{x-1},\quad x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

2.235. $\dfrac{(x+1)^{-1/2}}{(x-1)^{-1/2}-(x+1)^{-1/2}},\quad x=\dfrac{a^2+1}{2a}.$

2.236. $\dfrac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}-z},\quad z=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{m}+\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right).$

2.237. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}-2\right)^{1/2},\quad x=\dfrac{a^3+1}{a^3-1}.$

2.238. $\dfrac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}.$

2.239. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}\right):$

$$:\left(\frac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}\right)^{1/2}.$$

2.240. $\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{9-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}+3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3+\sqrt[6]{108}}.$

2.241. $\left(\dfrac{4-2x+x^2}{4-2x}+\dfrac{6x^2+8+12x}{4-x^2}-\dfrac{x^2+2x+4}{2x+4}\right)^{-1/3}\times$

$$\times(x+2).$$

2.242. $\sqrt{a^3-b^3+\sqrt{a}}\times$

$$\times\frac{\sqrt{a^{3/2}+\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a^{3/2}-\sqrt{b^3+\sqrt{a}}}}{\sqrt{(a^3+b^3)^2-a(4a^2b^3+1)}},$$

$$a=\sqrt[8]{5},\quad b=\sqrt[5]{3}.$$

2.243. $\left(\dfrac{x^4+5x^3+15x-9}{x^6+3x^4}+\dfrac{9}{x^4}\right):\dfrac{x^3-4x+3x^2-12}{x^5}.$

2.244. $\dfrac{a(a-2)-b(b+2)+\sqrt{ab}\,(b-a+2)}{a+b-\sqrt{ab}}:$

$$:\left(1+2\cdot\frac{a^2+b^2+ab}{b^3-a^3}\right).$$

2.245. $\frac{((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2})^{-1}+((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2})^{-1}}{((x+2)^{-1/2}+(x-2)^{-1/2})^{-1}-((x+2)^{-1/2}-(x-2)^{-1/2})^{-1}}$.

2.246. $$\frac{(x\sqrt[4]{x}-\sqrt{xy}\,(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})-y\sqrt[4]{y})\cdot(x+y+\sqrt{xy})}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})\cdot((\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2+\sqrt[4]{xy})}.$$

2.247. $$\frac{ab^{2/3}-\sqrt[3]{b^2}-a+1}{(1-\sqrt[3]{a})\cdot((\sqrt[3]{a}+1)^2-\sqrt[3]{a})\cdot(b^{1/3}+1)}+$$
$$+\sqrt[3]{ab}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+b^{-1/3}\right).$$

2.248. $$\frac{\sqrt{11+\sqrt{3}}}{\sqrt{59}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{3}}}\times$$
$$\times\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}.$$

2.249. $$\sqrt[4]{\frac{x}{32}}\cdot\frac{(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{2})^2+(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{2})^2}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{2x}}:$$
$$:\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[8]{2x})\cdot(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{2x})}{2-\sqrt[4]{2x^3}}.$$

2.250. $$\left(\frac{2(a+1)+2\sqrt{a^2+2a}}{3a+1-2\sqrt{2a^2+a}}\right)^{1/2}-$$
$$-(\sqrt{2a+1}-\sqrt{a})^{-1}\cdot\sqrt{a+2}.$$

2.251. $$\frac{(\sqrt[8]{x}+\sqrt[8]{y})^2+(\sqrt[8]{x}-\sqrt[8]{y})^2}{x-\sqrt{xy}}:$$
$$:\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})\cdot(\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{xy}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt[4]{x^3y}-y}$$

2.252. $$\frac{\sqrt{a^2-b+\sqrt{c}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b+\sqrt{c}}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}}{\sqrt{\frac{a^3}{b}-2a+\frac{b}{a}-\frac{c}{ab}}},$$
$a=4{,}8,\ b=1{,}2,\ c=0{,}03.$

2.253. $$(4x-1)\cdot\left(\frac{1}{8x}\cdot\left(\left(\sqrt{8x-1}+4x\right)^{-1}-\left(\sqrt{8x-1}-4x\right)^{-1}\right)\right)^{1/2}.$$

2.254. $$\left(\frac{x+2y}{8y^3\,(x^2+2xy+2y^2)}-\frac{(x-2y):8y^3}{x^2-2xy+2y^2}\right)+\left(\frac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\frac{1}{4x^2y^2+8y^4}\right),\quad x=\sqrt[4]{6},\quad y=\sqrt[8]{2}.$$

2.255. $$\sqrt[3]{x^2\left(x+3\sqrt{5}\right)+5\left(\sqrt{5}+3x\right)}+\sqrt[3]{x^2\left(x-3\sqrt{5}\right)+5\left(3x-\sqrt{5}\right)}.$$

2.256. $$\sqrt[3]{4x^2\left(2x+3\sqrt{3}\right)+3\left(6x+\sqrt{3}\right)}-\sqrt[3]{4x^2\left(2x-3\sqrt{3}\right)+3\left(6x-\sqrt{3}\right)}.$$

2.257. $$\left(\left(a-3\sqrt[6]{a^5}+9\sqrt[3]{a^2}\right)\times\left(\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}+3\sqrt[12]{a^5}\right)^{-1}+3\sqrt[12]{a^5}\right)^{-1}.$$

2.258. $$\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[8]{ab}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab}\right)}{\sqrt[4]{a^3b}-b}:\frac{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)^2+\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot b^{-1/4}}.$$

2.259. $$\left(\sqrt[3]{\frac{8z^3+24z^2+18z}{2z-3}}-\sqrt[3]{\frac{8z^3-24z^2+18z}{2z+3}}\right)-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2z}{27}-\frac{1}{6z}}\right)^{-1}.$$

2.260. $$\frac{\sqrt{\left(\frac{p^4+q^4}{p^4-p^2q^2}+\frac{2q^2}{p^2-q^2}\right)\cdot(p^3-pq^2)-2q\sqrt{p}}}{\sqrt{\frac{p}{p-q}-\frac{q}{p+q}-\frac{2pq}{p^2-q^2}}\cdot(p-q)}.$$

2.261. $$\sqrt[3]{\frac{2x^2}{9+18x+9x^2}}\cdot\sqrt{\frac{(1+x)\sqrt[3]{1-x}}{x}}\times\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}}.$$

2.262. $\dfrac{4-\sqrt[3]{a^2}}{\left(2+\sqrt[3]{ab}\right)^2-\left(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[3]{b}\right)^2}$,

$$a=\sqrt[7]{3},\quad b=\sqrt{0{,}008}.$$

2.263. $\dfrac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2}{x^2-x\sqrt{2}+2}-x\sqrt{2}$. 2.264. $\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+x^2-5x+3}$.

2.265. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[4]{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt[4]{b}}}{\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-4\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{\sqrt{b}}{a}}}$,

$$a=1{,}21,\quad b=0{,}09.$$

2.266. $\dfrac{\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4b+1}{a}}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{a}}\right)^{-1/2}}{\sqrt{a-b+\sqrt{a}}\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{a}}}}$,

$$a=2{,}25,\quad b=0{,}08.$$

2.267. $\dfrac{\sqrt{x^2y^{-2}-xy^{-1}+\frac{1}{4}}\cdot\left(xy^{-2}+y^{-3/2}\right)}{2x^2-y^{3/2}-xy+2xy^{1/2}}$.

2.268. $\dfrac{x+\sqrt{x}-\sqrt[4]{12x}+3+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12x}}-\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{12x}\right)$.

2.269. $\dfrac{a^{3/2}+a^{3/4}-\left(\sqrt{a^3+2a^2}+\sqrt[4]{a(a+2)^2}\right)}{\sqrt{2\left(a+1-\sqrt{a^2+2a}\right)}\cdot\left(a^2-a^{5/4}+a^{1/2}\right)^{-1}}$.

2.270. $\dfrac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}$.

2.271. $$\left(\frac{3^{3/2}+\frac{1}{8}\,z^{3/5}}{3+\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}+\frac{1}{4}\sqrt[5]{z^2}}+\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{z}}{2\sqrt{3}+\sqrt[5]{z}}\right)^{-1}:\frac{1}{2\sqrt{12}+\sqrt[5]{32z}}.$$

2.272. $$\frac{\left(\sqrt{q^3}:\sqrt{p}+p\right)^{1/4}:\sqrt[8]{(p-q)^3}}{\left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}+1}\right)^{1/4}}.$$

2.273. $$\frac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}.$$

2.274. $$\frac{8-m}{\sqrt[3]{m}+2}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+2}\right)+\left(\sqrt[3]{m}+\frac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}}.$$

2.275. $$x\sqrt[3]{2x\sqrt{xy}-x\sqrt{3xy}}\cdot\sqrt[6]{x^3y\left(7+4\sqrt{3}\right)}.$$

2.276. $$\left(\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)^{1/2}-\sqrt{a-1}\times\left(\sqrt{a}+1\right)^{-1}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^{2/3}+a^{1/3}+1}.$$

2.277. $$\left(\frac{a+a^{3/4}\,b^{1/2}+a^{1/4}\,b^{3/2}+b^2}{a^{1/2}+2a^{1/4}\,b^{1/2}+b}\cdot\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)+\frac{3\sqrt{b}\left(a^{1/2}-b\right)}{a^{-1/4}\left(a^{1/4}-\sqrt{b}\right)}\right)^{-1/3}:\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}.$$

2.278. $$\left(\sqrt{\frac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3n^2}{4-8n+4n^2}}\right)^{-1}:\sqrt[3]{\left(\frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}}\right)^{-1}}.$$

2.279. $$\frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}\times$$

$$\times\left(\frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1}}+\frac{4ab\sqrt{a}+9ab\sqrt{b}-9b^2\sqrt{a}}{\frac{3}{2}\sqrt{b}-2\sqrt{a}}\right).$$

2.280. $$\frac{2a\left(a+2b+\sqrt{a^2+4ab}\right)}{\left(a+\sqrt{a^2+4ab}\right)\cdot\left(a+4b+\sqrt{a^2+4ab}\right)}.$$

2.281. $$\left(\frac{(1+a^{-1/2})^{1/6}}{(a^{1/2}+1)^{-1/3}}-\frac{(a^{1/2}-1)^{1/3}}{(1-a^{-1/2})^{-1/6}}\right)^{-2}\times$$

$$\times\frac{\frac{1}{3}a^{1/12}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}.$$

2.282. $$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right).$$

2.283. $$\frac{(pq^{-1}+1)^2}{pq^{-1}-p^{-1}q}\cdot\frac{p^3q^{-3}-1}{p^2q^{-2}+pq^{-1}+1}:\frac{p^3q^{-3}+1}{pq^{-1}+p^{-1}q-1}.$$

2.284. $$\sqrt{\frac{\sqrt{(a-y)(y-b)}+\sqrt{(a+y)(y+b)}}{\sqrt{(a+y)(y+b)}-\sqrt{(a-y)(y-b)}}},\quad y=\sqrt{ab}.$$

2.285. $$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times$$

$$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

2.286. $$\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}}\times$$

$$\times\sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}.$$

2.287. $$\frac{2(a+(a+1)+(a+2)+\dots+2a)}{a^2+3a+2}+\frac{6(a^{1/2}+b^{1/2})}{(a-b)^{0,6}(a+2)}:$$

$$:((a^{1/2}-b^{1/2})(a-b)^{-2/5})^{-1}.$$

2.288. $$\frac{\sqrt{6+\sqrt{3+\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}}}{\sqrt{11-\sqrt{\frac{5}{9}}}:\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{5}}}}}.$$

2.289. $$\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2-\sqrt{2x}}{x^2+x-\sqrt{2x}+2}.$$

2.290. $$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{ax}+x+x\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^2}{(x+x^{-1}-2)\cdot a^{-1/4}}-$$
$$-\frac{(x\sqrt{a})^{3/2}}{(ax^{-1}+4\sqrt{a}+4x)^{-1/2}}.$$

Проверить равенства (2.291—2.308):

2.291. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3.$

2.292. $$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-$$
$$-\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{20-4\sqrt{5}}.$$

2.293. $$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}}+\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\frac{10}{\sqrt[3]{25}}\right):$$
$$:\left(\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{5}\right)+\sqrt[6]{5}=\sqrt{2}.$$

2.294. $$\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=$$
$$=2\sqrt{3m-n}.$$

2.295. $$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2.296. $$\frac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}+1)^{-1/3}}+\frac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}-1)^{-1/3}}=$$
$$=2\sqrt{a-1}.$$

2.297. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})=1.$

2.298. $\dfrac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2.$

2.299. $\dfrac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}.$

2.300. $\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}.$

2.301. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1.$

2.302. $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$

2.303. $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}=6.$

2.304. $\sqrt{10p+2\sqrt{25p^2-q^2}}-$

$$-\sqrt{10p-2\sqrt{25p^2-q^2}}=2\sqrt{5p-q}.$$

2.305. $\dfrac{11-6\sqrt{2}}{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}}=3-\sqrt{2}.$

2.306. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{8-3\sqrt{5}}+\sqrt[3]{64-12\sqrt{20}}\right)\cdot\sqrt[3]{8+3\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{57}}\times$

$$\times\left(\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{2}}+\frac{\sqrt{2}-9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{81}}\right)=12.$$

2.307. $\left(\left(1+\dfrac{4}{a-2}\right)\cdot(a-4+4a^{-1})-\right.$

$$\left.-\sqrt{3}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2+\ldots\right)\right):\frac{a^{-1/2}-2a^{-1}}{(\sqrt{a}+2)^{-1}}=a+1.$$

2.308. $\left(\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}-\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}\right)\times$

$$\times\sqrt[3]{2\sqrt{6}-1}=0.$$

2.309. Доказать, что если $a+b=1$, то

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

2.310. Определить A, B и C так, чтобы для всех допустимых значений x имело место равенство

$$\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

Группа В

Упростить выражения. Найти области допустимых значений параметров, если они не указаны (**2.311—2.360**):

2.311. $\left(\dfrac{\dfrac{x^3-1}{x+1}\cdot\dfrac{x}{x^3+1}}{\dfrac{(x+1)^2-x}{(x-1)^2+x}\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}\right)^{-1/2}$.

2.312. $\dfrac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}$. **2.313.** $|x^2-1|+x\cdot|x+1|$.

2.314. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

2.315. $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}$.

2.316. $\left(x+2\sqrt{2x-4}\right)^{-1/2}+\left(x-2\sqrt{2x-4}\right)^{-1/2}$.

2.317. $\left(\dfrac{4m^2n^2}{4mn-m^2-4n^2}-\dfrac{2+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}}{\dfrac{4}{mn}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{4}{m^2}}\right)^{1/2}:\dfrac{\sqrt{mn}}{m-2n}$.

2.318. $\left(\sqrt{x^4-a^4}-\dfrac{x\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

2.319. $\left(\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot x^2-2x\cdot\dfrac{|x+1|}{x+1}+2x-4\right):|x-2|$.

2.320. $\sqrt{\dfrac{(x^2-3)^2+12x^2}{x^2}}+\sqrt{(x+2)^2-8x}$.

2.321. $\left(\dfrac{\left(a^{3/2}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}$.

2.322. $\sqrt{y^2-6y+9}-|y-9|+2$.

2.323. $\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{1}{4x^{-1}}-2}+\sqrt{\frac{1}{4x^{-1}}+\frac{2^{-2}}{x}+\frac{1}{2}}$.

2.324. $\sqrt{\frac{x}{2+x+x^{-1}}}+|x-1|$.

2.325. $\frac{n^4-9n^3+12n^2+9n-13}{n^4-10n^3+22n^2-13n}$.

2.326. $\frac{\sqrt{a+2\sqrt{b}+\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{2a-10\sqrt[6]{8a^3b^2}+25\sqrt[3]{b^2}}}{a\sqrt{2a}+\sqrt{2ab}-5a\sqrt[3]{b}-5\sqrt[6]{b^5}}$.

2.327. $\frac{(x-1)\cdot\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|}$.

2.328. $\sqrt{\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}}$.

2.329. $\frac{||x|-1|\cdot|x|}{x^2-1}$. 2.330. $\sqrt{1-2\sqrt{m-m^2}}$.

2.331. $\left(\frac{\sqrt{(z+2)^2-8z}}{z+2}+\frac{(z-1)^2+3}{z^3+8}\right):\frac{z^2-3z+2}{z^3-2z^2-4z+8}$.

2.332. $\left(1-\frac{2}{x}-\left(\frac{2x+x^2}{4+2x+x^2}+\frac{2x-x^2}{4-2x+x^2}\right):\right.$

$\left.:\left(\frac{16-8x}{4-2x+x^2}-\frac{16+8x}{4+2x+x^2}\right)\right)^{1/2}$.

2.333. $\left(\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-4\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+12\right)^{1/4}:(z-1)$.

2.334. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, $x=\frac{2}{a+\frac{1}{a}}$.

2.335. $\frac{\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}}$, $z=\frac{2a}{a^2+1}$.

2.336. $\frac{\sqrt{x^3+2x^2y}+\sqrt{x^4+2yx^3}-(x^{3/2}+x^2)}{\sqrt{2\left(x+y-\sqrt{x^2+2xy}\right)\cdot(x^{2/3}-x^{5/6}+x)}}$.

2.337. $\dfrac{\sqrt[3]{(a-3)+3\left(\sqrt[3]{9a}-\sqrt[3]{3a^2}\right)}}{\sqrt{2^{-2}-\frac{3}{2}a^{-1}+\left(\frac{3}{2a}\right)^2:\left(\sqrt[3]{9}+a^{2/3}+\sqrt[3]{3a}\right)}}$,

2.338. $\dfrac{\sqrt[3]{(8x-y)-6\left(2\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right)\cdot\left(4x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+y^{2/3}\right)}}{8x\sqrt[3]{y}-y^{4/3}}$.

2.339. $\left(\dfrac{a}{3(a^2+1)^{1/2}}-\left(2a^2+1+a\sqrt{4a^2+3}\right)^{1/2}\times\right.$

$\left.\times\left(2a^2+3+a\sqrt{4a^2+3}\right)^{-1/2}\right)^2$.

2.340. $\dfrac{\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}-\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt[3]{(1+3x)+\sqrt{x}(3+x)}-\sqrt[3]{\sqrt{x}(3+x)-(1+3x)}}$.

2.341. $\dfrac{\sqrt[3]{2(4+3x)+\sqrt{x}(12+x)}+\sqrt[3]{2(4+3x)-\sqrt{x}(12+x)}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}}$.

2.342. $\dfrac{\left(2x+5+4\sqrt{2x+1}\right)^{-1/2}+\left(2x+5-4\sqrt{2x+1}\right)^{-1/2}}{\left(2x+5+4\sqrt{2x+1}\right)^{-1/2}-\left(2x+5-4\sqrt{2x+1}\right)^{-1/2}}$.

2.343. $\dfrac{\sqrt{4\left(x-\sqrt{y}\right)+yx^{-1}}\cdot\sqrt{9x^2+6\sqrt[3]{2yx^3}+\sqrt[3]{4y^2}}}{6x^2+2\sqrt[3]{2yx^3}-3\sqrt{yx^2}-\sqrt[6]{4y^5}}$.

2.344. $\sqrt{\dfrac{1}{6}\left(\left(3t+\sqrt{6t-1}\right)^{-1}+\left(3t-\sqrt{6t-1}\right)^{-1}\right)}\times$

$\times|t-1|\cdot t^{-1/2}$.

2.345. $\sqrt[4]{(x^2+4x^{-2})^2-8(x+2x^{-1})^2+48}\cdot(x^2-2)^{-1}$.

2.346. $\left(\dfrac{x^2+x-2\sqrt{x}+6}{x+2\sqrt{x}+3}-1\right)^{1/2}$.

2.347. $\sqrt{x(x^{-1}+4x-4)^{-1}}-\dfrac{2x^2}{|2x-1|}$.

2.348. $\left|\dfrac{|x-2|+4}{x-2}\right|\cdot(x^2-4)$.

2.349. $\left(\dfrac{x^3+x^4-x^2\sqrt{2}+2}{x^4-x^2\sqrt{2}+1}+x^2\sqrt{2}\right)^{1/2}$.

2.350. $\dfrac{|2x-3|+6}{2x-3}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x}\cdot(9x^{-1}+4x-12)}$.

2.351. $\dfrac{x^8+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3}+2x^2-2$.

2.352. $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+4}}{x^{1/2}-(x-3)^{1/2}-\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{x^2-9}}-$

$$-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}.$$

2.353. $\left(3a+\sqrt{6a-1}\right)^{-1/2}+\left(3a-\sqrt{6a-1}\right)^{-1/2}$.

2.354. $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt{1+2p}-\sqrt{1-2p}}+\dfrac{1-2p}{\sqrt{1-4p^2}+2p-1}}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{4p^2}-1}-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1}}$.

2.355. $\sqrt{\dfrac{a-8\sqrt[6]{a^3b^2}+4\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}+2\sqrt[12]{a^3b^2}}+3\sqrt[3]{b}}$.

2.356. $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}}}$.

2.357. $\dfrac{\sqrt{3}\,x^{3/2}-5x^{1/3}+5x^{4/3}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+10\sqrt{3}\cdot x^{5/6}+25x^{2/3}}\cdot\sqrt{1-2x^{-1}+x^{-2}}}$.

2.358. $\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}$.

2.359. $\dfrac{(x+2)\cdot\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}$.

2.360. $\dfrac{\sqrt{16z^2+z^{-2}-8}}{(2z-1)\cdot(4z^3-2z^2+z)^{-1}}-(z^3+1)$.

2.361. Разложить на множители

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2).$$

2.362. Показать, что из соотношения

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

следует
$$\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}} \quad (n \in Z).$$

2.363. Доказать тождество
$$p^3=\left(p\cdot\frac{p^3-2q^3}{p^3+q^3}\right)^3+\left(q\cdot\frac{2p^3-q^3}{p^3+q^3}\right)^3+q^3.$$

2.364. Исключить m, n и p из равенств
$$a=b\,\frac{n}{p}+c\,\frac{p}{n},\quad b=c\,\frac{p}{m}+a\,\frac{m}{p},\quad c=a\,\frac{m}{n}+b\,\frac{n}{m}.$$

2.365. Исключить m и n из равенств
$$a=m+n,\quad b^3=m^3+n^3,\quad c^5=m^5+n^5.$$

Глава 3

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Группа А

Доказать тождества (3.001—3.062):

3.001. $(1+\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)(1-\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)=2\operatorname{tg}2\alpha.$

3.002. $\left[\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)\right]\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)=1.$

3.003. $\dfrac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)}=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right).$

3.004. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}3\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}3\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta}.$

3.005. $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos6\alpha+\cos7\alpha=$

$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5}{2}\alpha\cdot\cos4\alpha.$$

3.006. $\sin9\alpha+\sin10\alpha+\sin11\alpha+\sin12\alpha=$

$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{21}{2}\alpha.$$

3.007. $\cos2\alpha-\cos3\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha=$

$$=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{7}{2}\alpha.$$

3.008. $\sin4\alpha-\sin5\alpha-\sin6\alpha+\sin7\alpha=$

$$=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{11}{2}\alpha.$$

3.009. $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos3\alpha+\sin3\alpha=$

$$=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right).$$

3.010. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{ctg}3\alpha=\dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin6\alpha}.$

3.011. $(\sin\alpha)^{-1}+(\operatorname{tg}\alpha)^{-1}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}.$

3.012. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)}{1-\sin(3\alpha-\pi)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{3}{2}\alpha\right).$

3.013. $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha.$

3.014. $2\sin^2(3\pi-2\alpha)\cos^2(5\pi+2\alpha)=$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{5}{2}\pi-8\alpha\right).$$

3.015. $\sin 2\alpha\,(1+\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha)+\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha+$
$$+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

3.016. $1-\sin 4\alpha+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{4}\pi-2\alpha\right)\cos 4\alpha=0.$

3.017. $\sin^6\dfrac{\alpha}{2}-\cos^6\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha.$

3.018. $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=$
$$=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha.$$

3.019. $\dfrac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}=\operatorname{tg}\alpha.$

3.020. $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha.$

3.021. $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{14}{3}\pi\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{8}{3}\pi\right)=0.$

3.022. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

3.023. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

3.024. $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha)(\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha)}=1.$

3.025. $\dfrac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right).$

3.026. $\cos^2(\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)=\dfrac{1}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}-$
$$-\cos^2(\alpha+180^\circ).$$

3.027. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)}=\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)-1}$.

3.028. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cos^{-1}2\beta-\operatorname{tg}2\beta\cos^{-1}2\alpha}{\cos^{-1}2\alpha+\cos^{-1}2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

3.029. $2\left[\sin^{-1}4\alpha-\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi}{2}+4\alpha\right)\right]+\operatorname{tg}(5\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$.

3.030. $\sin^2\left(\dfrac{15}{8}\pi-2\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{17}{8}\pi-2\alpha\right)=-\dfrac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

3.031. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=$

$$=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

3.032. $\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}-2\alpha\right)=\dfrac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

3.033. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha$.

3.034. $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}}$.

3.035. $\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$.

3.036. $\sin^2 2\alpha-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$.

3.037. $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$.

3.038. $\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha}=1$.

3.039. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=-1$.

3.040. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}=2$.

3.041. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha$.

3.042. $\cos^2(45^\circ-\alpha)\cos^2(60^\circ+\alpha)-$

$$-\cos 75^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)=\sin 2\alpha.$$

3.043. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

3.044. $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$.

3.045. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha} - \cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha = \sin 8\alpha.$

3.046. $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha.$

3.047. $\operatorname{ctg}(45^\circ + 2\alpha) = \dfrac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha}.$

3.048. $\dfrac{(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + 1)(\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha + 1)}{(\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 1)(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1)} = 1.$

3.049. $\left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right)^2 = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}.$

3.050. $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) -$

$- \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha.$

3.051. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1.$

3.052. $\dfrac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$

3.053. $\sin\alpha \cdot \sin(x - \alpha) + \sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \alpha\right) = \sin^2\dfrac{x}{2}.$

3.054. $\cos^2\alpha - \sin^2 2\alpha = \cos^2\alpha \cdot \cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

3.055. $\dfrac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha} - 2(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha) - 1 = 0.$

[3.056.] $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta).$

3.057. $\cos^4 x + \sin^2 y + \dfrac{1}{4}\sin^2 2x - 1 = \sin(y + x)\sin(y - x).$

3.058. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(2\pi - 2\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - 2\alpha\right) - \operatorname{tg}\alpha} - 2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) \times$

$\times \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right).$

3.059. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi + 2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) \times$

$\times \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right).$

3.060. $\operatorname{tg} 4\alpha + \cos^{-1} 4\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}.$

3.061. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=2\cos^{-2}\alpha.$

3.062. $1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\cos 2\alpha=\cos^2\alpha+\cos^4\alpha.$

Упростить выражения (3.063—3.113):

3.063. $1-\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\dfrac{\alpha}{4}+\sin^2\dfrac{\alpha}{4}.$

3.064. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\cdot\operatorname{ctg}\left(\alpha-\dfrac{5}{4}\pi\right)}+\cos^2\alpha.$

3.065. $\dfrac{\cos^2\left(\pi+\dfrac{\alpha}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{3}{2}\alpha\right)\right)}{\sin^{-1}\left(\dfrac{9}{2}\pi+\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{5}{2}\pi-\dfrac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3}{4}\alpha-\dfrac{7}{2}\pi\right)\right)}.$

3.066. $\dfrac{\sin\left(2\pi+\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\dfrac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\dfrac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{8}+\cos\left(\dfrac{7}{2}\pi-\dfrac{\alpha}{4}\right)}.$

3.067. $\cos\alpha\,(1+\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(1-\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha).$

3.068. $\sin^2\alpha\,(1+\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha).$

3.069. $\dfrac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}.$

3.070. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}.$

3.071. $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-2\beta\right).$

3.072. $\dfrac{\cos^{-1}2x+\sin 2x\operatorname{tg}2x}{1+\cos 4x}+\dfrac{1}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}.$

3.073. $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1.$

3.074. $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1.$

3.075. $(\cos\alpha-\cos 2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin 2\beta)^2.$

3.076. $\dfrac{(1-\cos 2\alpha)\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-\sin 4\alpha}.$

3.077. $\cos^2\left(\dfrac{3}{8}\pi-\dfrac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\dfrac{11}{8}\pi+\dfrac{\alpha}{4}\right).$

3.078. $\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(135^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

3.079. $\frac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$. 3.080. $\frac{\cos m\alpha-\cos n\alpha}{\sin n\alpha-\sin m\alpha}$.

3.081. $\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^{-2}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

3.082. $1-\frac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$.

3.083. $\frac{\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\beta+\operatorname{tg}\beta\cos^{-1}\alpha}$.

3.084. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^3\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}$.

3.085. $1-\frac{1}{1-\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$. 3.086. $\frac{1-\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha}$.

3.087. $\frac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$.

3.088. $\frac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)}$.

3.089. $\frac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha+90^\circ)-1}+\frac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha-90^\circ)-1}$.

3.090. $\frac{[1+\operatorname{tg}^2(\alpha-90^\circ)][\sin^{-2}(\alpha-270^\circ)-1]}{[1+\operatorname{ctg}^2(\alpha+270^\circ)]\cos^{-2}(\alpha+90^\circ)}$.

3.091. $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$.

3.092. $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. 3.093. $\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}$.

3.094. $\dfrac{\cos^2(2\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(90^\circ+2\alpha)+1}{\sin^2(2\alpha-270^\circ)+\operatorname{tg}^2(270^\circ+2\alpha)+1}$.

3.095. $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}$.

3.096. $\dfrac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}+\dfrac{1-\cos(4\alpha-\pi)}{\sin^3 2\alpha}-$

$-\dfrac{1}{2\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.097. $\dfrac{\cos^2\alpha+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^3(\alpha-4\pi)}+\dfrac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha\,(4\sin\alpha+1)}$.

3.098. $\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(2\alpha-\frac{8}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\alpha\right)$.

3.099. $\dfrac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-4+4\sin^2\alpha}$.

3.100. $\sin^2\left(\frac{9}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17}{8}\pi-\alpha\right)$.

3.101. $\operatorname{ctg}(4\alpha-\pi)\left(\cos^4\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{9}{4}\pi-2\alpha\right)\right)$.

3.102. $\dfrac{\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\sin\alpha}$.

3.103. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)}$. 3.104. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}$.

3.105. $\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}$.

3.106. $\dfrac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.107. $\dfrac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}$.

3.108. $\dfrac{4\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

3.109. $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-\beta)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}$.

3.110. $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$.

3.111. $\dfrac{\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+4\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)-4}{1+\cos(4\alpha-\pi)-8\sin^2(5\pi-\alpha)}$.

3.112. $\dfrac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)\left(2\sin\frac{\pi-\alpha}{2}+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)}$.

3.113. $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

Преобразовать в произведение (привести к виду, удобному для логарифмирования) (**3.114—3.147**):

3.114. $\sin 4\alpha-2\cos^2 2\alpha+1$. **3.115.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2$.

3.116. $\cos^{-4}\alpha-\sin^{-4}\alpha$. **3.117.** $\dfrac{\operatorname{tg}^4\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha}{\operatorname{ctg}^4\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

3.118. $1-3\operatorname{tg}^2(\alpha+270^\circ)$. **3.119.** $1-3\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)$.

3.120. $\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$.

3.121. $3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ)$.

3.122. $\sin^2(\alpha+90^\circ)-3\cos^2(\alpha-90^\circ)$.

3.123. $\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

3.124. $3-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$. **3.125.** $3-4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

3.126. $1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+3\alpha\right)$.

3.127. $1+\cos(2\alpha+270^\circ)+\sin(2\alpha+450^\circ)$.

3.128. $1-\cos(2\alpha-270^\circ)+\sin(2\alpha+270^\circ)$.

3.129. $\sin\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-1$.

3.130. $1-\cos(2\alpha-\pi)-\cos(4\alpha+\pi)+\cos(6\alpha-2\pi)$.

3.131. $1+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-4\alpha\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)$.

3.132. $\frac{\sin\alpha-2\cos3\alpha-\sin5\alpha}{\cos\alpha-2\sin3\alpha-\cos5\alpha}$.

3.133. $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)-1$.

3.134. $\frac{\sin4\alpha+\sin5\alpha+\sin6\alpha}{\cos4\alpha+\cos5\alpha+\cos6\alpha}$.

3.135. $-\cos5\alpha\cos4\alpha-\cos4\alpha\cos3\alpha+2\cos^2 2\alpha\cos\alpha$.

3.136. $\sin10\alpha\sin8\alpha+\sin8\alpha\sin6\alpha-\sin4\alpha\sin2\alpha$.

3.137. $\frac{\cos7\alpha-\cos8\alpha-\cos9\alpha+\cos10\alpha}{\sin7\alpha-\sin8\alpha-\sin9\alpha+\sin10\alpha}$.

3.138. $\sin5\alpha-\sin6\alpha-\sin7\alpha+\sin8\alpha$.

3.139. $\cos3\alpha-\cos4\alpha-\cos5\alpha+\cos6\alpha$.

3.140. $\frac{\sin13\alpha+\sin14\alpha+\sin15\alpha+\sin16\alpha}{\cos13\alpha+\cos14\alpha+\cos15\alpha+\cos16\alpha}$

3.141. $\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha$.

3.142. $\sin5\alpha+\sin6\alpha+\sin7\alpha+\sin8\alpha$.

3.143. $\cos5\alpha+\cos8\alpha+\cos9\alpha+\cos12\alpha$.

3.144. $3+4\cos4\alpha+\cos8\alpha$.

3.145. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}$, $0<\alpha<\pi/2$.

3.146. $1+\sin2\alpha-\cos2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha$.

3.147. $\sin2\alpha+\sin4\alpha-\sin6\alpha$.

Проверить равенства (3.148 — 3.152):

3.148. $(\sin160^\circ+\sin40^\circ)(\sin140^\circ+\sin20^\circ)+$

$+(\sin50^\circ-\sin70^\circ)(\sin130^\circ-\sin110^\circ)=1$

3.149. $(\cos 34^\circ)^{-1}+(\operatorname{tg} 56^\circ)^{-1}=\operatorname{ctg} 28^\circ$.

3.150. $\dfrac{\cos 28^\circ \cos 56^\circ}{\sin 2^\circ}+\dfrac{\cos 2^\circ \cos 4^\circ}{\sin 28^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}\sin 38^\circ}{4\sin 2^\circ\cdot\sin 28^\circ}$.

3.151. $1-2\sin 50^\circ=\dfrac{1}{2\cos 160^\circ}$.

3.152. $(\cos 70^\circ+\cos 50^\circ)(\cos 310^\circ+\cos 290^\circ)+$
$+(\cos 40^\circ+\cos 160^\circ)(\cos 320^\circ-\cos 380^\circ)=1$.

Вычислить (**3.153—3.166**):

3.153. $\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$.

3.154. $\operatorname{tg} 435^\circ+\operatorname{tg} 375^\circ$. **3.155.** $\operatorname{tg} 255^\circ-\operatorname{tg} 195^\circ$.

3.156. $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-2\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\right)$. **3.157.** $\operatorname{ctg}\dfrac{13}{12}\pi-\operatorname{ctg}\dfrac{5}{12}\pi$.

3.158. $\sin\left(2\alpha+\dfrac{5}{4}\pi\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{3}$.

3.159. $\cos\left(2\alpha+\dfrac{7}{4}\pi\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{2}{3}$.

3.160. $\dfrac{5}{6+7\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}2$.

3.161. $\dfrac{2}{3+4\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}2$.

3.162. $\sin\alpha$, если $\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}=1{,}4$.

3.163. $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=p$.

3.164. $2-13\cos 2\alpha+\sin^{-1}2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-1/5$.

3.165. $1+5\sin 2\alpha-3\cos^{-1}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$.

3.166. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-\alpha\right)$,

если $\operatorname{tg}\left(\dfrac{7}{2}\pi+2\alpha\right)=\dfrac{9}{11}$.

3.167. Найти угол α, удовлетворяющий неравенствам $\pi/2<\alpha<\pi$, если известно, что $\operatorname{tg} 2\alpha=-12/5$.

3.168. Доказать, что если A и B — острые углы некоторого прямоугольного треугольника, то

$$\sin 2A+\sin 2B=4\sin A\sin B.$$

3.169. Найти угол β, удовлетворяющий неравенствам $\pi/2<\beta<\pi$, если известно, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=9/19$ и $\operatorname{tg}\alpha=-4$.

3.170. Найти $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=1/2$.

3.171. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=3/4$, $\operatorname{ctg}\beta=1/7$, $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$. Найти $\alpha+\beta$.

3.172. Для угла α известно, что $\sin(\alpha-90°)=-2/3$ и $270°<\alpha<360°$. Найти $\operatorname{ctg}2\alpha$.

3.173. Доказать, что если α и β удовлетворяют неравенствам $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$ и $\cos\alpha=7/\sqrt{50}$, $\operatorname{tg}\beta=1/3$, то $\alpha+2\beta=\pi/4$.

3.174. Для угла α известно, что $\cos(\alpha-90°)=0{,}2$ и $90°<\alpha<180°$. Найти $\operatorname{tg}2\alpha$.

3.175. Доказать, что если α и β удовлетворяют неравенствам $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi/2$ и $\operatorname{tg}\alpha=5$, $\operatorname{ctg}\beta=2/3$, то $\alpha+\beta=3\pi/4$.

3.176. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=4$, $\operatorname{ctg}\beta=5/3$, $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$. Найти $\alpha+\beta$.

3.177. Известно, что $\alpha+\beta=3\pi/4$. Вычислить

$$(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta).$$

3.178. Известно, что $\alpha+\beta=\pi/4$. Вычислить

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta).$$

3.179. Доказать, что если $\sin\alpha=\sqrt{21}/7$, $\sin\beta=\sqrt{21}/14$ и α, β — углы острые, то $\alpha+\beta=60°$.

3.180. Доказать, что $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$ есть точный квадрат.

3.181. Исключить α из следующих равенств:

$$x=\operatorname{tg}^2\alpha,\quad y=\sin^2\alpha.$$

3.182. Доказать, что тангенс разности двух взаимно дополнительных (до прямого) углов вдвое меньше разности тангенсов этих углов.

3.183. Известно, что величины α, β, γ составляют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\beta.$$

3.184. Дана дробь

$$\frac{5}{1+\sqrt[3]{32\cos^4 15^\circ-10-8\sqrt{3}}}.$$

Преобразовать подкоренное выражение к более простому виду, после чего дробь сократить.

3.185. Если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=a$, то чему равна сумма $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha$?

Группа Б

Доказать тождества (3.186—3.239):

3.186. $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2}{3}$.

3.187. $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

3.188. $\sin^{-1}2\alpha\sin^{-1}(60^\circ-2\alpha)\sin^{-1}(60^\circ+2\alpha)=$
$=4\sin^{-1}6\alpha$.

3.189. $\dfrac{\cos 6\alpha-\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}{\sin 6\alpha-\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}=\operatorname{ctg}\dfrac{15}{2}\alpha$.

3.190. $$\frac{\sin^2(3\pi-4\alpha)+4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)-4}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)-4\cos^2\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$$

3.191. $$\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos^{-2}\frac{\alpha}{4}\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\right)}=\frac{1}{8}.$$

3.192. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)\cos^{-1}\alpha-2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)(1+\sin(4\pi+\alpha))\cos^{-1}\alpha+2\cos 2\alpha}=$$
$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

3.193. $$\frac{2\cos\left(\frac{1}{6}\pi-2\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{9}{2}\pi-2\alpha\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\sqrt{3}}.$$

3.194. $$\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha-1=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.195. $$1+\operatorname{ctg}\alpha+\sin^{-1}\alpha=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.196. $$\frac{(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}=-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

3.197. $$\frac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha-\pi)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}-3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)=$$
$$=4\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right).$$

3.198. $$\frac{4\cos^2(\alpha-\pi)-4\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+3\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)}=$$
$$=\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}.$$

3.199. $$1-\cos(2\alpha-\pi)+\cos(4\alpha-2\pi)=$$
$$=4\cos2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).$$

3.200. $$\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)\times$$
$$\times\sin^{-2}\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)=2.$$

3.201. $$\frac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-1}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

3.202. $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3}{4}\pi\right)(1-\sin 2\alpha)=\cos 2\alpha.$

3.203. $\frac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha+\sin 4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha.$

3.204. $\operatorname{ctg}\left(4\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-1}(4\alpha-3\pi)=\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$

3.205. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-$

$-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$

3.206. $\frac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\frac{\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}.$

3.207. $3-4\cos(4\alpha-3\pi)-\cos(5\pi+8\alpha)=8\cos^4 2\alpha.$

3.208. $\frac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha.$

3.209. $\frac{3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}{3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha}=\operatorname{ctg}^4 2\alpha.$

3.210. $3+4\sin\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(8\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)=8\sin^4 2\alpha.$

3.211. $\cos^{-6}\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha=3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^{-2}\alpha+1.$

3.212. $\frac{1-2\sin^2 2\alpha}{1-\sin 4\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg} 2\alpha}.$

3.213. $\frac{\sin^2(135^\circ-\alpha)-\sin^2(210^\circ-\alpha)-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-2\alpha)}{\cos^2(225^\circ+\alpha)-\cos^2(210^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)}=$

$=-1.$

3.214. $\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$

3.215. $\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta-\frac{2\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+2=\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

3.216. $\sin 2\alpha(2\cos 4\alpha+1)\operatorname{ctg}(30^\circ-2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ+2\alpha)=$

$=\sin 6\alpha\operatorname{ctg} 2\alpha\operatorname{tg} 6\alpha.$

3.217. $\sin(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\alpha\right)\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha.$

3.218. $\frac{\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 6\alpha+\cos 7\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}=\operatorname{tg}\frac{15}{2}\alpha.$

3.219. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}.$

3.220. $\dfrac{1+\cos(2\alpha-2\pi)+\cos(4\alpha+2\pi)-\cos(6\alpha-\pi)}{\cos(2\pi-2\alpha)+2\cos^2(2\alpha+\pi)-1}=2\cos 2\alpha.$

3.221. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha.$

3.222. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha=4\operatorname{ctg}4\alpha.$

3.223. $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)-$

$-2\cos^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi=\cos 2\alpha.$

3.224. $\sin^2\varphi-\cos^2(\alpha-\varphi)+$

$+2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\cos^2\alpha.$

3.225. $\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\varphi)-$

$-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)=\sin^2\alpha.$

3.226. $\operatorname{tg}6\beta-\operatorname{tg}4\beta-\operatorname{tg}2\beta=\operatorname{tg}6\beta\operatorname{tg}4\beta\operatorname{tg}2\beta.$

3.227. $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\frac{9}{2}\pi\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right)\left(1-\cos\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)\right)}=\operatorname{tg}4\alpha.$

3.228. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left(1+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)\right)}{\cos\left(2\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)}=\operatorname{ctg}2\alpha.$

3.229. $\dfrac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cdot\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}=-1.$

3.230. $\operatorname{tg}4\alpha-\cos^{-1}4\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}.$

3.231. $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\dfrac{1}{8}(5+3\cos 4\alpha).$

3.232. $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\dfrac{1}{4}\cos 2\alpha(3+\cos 4\alpha).$

3.233. $\operatorname{ctg}(30^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(150^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha.$

3.234. $4\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=\cos 6\alpha.$

3.235. $\dfrac{1-2\cos^2 2\alpha}{2\,\mathrm{tg}\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)}=1.$

3.236. $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin 5\alpha.$

3.237. $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}.$

3.238. $1+\sin\left(3\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\cos 2\alpha+$

$$+2\sin 3\alpha\cos(3\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)=2\sin^2\frac{5\alpha}{2}.$$

3.239. $(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta).$

Упростить выражения (3.240—3.284):

3.240. $\sqrt{\left(1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1\right)}.$

3.241. $\sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}},\ 90^\circ<\alpha<135^\circ.$

3.242. $\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)^2-\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$

3.243. $(\cos 8\alpha\,\mathrm{tg}\,4\alpha-\sin 8\alpha)(\cos 8\alpha\,\mathrm{ctg}\,4\alpha+\sin 8\alpha).$

3.244. $\sin^2 2\alpha+\sin^2\beta+\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta).$

3.245. $\dfrac{\sin(2\alpha-3\pi)+2\cos\left(\dfrac{7}{6}\pi+2\alpha\right)}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)+\sqrt{3}\cos(2\alpha-3\pi)}.$

3.246. $\dfrac{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha+\cos 10\alpha-\cos 14\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 6\alpha+\sin 10\alpha+\sin 14\alpha}.$

3.247. $\left(1-\mathrm{ctg}^2\left(\dfrac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)\times$

$$\times\,\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$$

3.248. $\dfrac{4\sin(\pi-2x)\cdot\sin^2\left(\dfrac{3}{2}\pi+x\right)}{1+\cos 8x}+$

$$+\frac{\sin 3x\cos x+3\sin x\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 4x}.$$

3.249. $$\frac{4\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}-1.$$

3.250. $$\frac{(1+\operatorname{tg}2\alpha)^2-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1.$$

3.251. $$\frac{\sin(80^\circ+4\alpha)}{4\sin(20^\circ+\alpha)\sin(70^\circ-\alpha)}.$$

3.252. $$\frac{\cos^2(4\alpha-3\pi)-4\cos^2(2\alpha-\pi)+3}{\cos^2(4\alpha+3\pi)+4\cos^2(2\alpha+\pi)-1}.$$

3.253. $$\frac{\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}.$$

3.254. $$4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-4\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\times$$
$$\times\cos^3\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right).$$

3.255. $\cos^4 2\alpha-6\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha+\sin^4 2\alpha.$

3.256. $$\frac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)+1}.$$

3.257. $$\frac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{5}{2}\pi\right)-4+4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3.258. $$\cos^{-2}4\alpha-\operatorname{tg}^2(3\pi+4\alpha)-2\cos^2\alpha-$$
$$-\sqrt{3}\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right).$$

3.259. $$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}.$$

3.260. $$\frac{4\sin^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^4\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)+\cos^4\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)-1}.$$

3.261. $\dfrac{\sin\left(4\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)}{1+\cos\left(4\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.262. $(\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}555^\circ)(\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}195^\circ)$.

3.263. $\dfrac{\operatorname{tg}615^\circ-\operatorname{tg}555^\circ}{\operatorname{tg}795^\circ+\operatorname{tg}735^\circ}$.

3.264. $\dfrac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)-\cos(2x-5\pi)\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)\cos 4x+\sin x\cos\left(\frac{5\pi}{2}+4x\right)}$.

3.265. $\sin(2x-\pi)\cos(x-3\pi)+$

$$+\sin\left(2x-\frac{9\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

3.266. $\sin(x+2\pi)\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+$

$$+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin\left(2x-\frac{5\pi}{2}\right).$$

3.267. $\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos^{-2}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}$.

3.268. $\sqrt[3]{\dfrac{\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^{-1}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}}$.

3.269. $\dfrac{3\cos^2(\alpha+270^\circ)-\sin^2(\alpha-270^\circ)}{3\sin^2(\alpha-90^\circ)-\cos^2(\alpha+90^\circ)}$.

3.270. $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha}{\sin 4\alpha+2\sin^2 2\alpha-1}$.

3.271. $\sqrt{(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)(\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1)}$.

3.272. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$.

3.273. $\cos^6\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^6\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-$

$$-\frac{3}{4}\left(\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2.$$

3.274. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}+\dfrac{\sin^2\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

3.275. $\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}}$,

если: 1) $0<\alpha<\pi$; 2) $\pi<\alpha<2\pi$.

3.276. $\cos^2(45^\circ+\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+$

$+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)$

3.277. $\sin^2(135^\circ-2\alpha)-\sin^2(210^\circ-2\alpha)-$

$-\sin 195^\circ\cos(165^\circ-4\alpha)$.

3.278. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$,

если: 1) $90^\circ<\alpha<180^\circ$; 2) $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

3.279. $\left(1+\cos\dfrac{\alpha-3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi-\alpha}{4}$.

3.280. $\dfrac{\sin^2 4\alpha+4\sin^4 2\alpha-4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{4-\sin^2 4\alpha-4\sin^2 2\alpha}$.

3.281. $\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi+4\alpha\right)-\sin^6\left(\dfrac{5}{2}\pi+2\alpha\right)+\cos^6\left(\dfrac{7}{2}\pi-2\alpha\right)$.

3.282. $\dfrac{(\sin 8\alpha+\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha)}{(\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 10\alpha+\cos 11\alpha)}\times$

$\times\dfrac{(\cos 8\alpha-\cos 9\alpha-\cos 10\alpha+\cos 11\alpha)}{(\sin 8\alpha-\sin 9\alpha-\sin 10\alpha+\sin 11\alpha)}$.

3.283. $\cos(270^\circ-2\alpha)\operatorname{ctg}(30^\circ-2\alpha)\operatorname{tg}(240^\circ-2\alpha)\times$

$\times(2\cos 4\alpha-1)$.

3.284. $\left(\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right)\right)\right)\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

Преобразовать в произведение (привести к виду, удобному для логарифмирования) (3.285—3.331):

3.285. $\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}$.

3.286. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha+1-2\cos^2 2\alpha$.

3.287. $3-4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha-8\cos^4 2\alpha$.

3.288. $\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x+3$.

3.289. $\operatorname{tg}^4 x-4\operatorname{tg}^2 x+3$. 3.290. $6\sin^2 2\alpha-1-\cos 4\alpha$.

3.291. $\sqrt{1+\sin\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$,

если $0° < \alpha \leqslant 180°$.

3.292. $2\cos^2 2\alpha+3\cos 4\alpha-3$.

3.293. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta)$.

3.294. $\dfrac{\sin(2\alpha-\beta)}{\cos 4\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos 2\alpha}$.

3.295. $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$.

3.296. $\sin^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\alpha-\cos^2 2\beta$.

3.297. $\sin^2(2\alpha-\beta)-\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta$.

3.298. $2+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi+\alpha}{4}\right)\left(1+\cos\frac{\alpha-\pi}{2}\right)\cos^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}-2\pi\right)-$

$-4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)$.

3.299. $2-\dfrac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha-\cos^4 2\alpha}$. **3.300.** $2-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha$.

3.301. $\dfrac{2\cos^2 2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)}-$

$-\operatorname{tg}2\alpha+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha$.

3.302. $\dfrac{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}2\alpha}$.

3.303. $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$.

3.304. $1+\cos\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-$

$-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)$.

3.305. $4\cos^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos(2\alpha-\pi)+$

$+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)$.

3.306. $\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}$,

если: 1) $0° < \alpha < 90°$; 2) $90° < \alpha < 180°$.

3.307. $2\sin^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-\dfrac{4\operatorname{tg}2\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\sin 8\alpha\,(1+\operatorname{tg}^2 2\alpha)^2}$.

3.308. $\cos^2(\alpha-2\beta)-\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2(2\beta-\pi)$.

3.309. $1-\cos(\pi-8\alpha)-\cos(\pi+4\alpha)$.

3.310. $\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha$.

3.311. $\sin^3\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos^3\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)+$

$$+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right).$$

3.312. $2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1$.

3.313. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{9}{2}\pi-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\dfrac{5}{2}\pi\right)-1}{1+\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(6\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)}$.

3.314. $\dfrac{\cos 2\alpha-\sin 4\alpha-\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha+\sin 4\alpha-\cos 6\alpha}$.

3.315. $\cos 2\alpha+\sin 4\alpha-\cos 6\alpha$.

3.316. $\sin^2\left(\dfrac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{5}{4}\pi+2\alpha\right)$.

3.317. $\dfrac{\cos^{-1}\left(\alpha+\dfrac{5}{2}\pi\right)-\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)}{\sin^{-1}\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)+\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi-\alpha\right)}$.

3.318. $\dfrac{3\operatorname{tg}^2(\alpha+3\pi)-1}{1-3\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\dfrac{5}{2}\pi\right)}$.

3.319. $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha$.

3.320. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{5}{4}\pi+\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}-$

$$-\operatorname{tg}\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right).$$

3.321. $\cos^2\left(\dfrac{5}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{15}{8}\pi+\alpha\right)$.

3.322. $\dfrac{2\cos^2\left(\frac{9}{4}\pi-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}-\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{7}{4}\pi\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right).$

3.323. $\sin\alpha\sin^2(\alpha-270^\circ)(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+$
$+\cos\alpha\cos^2(\alpha+270^\circ)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha).$

3.324. $\sin 2\alpha+\cos 4\alpha-\sin 6\alpha.$

3.325. $\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha.$ **3.326.** $\cos^2\frac{n\alpha}{2}-\sin^2\frac{m\alpha}{2}.$

3.327. $1+\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^{-1}\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right).$

3.328. $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)+2\cos\left(\frac{11}{6}\pi-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}.$

3.329. $\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi+2\alpha\right).$

3.330. $\sin\alpha-\left(\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\right)^2.$

3.331. $\operatorname{tg}210^\circ+\operatorname{ctg}210^\circ+\operatorname{tg}220^\circ+\operatorname{ctg}220^\circ.$

Проверить равенства **(3.332—3.354):**

3.332. $\dfrac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ-\sin 39^\circ\cos 21^\circ}=-1.$

3.333. $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}=1.$

3.334. $\dfrac{\cos 63^\circ\cos 3^\circ-\cos 87^\circ\cos 27^\circ}{\cos 132^\circ\cos 72^\circ-\cos 42^\circ\cos 18^\circ}=-\operatorname{tg}24^\circ.$

3.335. $\dfrac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cos 41^\circ-\cos 49^\circ\cos 19^\circ}=-1.$

3.336. $\dfrac{\cos 66^\circ\cos 6^\circ+\cos 84^\circ\cos 24^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\cos 85^\circ\cos 25^\circ}=1.$

3.337. $\sin^2 70^\circ\sin^2 50^\circ\sin^2 10^\circ=1/64.$

3.338. $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$ **3.339.** $\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}.$

3.340. $\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ$.

3.341. $\dfrac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ} = 3$.

3.342. $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3.343. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 1/16$.

3.344. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 3/16$.

3.345. $\sin \dfrac{3\pi}{10} - \sin \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{1}{2}$.

3.346. $\operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ = \dfrac{8}{\sqrt{3}} \cos 20^\circ$.

3.347. $8 \cos \dfrac{4\pi}{9} \cos \dfrac{2\pi}{9} \cos \dfrac{\pi}{9} = 1$.

3.348. $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ +$

$+ \operatorname{ctg} 15^\circ = 8$.

3.349. $\dfrac{\sin\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\alpha - \frac{5}{2}\pi\right)} = 1$.

3.350. $\cos 70^\circ + 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2 \cos^2 35^\circ$.

3.351. $1 - \cos\left(\dfrac{3}{2}\pi - 3\alpha\right) - \sin^2 \dfrac{3}{2}\alpha + \cos^2 \dfrac{3}{2}\alpha =$

$= 2\sqrt{2} \cos \dfrac{3}{2}\alpha \sin\left(\dfrac{3}{2}\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.352. $\dfrac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi - 4\alpha) - \cos\left(\frac{5}{2}\pi + 6\alpha\right)}{4 \sin(5\pi - 3\alpha) \cos(\alpha - 2\pi)} = \cos 2\alpha$.

3.353. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$.

3.354. $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ$.

Вычислить (3.355—3.361):

3.355. $\sin^4 \dfrac{\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{3\pi}{8} + \sin^4 \dfrac{5\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{7\pi}{8}$.

3.356. $\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ$.

3.357. $\cos \dfrac{3\pi}{5} \cos \dfrac{6\pi}{5}$.

3.358. $\dfrac{\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \cos 82^\circ \cos 22^\circ}{\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 67^\circ \cos 37^\circ}$.

3.359. $\dfrac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 69^\circ \cos 9^\circ + \cos 81^\circ \cos 21^\circ}$.

3.360. $\dfrac{\cos 67^\circ \cos 7^\circ - \cos 83^\circ \cos 23^\circ}{\cos 128^\circ \cos 68^\circ - \cos 38^\circ \cos 22^\circ} - \operatorname{tg} 164^\circ$.

3.361. $\dfrac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ}$.

3.362. Вычислить $\dfrac{6\sin\alpha - 7\cos\alpha + 1}{8\sin\alpha + 9\cos\alpha - 1}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 4$.

3.363. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} - x\right)$,

если $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{2}\pi + x\right) = \dfrac{3}{4}$.

3.364. Вычислить $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ и $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, если $\sin\alpha + \sin\beta = -\dfrac{21}{65}$; $\cos\alpha + \cos\beta = -\dfrac{27}{65}$; $\dfrac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi$ и $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$.

3.365. Вычислить $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, если $\sin\alpha + \sin\beta = -\dfrac{27}{65}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{7}{9}$, $\dfrac{5}{2}\pi < \alpha < 3\pi$ и $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$.

3.366. Вычислить $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = n$.

3.367. Вычислить $\dfrac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Зная, что A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника, доказать равенства (3.368—3.374):

3.368. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

3.369. $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$.

3.370. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$.

3.371. $\dfrac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B$.

3.372. $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=$

$$=-4\cos\frac{3}{2}A\cos\frac{3}{2}B\cos\frac{3}{2}C.$$

3.373. $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C.$

3.374. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1.$

3.375. Найти $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$.

3.376. Зная, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$, найти $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$.

3.377. Найти значение выражения $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, если известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.

3.378. Известно, что $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{p}{q}$; найти $\operatorname{ctg}\beta$.

3.379. Зная, что $\sin\alpha+\cos\alpha=m$, найти $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

3.380. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$.

3.381. Найти $\cos 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{ctg}^2\alpha+7\operatorname{ctg}\alpha+3=0$ и угол α удовлетворяет неравенствам:

1) $3\pi/2<\alpha<7\pi/4$; 2) $7\pi/4<\alpha<2\pi$.

3.382. Найти $\sin 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{tg}^2\alpha-7\operatorname{tg}\alpha+3=0$ и угол α удовлетворяет неравенствам:

1) $\pi<\alpha<5\pi/4$; 2) $5\pi/4<\alpha<3\pi/2$.

3.383. Известно, что $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{p}{q}$. Найти $\operatorname{tg}\beta$.

3.384. Доказать, что выражение

$$\frac{1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\sqrt{3}\cos\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)}$$

не зависит от α, где $\alpha\neq\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{12}$.

3.385. Доказать, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, если $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

3.386. Доказать, что выражение $\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\times$ $\times\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(4\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)$ не зависит от α, где $\alpha\neq\frac{\pi}{8}\times$ $\times(4n+3)$.

3.387. Доказать, что выражение

$$\frac{1-\cos^4\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin^4\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$$

не зависит от α, если $\alpha\neq\pi n/2$.

3.388. Доказать, что выражение $\sin(250°+\alpha)\times$ $\times\cos(200°-\alpha)-\cos 240°\cos(220°-2\alpha)$ не зависит от α.

3.389. Доказать, что выражение $\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+$ $+\cos^2(\alpha+\varphi)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha+\varphi)$ не зависит ни от α, ни от φ.

3.390. Вывести формулу $\cos(n+1)\alpha=2\cos\alpha\cos n\alpha-$ $-\cos(n-1)\alpha$, где n — любое действительное число, и с ее помощью выразить $\cos 3\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через степени $\cos\alpha$.

3.391. Дано, что A, B, C — углы треугольника. Доказать, что $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 3/2$.

3.392. Дано, что $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$; $\alpha+\beta\neq 2\pi n$ $(n\in Z)$. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

3.393. Показать, что если p — постоянная величина, то функция

$$f(\alpha)=\frac{p\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{p\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$$

также является постоянной величиной.

3.394. Дана функция $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$. Найти $f(\alpha)$, если известно, что $\sin 2\alpha=2/3$.

3.395. Доказать, что если $\alpha+\beta=60°$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$, то $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\leqslant 1/3$.

Группа В

Доказать тождества **(3.396—3.409)**:

3.396. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

3.397. $\operatorname{ctg}(270°-2\alpha)+\operatorname{ctg}(210°-2\alpha)+\operatorname{ctg}(150°-2\alpha)=3\operatorname{tg}6\alpha$.

3.398. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left[1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]\cos^{-1}2\alpha+2\cos(4\alpha-2\pi)=$
$$=\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

3.399. $8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=$
$$=-2\sin\frac{7}{2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$

3.400. $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=$
$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

3.401. $\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)\sin^3(\pi-2\alpha)-\cos(6\alpha-\pi)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=$
$$=\cos^3 4\alpha.$$

3.402. $8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1=2\cos\frac{7}{2}\alpha\cos\frac{\alpha}{2}.$

3.403. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta).$

3.404. $\dfrac{8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1}{8\cos^4\alpha+4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1}=-\operatorname{tg}\frac{7}{2}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$

3.405. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)}=$
$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

3.406. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha\ldots-2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=2^{n+1}\times$ $\times\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha$, где $n\geqslant 0$ — любое целое число.

3.407. $\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}(150^\circ-\alpha)=3\operatorname{ctg}3\alpha.$

3.408. $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha=\dfrac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}+\dfrac{n}{2}.$

3.409. $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\ldots+\sin^2 n\alpha=\dfrac{n}{2}-\dfrac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}.$

Упростить выражения (3.410—3.412):

3.410. $\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\sin 6\alpha.$

3.411. $3\sin\alpha\cos 3\alpha+9\sin\alpha\cos\alpha-\sin 3\alpha\cos 3\alpha-3\sin 3\alpha\cos\alpha.$

3.412. $4(\sin^4 x+\cos^4 x)-4(\sin^6 x+\cos^6 x)-1.$

Преобразовать в произведение (привести к виду, удобному для логарифмирования) (3.413—3.415):

3.413. $\sin^3\alpha\cos 3\alpha+\cos^3\alpha\sin 3\alpha.$

3.414. $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\cos^{-2}\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin^{-2}\alpha-1}\right]+\operatorname{ctg}2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha.$

3.415. $\cos 22\alpha+3\cos 18\alpha+3\cos 14\alpha+\cos 10\alpha.$

Проверить равенства (3.416—3.440):

3.416. $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}=\frac{1}{32}$.

3.417. $3\sin\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{4\pi}{17}-\sin\frac{6\pi}{17}-\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{17}=$

$=8\sin^3\frac{2\pi}{17}\cos^2\frac{\pi}{17}$.

3.418. $\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}=\frac{1}{32}$.

3.419. $\operatorname{tg}20^\circ\cos^{-1}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\cos^{-1}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\cos^{-1}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ\times$

$\times\cos^{-1}80^\circ=48$.

3.420. $\sin10^\circ\sin20^\circ\sin30^\circ\sin40^\circ\sin50^\circ\sin60^\circ\sin70^\circ\sin80^\circ=$

$=\frac{3}{256}$.

3.421. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\ldots\cos\frac{12\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}\cos\frac{14\pi}{15}=$

$=-\frac{1}{2^{14}}$.

3.422. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}$.

3.423. $\sin10^\circ+\sin20^\circ+\sin30^\circ+\sin40^\circ+\sin50^\circ=$

$=\frac{1}{2}\sin25^\circ\sin^{-1}5^\circ$.

3.424. $\operatorname{ctg}80^\circ\operatorname{ctg}70^\circ+\operatorname{ctg}70^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ\operatorname{ctg}80^\circ=1$.

3.425. $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos70^\circ=\sqrt{3}$.

3.426. $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ=\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ$.

3.427. $\cos50^\circ+8\cos200^\circ\cos220^\circ\cos80^\circ=2\sin^2 65^\circ$.

3.428. $\sin18^\circ\sin54^\circ=\frac{1}{4}$.

3.429. $\sin^2\left(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$.

3.430. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}$.

3.431. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{7}{5}$.

3.432. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{1}{5}$.

3.433. $\cos(2\operatorname{arctg} 2)-\sin(4\operatorname{arctg} 3)=\frac{9}{25}$.

3.434. $\arccos\frac{36}{85}-\arccos\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}$.

3.435. $\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{36}{85}=\arccos\frac{15}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

3.436. $\cos(2\operatorname{arcctg} 7)=\sin(4\operatorname{arcctg} 3)$.

3.437. $\cos\frac{11\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

3.438. $\sin 84^\circ \sin 24^\circ \sin 48^\circ \sin 12^\circ=\frac{1}{16}$.

3.439. $\operatorname{tg} 830^\circ+\operatorname{tg} 770^\circ+\operatorname{tg} 740^\circ=\operatorname{tg} 470^\circ \operatorname{tg} 410^\circ \operatorname{tg} 380^\circ$.

3.440. $\operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 24^\circ+\operatorname{tg} 24^\circ \operatorname{tg} 54^\circ+\operatorname{tg} 54^\circ \operatorname{tg} 12^\circ=1$.

Вычислить (3.441—3.462):

3.441. $\operatorname{ctg}\left(\frac{11}{4}\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{11}{4}\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{2b}{a}\right)$.

3.442. $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{2a}{b}\right)$.

3.443. $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}-2\sin^2\left(\frac{5}{2}\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)$.

3.444. $\cos^6\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)-\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

3.445. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$.

3.446. $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

3.447. $\arccos\left(\cos\left(2\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)$.

3.448. $\arcsin\left(\cos\left(2\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)$.

3.449. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\arccos\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$, где $a<0$.

3.450. $\cos^6\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}\right)+\cos^6\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

3.451. $\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

3.452. $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

3.453. $\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

3.454. $\sin^2\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

3.455. $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right)$.

3.456. $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

3.457. $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

3.458. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arcctg}(-2)\right)$.

3.459. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

3.460. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

3.461. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}\right)$.

3.462. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$.

3.463. Найти $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, если известно, что $\sin x-\cos x=\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

3.464. Доказать, что если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{1}{3\sqrt{11}}$, $\sin\gamma=\frac{3}{\sqrt{11}}$ (α, β и γ — острые положительные углы), то $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

3.465. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha=m$, найти $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\frac{5\pi}{15}\sin\left(\frac{5\pi}{12}-2\alpha\right)$.

3.466. Известно, что $\cos 2\alpha=m$. Найти $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

3.467. Найти $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha$, если известно, что $\cos 2\alpha=m$.

3.468. Найти значение выражения

$$\frac{\sin 4\alpha+\sin 10\alpha-\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha+1-2\sin^2 4\alpha},$$

если известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=m$.

3.469. Зная, что $\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{4}{5}$ и что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, найти $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5}{2}x$.

3.470. Предположив, что A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника, доказать, что

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C=2.$$

3.471. Доказать, что если $\cos 2\alpha=\cos 2\beta\cos 2\gamma$, то

$$1+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\sin^{-2}\gamma.$$

3.472. Предположив, что A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника, доказать, что

$$\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C=$$
$$=(-1)^n 4\cos\frac{2n+1}{2}A\cdot\cos\frac{2n+1}{2}B\cdot\cos\frac{2n+1}{2}C,$$

где n — целое число.

3.473. Предположив, что A, B и C — внутренние углы некоторого треугольника, доказать равенство

$$\sin 2nA+\sin 2nB+\sin 2nC=(-1)^{n+1}4\sin nA\sin nB\sin nC,$$

где n — целое число.

3.474. Доказать, что равенство $(\sin\varphi)^x+(\cos\varphi)^x=1$ выполняется для всех φ в том и только в том случае, если $x=2$.

3.475. Доказать, что выражение $4\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)+$ $+2\sin^2(\alpha-\varphi)-\cos 2\varphi$ не зависит от φ.

3.476. Найти наибольшее значение выражения $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-4\alpha\right)-$ $-\sin^2\left(\frac{17\pi}{8}-4\alpha\right)$ при условии, что $0<\alpha<\pi/8$.

3.477. Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}{1+\sin\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right)}$ при условии, что $0<\alpha<\pi/8$.

3.478. Доказать следующее утверждение: для того, чтобы в треугольнике ABC один из углов был равен 60°, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0.$$

3.479. Доказать следующее утверждение: для того, чтобы в треугольнике ABC один из углов был равен 36° или 108°, достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0,$$

3.480. Доказать следующее утверждение: для того, чтобы один из углов треугольника ABC был равен 36° или 108°, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=0.$$

3.481. Найти наименьшее значение выражения $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 4\alpha+1}$ при условии, что $0<\alpha<\pi/4$.

3.482. Найти наибольшее значение выражения $\frac{\cos 2\alpha+1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ при условии, что $0<\alpha\leqslant\pi/2$.

3.483. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1$, то $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$ и $\cos 2\alpha=-\cos 2\beta$.

3.484. Зная, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=\frac{4}{3}$ и что $0<x\leqslant\pi/2$, найти $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5}{2}x$.

3.485. Найти наибольшее значение выражения $\frac{1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}$ при условии, что $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.

3.486. Найти наибольшее значение выражения $\frac{1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$ при условии, что $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.

3.487. Зная, что $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\frac{3}{5}$, найти $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{5}{2}x$.

3.488. Доказать, что если для некоторых углов α, β и γ выполняется равенство $(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)=(1+\sin\alpha)\times\times(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)$, то тогда каждая из частей этого равенства равна $|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|$.

3.489. Доказать, что для углов φ, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant\varphi<\pi/4$, выполняется равенство

$$1-\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}^2\varphi-\operatorname{tg}^3\varphi+\ldots=\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}.$$

3.490. Найти наименьшее значение выражения $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ при условии, что $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.

3.491. Найти наименьшее значение выражения $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ при условии, что $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.

3.492. Показать, что если α — постоянная величина, то функция

$$f(x)=\cos^2 x+\cos^2(\alpha+x)-2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)$$

также является постоянной величиной.

3.493. Найти сумму

$$1+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha+\ldots+\cos 4n\alpha.$$

4.494. Показать, что если $x=\operatorname{tg}5^\circ$, $y=\operatorname{tg}20^\circ$ и $z=\operatorname{tg}65^\circ$, то

$$xy+yz+zx=1.$$

3.495. Доказать, что $\operatorname{tg}142^\circ30'+\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ есть целое число.

3.496. Дано, что A, B, C — углы треугольника. Доказать, что

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} < 1.$$

3.497. Показать, что если $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = \pi$, то

$$x+y+z=xyz.$$

3.498. Показать, что если $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = \pi/2$, то

$$xy+yz+zx=1.$$

3.499. Дано, что A, B, C — углы треугольника. Доказать, что

$$8\cos A\cos B\cos C < 1.$$

3.500. Дано, что A, B, C — углы треугольника. Используя неравенство $\cos A\cos B\cos C < 1/8$, доказать, что

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C < 9/4.$$

Глава 4
ПРОГРЕССИИ

Группа А

4.001. За изготовление и установку первого железобетонного кольца колодца заплатили 10 руб., а за каждое следующее кольцо платили на 2 руб. больше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплачено еще 40 руб. Средняя стоимость изготовления и установки одного кольца оказалась равной $22\frac{4}{9}$ руб. Сколько колец было установлено?

4.002. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 5/3, а произведение третьего и четвертого ее членов равно 65/72. Найти сумму семнадцати первых членов этой прогрессии.

4.003. В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, а за каждый последующий — на 1/2 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

4.004. Найти арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ если известно, что $a_1+a_3+a_5=-12$ и $a_1a_3a_5=80$.

4.005. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой сумма всех членов равна 112, произведение второго члена на разность прогрессии равно 30, а сумма третьего и пятого членов равна 32. Написать три первых члена этой прогрессии.

4.006. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

4.007. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член этой же прогрессии в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена этой прогрессии на ее шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найти первый член и разность прогрессии.

4.008. Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна —49, а сумма средних членов равна 14.

4.009. Найти третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 8/5, а второй член равен — 1/2.

4.010. Найти три первых члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 6, а сумма пяти первых членов равна 93/16.

4.011. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна 14/9. Найти эти числа.

4.012. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 11 членов этой прогрессии.

4.013. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по единице, а к третьему члену прибавить единицу, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найти сумму первых десяти членов арифметической прогрессии.

4.014. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n=4n^2-3n$. Написать три первых члена этой прогрессии.

4.015. Решить уравнение $\frac{1}{x}+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{7}{2}$, где $|x|<1$.

4.016. Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

4.017. Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

4.018. Знаменатель геометрической прогрессии равен 1/3, четвертый член этой прогрессии равен 1/54, а сумма всех ее членов равна 121/162. Найти число членов прогрессии.

4.019. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что $a_4-a_2=-45/32$ и $a_6-a_4=-45/512$.

4.020. Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что знаменатель ее равен 3, а сумма шести ее первых членов равна 1820.

4.021. Арифметическая прогрессия обладает следующим свойством: при любом n сумма ее первых n членов равна $5n^2$. Найти разность этой прогрессии и выписать три первых члена.

4.022. Произведение первых трех членов геометрической прогрессии равно 1728, а их сумма равна 63. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

4.023. Решить уравнение $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=13/6$, где $|x|<1$.

4.024. Первый член арифметической прогрессии равен 429, разность ее равна -22. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы их сумма была равна 3069?

4.025. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 16, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна $153\frac{3}{5}$. Найти четвертый член и знаменатель прогрессии.

4.026. Найти арифметическую прогрессию, состоящую из натуральных чисел, если произведения первых трех и первых четырех ее членов равны соответственно 6 и 24.

4.027. Известно, что в некоторую арифметическую прогрессию входят члены a_{2n} и a_{2m} — такие, что $\frac{a_{2n}}{a_{2m}}=-1$. Имеется ли член этой прогрессии, равный нулю? Если да, то каков номер этого члена?

4.028. Найти число членов конечной геометрической прогрессии, у которой первый, второй и последний члены соответственно равны 3, 12 и 3072.

4.029. Найти сумму всех положительных четных двузначных чисел, делящихся на 3 нацело.

4.030. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член в четыре раза больше суммы всех ее последующих членов.

4.031. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член относится к сумме всех последующих членов как 2 к 3.

4.032. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то получим снова геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

4.033. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами сумма первых трех членов 10,5, а сумма прогрессии 12. Найти прогрессию.

4.034. Написать три первых члена арифметической прогрессии, у которой сколько бы ни взять членов, всегда сумма их равна утроенному квадрату числа этих членов.

4.035. От деления тринадцатого члена арифметической прогрессии на третий член в частном получается 3, а от деления восемнадцатого члена на седьмой член в частном получается 2 и в остатке 8. Определить разность и первый член прогрессии.

Группа Б

4.036. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

4.037. Доказать, что любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое между любыми двумя членами, равноудаленными от него.

4.038. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 6, а их произведение равно 135/16. Найти сумму первых 15 членов этой прогрессии.

4.039. Даны две арифметические прогрессии. Первый и пятый члены первой прогрессии равны соответственно 7 и —5. У второй прогрессии первый член равен 0, а последний член равен 7/2. Найти сумму членов второй прогрессии, если известно, что третьи члены обеих прогрессий равны между собой.

4.040. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке 6. Найти первый член и разность прогрессии.

4.041. Найти целое положительное число n из уравнения

$$(3+6+9+\ldots+3(n-1))+\left(4+5{,}5+7+\ldots+\frac{8+3n}{2}\right)=137.$$

4.042. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

4.043. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

4.044. Найти четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три —

арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних равна 18.

4.045. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим членам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получатся три числа, образующие арифметическую прогрессию. Найти седьмой член данной геометрической прогрессии.

4.046. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

4.047. Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, если известно, что их произведение равно 64, а их среднее арифметическое равно 14/3.

4.048. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 64/7. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

4.049. Найти сумму первых семи членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, про которую известно, что ее второй член равен 4, а отношение суммы квадратов ее членов к сумме членов равно 16/3.

4.050. Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7.

4.051. Найти сумму

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

4.052. Даны две бесконечно убывающие геометрические прогрессии, отличающиеся одна от другой только знаком их знаменателей. Их суммы соответственно равны S_1 и S_2. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, составленной из квадратов членов любой из данных прогрессий.

4.053. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — последовательные члены геометрической прогрессии, S_n — сумма ее n первых членов. Доказать, что

$$S_n=a_1a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

4.054. Доказать, что, если числа a, b и c составляют арифметическую прогрессию, то и числа a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2 и b^2+bc+c^2 в указанном порядке также составляют арифметическую прогрессию.

4.055. Первый член некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен единице, а ее сумма равна S. Из квадратов членов этой прогрессии составлена новая бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Найти ее сумму.

4.056. Найти пятый член возрастающей геометрической прогрессии, зная, что ее первый член равен $7-3\sqrt{5}$ и что каждый ее член, начиная со второго, равен разности двух соседних с ним членов.

4.057. В арифметической прогрессии сумма m ее первых членов равна сумме n ее первых членов ($m \neq n$). Доказать, что в этом случае сумма ее первых $m+n$ членов равна нулю.

4.058. Известно, что L, M, N — соответственно l-й, m-й, n-й члены геометрической прогрессии. Показать, что $L^{m-n}M^{n-l}N^{l-m}=1$.

4.059. Числа a, b, c, одно из которых кратно 7, составляют арифметическую прогрессию с разностью 7. Показать, что число abc делится на 294.

4.060. Стороны треугольника образуют последовательные три члена возрастающей геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии больше или меньше числа 2?

4.061. Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3,$$

где x — целое положительное число.

4.062. Число 180 представить в виде суммы четырех слагаемых так, чтобы они составляли геометрическую прогрессию, у которой третий член был бы больше первого на 36.

4.063. Даны две геометрические прогрессии, состоящие из одинакового числа членов. Первый член и знаменатель первой прогрессии равны соответственно 20 и 3/4, а первый член и знаменатель второй прогрессии равны соответственно 4 и 2/3. Если перемножить члены этих прогрессий с одинаковыми номерами, то сумма всех таких произведений составляет $158\frac{3}{4}$. Найти число членов этих прогрессий.

4.064. Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

4.065. Найти сумму бесконечного множества слагаемых

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{3-\sqrt{3}}+\frac{1}{6}+\ldots,$$

предварительно доказав, что ее первые три члена составляют геометрическую прогрессию, и предполагая, что и последующие члены образуются по закону этой прогрессии.

Группа В

4.066. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию. Если из этого числа вычесть 792, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если из цифры, выражающей число сотен, вычесть четыре, а остальные цифры искомого числа оставить без изменения, то получится число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

4.067. Известно, что при любом n сумма первых n членов некоторой числовой последовательности выражается формулой $S_n=2n^2+3n$. Найти десятый член этой последовательности и доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

4.068. Найти сумму первых девятнадцати членов арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, ..., если известно, что

$$a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=224.$$

4.069. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, обладающей следующим свойством: если от ее первого члена отнять 16/27, то первые три члена будут образовывать арифметическую прогрессию, если же после этого от третьего члена отнять 16/189, то эти три члена снова составят геометрическую прогрессию.

4.070. Найти сумму первых четырех членов геометрической прогрессии, обладающей тем свойством, что ее первых три члена, сумма которых равна $16\frac{4}{9}$, являются одновременно первым, четвертым и восьмым членами некоторой арифметической прогрессии.

4.071. Числа a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

4.072. Последовательность чисел 1, 8, 22, 43, ... обладает тем свойством, что разности двух соседних членов (последующего и предыдущего) образуют арифметическую прогрессию: 7, 14, 21, ... Найти номер члена последовательности, равного 35351.

4.073. Доказать следующее утверждение: для того чтобы три числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{b+a}$ составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы числа a^2, b^2 и c^2 также составляли арифметическую прогрессию.

4.074. Сумма четырех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна —40, а сумма их квадратов равна 3280. Найти соответствующую геометрическую прогрессию.

4.075. Даны две прогрессии: геометрическая с положительными членами a_n (знаменатель равен q) и возрастающая арифметическая с членами b_n (разность равна d). Найти x из условия:

$$\log_x a_n - b_n = \log_x a_1 - b_1.$$

Всегда ли существует решение?

4.076. Найти сумму

$$1+2\cdot 3+3\cdot 7+\ldots+n(2^n-1).$$

4.077. Найти сумму

$$1\cdot 3+3\cdot 9+5\cdot 27+\ldots+(2n-1)\cdot 3^n.$$

4.078. Найти произведение n первых членов геометрической прогрессии, если известна их сумма S и сумма σ их обратных величин.

4.079. Корни уравнения $x^4-10x^2+a=0$ составляют арифметическую прогрессию. Найти a.

4.080. Доказать следующее утверждение: для того чтобы три числа x, y и z в указанном порядке составляли геометрическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$(x^2+y^2)(y^2+z^2)=(xy+yz)^2.$$

Глава 5
КОМБИНАТОРИКА И БИНОМ НЬЮТОНА

Группа А

Решить уравнения (5.001—5.007):

5.001. $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48.$

[5.001.] $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x.$

5.002. $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$ **5.003.** $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \dfrac{24}{23}.$

5.004. $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x.$ [5.004.] $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2.$

5.005. $\dfrac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336.$ [5.005.] $A_x^{x-3} = xP_{x-2}.$

5.006. $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3} = 210.$ [5.006.] $A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} = \dfrac{30}{7} P_x.$

5.007. $\dfrac{A_x^3 + 3A_x^2}{P_{x+1}} = \dfrac{1}{2}.$

5.008. Показать, что при любом k сумма $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2$ есть точный квадрат.

[5.008.] Доказать тождества:

а) $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$; б) $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m.$

5.009. Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(2nx + \dfrac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ равна 64. Определить слагаемое, не содержащее x.

[5.009.] Сумма нечетных биномиальных коэффициентов разложения $(ax + x^{-1/4})^n$ равна 512. Найти слагаемое, не содержащее x.

5.010. При каких значениях x четвертое слагаемое разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

5.011. Каков наибольший коэффициент разложения $(a+b)^n$, если сумма всех коэффициентов равна 4096?

5.012. В разложении $\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}} + \sqrt[10]{\dfrac{a^7}{b^3}}\right)^n$ имеется член, содержащий ab. Найти этот член.

5.013. Сумма коэффициентов второго и третьего слагаемых разложения $\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ равна 25,5. Написать член, не содержащий x.

5.014. При каком значении x четвертое слагаемое разложения $\left(\sqrt{2^{x-1}}+\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ в 20 раз больше m, если биномиальный коэффициент четвертого слагаемого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого, как 5:1?

5.015. Определить A_n^2, если пятое слагаемое разложения $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ не зависит от x.

5.016. В какую натуральную степень следует возвести бином $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)$, чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему равнялось бы $3\sqrt{2}$?

[5.016.] Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить количество таких расписаний при выборе из одиннадцати дисциплин.

5.017. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности?

[5.017.] Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?

5.018. Сколько различных аккордов можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждый аккорд может содержать от трех до десяти звуков?

[5.018.] В вазе стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики. Сколькими способами можно выбрать 3 цветка из вазы?

5.019. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

[5.019.] Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга (т. е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.

5.020. Обычно наибольшее число очков на одной кости домино равно 12. Сколько костей содержала бы игра, если бы это число равнялось 18?

[5.020.] Из группы в 15 человек выбирается 4 участника эстафеты 800+400+200+100. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам эстафеты?

5.021. Команда из пяти человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых участвуют еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые членами этой команды?

[5.021.] Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не могла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находится с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски.)

5.022. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?

[5.022.] Участники шахматного турнира играют в зале, где имеются 8 столиков. Сколькими способами можно расположить шахматистов, если известны участники всех партий?

Группа Б

Решить уравнения (5.023—5.025):

5.023. $\dfrac{A_{x+1}^{y+1}\cdot P_{x-y}}{P_{x-y}}=72.$

5.024. $C_x^{x-1}+C_x^{x-2}+C_x^{x-3}+\ldots+C_x^{x-8}+C_x^{x-9}+C_x^{x-10}=$
$=1023.$

5.025. $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5\cdot P_{x-5}}=720.$

5.026. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_y^x : P_{x-1}+C_y^{y-x}=126, \\ P_{x+1}=720. \end{cases}$$

[5.026.] Решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_x^y+3C_x^y=90, \\ A_x^y-2C_x^y=40. \end{cases}$$

5.027. Найти x и y, если

$$C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1}=6:5:2.$$

5.028. Найти x и y, если

$$C_x^{y-1} : \left(C_{x-2}^y+C_{x-2}^{y-2}+2C_{x-2}^{y-1}\right) : C_x^{y+1}=3:5:5.$$

5.029. Найти x и y, если

$$\left(A_{x-1}^{y}+yA_{x-1}^{y-1}\right):A_{x}^{y-1}:C_{x}^{y-1}=10:2:1.$$

[5.029.] Найти x и y, если

$$A_{x}^{y-1}:A_{x-1}^{y}:\left(C_{x-2}^{y}+C_{x-2}^{y-1}\right)=21:60:10.$$

5.030. Доказать тождество

$$C_{n}^{k}+C_{n}^{k-1}=C_{n+1}^{k}.$$

[5.030.] Доказать тождество

$$C_{n}^{k}+3C_{n}^{k-1}+3C_{n}^{k-2}+C_{n}^{k-3}=C_{n+3}^{k}.$$

5.031. Доказать тождество

$$A_{n-1}^{m}=A_{n}^{m}-mA_{n-1}^{m-1}.$$

5.032. Разность между третьими биномиальными коэффициентами разложений $(a+b)^{n+1}$ и $(a+b)^{n}$ равна 225. Найти число рациональных членов разложения $\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[9]{y}\right)^{n}$.

5.033. Найти k-й член разложения $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{m}$, если известно, что $T_{k+2}:T_{k+1}:T_{k}=28:8\sqrt{6}:9$.

5.034. Разность между некоторыми членами T_{k+1} и T_{k} разложения $\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt{x^{-1}}\right)^{12}$ равна 30. Определить, при каких значениях x это возможно, если член T_{k+1} содержит x в степени, вдвое меньшей, чем член T_{k}.

5.035. Найти наибольший биномиальный коэффициент разложения $\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}$, если произведение четвертого слагаемого от начала и четвертого слагаемого от конца равно 14 400.

5.036. При любом допустимом значении z слагаемое U_{k+1} разложения $\left(\sqrt[3]{z}+\sqrt{z}\right)^{m}$ в 2 раза меньше слагаемого V_{k+2} разложения $\left(\sqrt[6]{z^{5}}+\frac{1}{\sqrt[6]{z}}\right)^{m+1}$. Найти эти слагаемые.

5.037. Сумма третьего от начала и третьего от конца биномиальных коэффициентов разложения $\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4}\right)^{n}$ равна 9900. Сколько рациональных членов содержится в этом разложении?

5.038. Третье слагаемое разложения $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^m$ не содержит x. При каких значениях x это слагаемое равно второму слагаемому разложения $(1+x^3)^{30}$?

5.039. Тридцать человек разбиты на три группы, по десять человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

5.040. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

[5.040.] Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 разноцветных лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов)?

5.041. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом 1-й и 2-й тома не стояли рядом?

5.042. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

[5.042.] Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6 дней выбирается двое дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.

5.043. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

5.044. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариатов расписания, при которых группы № 1 и № 2 находились бы в соседних аудиториях?

[5.044.] В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний первого тура (расписания считаются различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитывается).

5.045. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж будет доставлен какой-либо один материал?

5.046. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

[5.046.] Поезд метро делает 16 остановок, на которых выходят все пассажиры. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 100 пассажиров, вошедших в поезд на конечной остановке?

5.047. Сколько трехзначных чисел, делящихся на 3, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

5.048. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

[5.048.] Из 10 теннисисток и 6 теннисистов составляются 4 смешанные пары. Сколькими способами это можно сделать?

5.049. Три автомашины, № 1, № 2, № 3, должны доставить товар в шесть магазинов. Сколькими способами можно использовать машины, если грузоподъемность каждой из них позволяет взять товар сразу для всех магазинов и если две машины в один и тот же магазин не направляются? Сколько вариантов маршрута возможно, если решено использовать только машину № 1?

[5.049.] Четверо юношей и две девушки выбирают спортивную секцию. В секции хоккея и бокса принимают только юношей, в секцию художественной гимнастики только девушек, а в лыжную и конькобежную секции — и юношей, и девушек. Сколькими способами могут распределиться между секциями эти шесть человек?

5.050. Из лаборатории, в которой работает 20 человек, 5 сотрудников должны уехать в командировку. Сколько может быть различных составов этой группы, если начальник лаборатории, его заместитель и главный инженер одновременно уезжать не должны?

5.051. В фортепьянном кружке занимаются 10 человек, кружке художественного слова — 15, в вокальном кружке — 12 и в фотокружке — 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырех чтецов, трех пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

[5.051.] Двадцать восемь костей домино распределены между четырьмя игроками. Сколько возможно различных распределений?

5.052. Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады. Сколькими способами это можно сделать?

5.053. Пять учеников следует распределить по трем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?

[5.053.] Лифт останавливается на десяти этажах. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 8 пассажиров, находящихся в кабине лифта?

5.054. Восемь авторов должны написать книгу из шестнадцати глав. Сколькими способами возможно распределение материала между авторами, если два человека напишут по три главы, четыре — по две и два — по одной главе книги?

[5.054.] В шахматном турнире участвуют 8 шахматистов третьего разряда, 6 — второго и 2 перворазрядника. Определить количество таких составов первого тура, чтобы шахматисты одной категории встречались между собой (цвет фигур не учитывается).

5.055. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4 и 5 одновременно.

[5.055.] Семь яблок и три апельсина надо положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один апельсин и чтобы количество фруктов в них было одинаковым. Сколькими способами это можно сделать?

5.056. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

[5.056.] Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

5.057. Садовник должен в течение трех дней посадить десять деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее одного дерева в день?

[5.057.] Из вазы, где стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики, выбирается один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

Группа В

5.058. Доказать, что

$$\frac{C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n}{n}=2^{n-1}.$$

5.059. Доказать тождество

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

Пользуясь этим тождеством, показать, что

$$C_n^m + C_{n-1}^m + \ldots + C_{n-10}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{a-10}^{m+1}.$$

5.060. Упростить выражение

$$P_1 + 2P_2 + \ldots + nP_n,$$

где P_k — число перестановок из k элементов.

5.061. Доказать неравенство

$$C_{2n+x}^n \cdot C_{2n-x}^n < \left(C_{2n}^n\right)^2.$$

[5.061.] Найти наибольшее значение суммы

$$S = (1+x)^{36} + (1-x)^{36} \quad \text{при} \quad |x| < 1.$$

5.062. Найти наибольшее слагаемое разложения $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^{20}$.

5.063. При каких значениях x наибольшим слагаемым разложения $(5+3x)^{10}$ является четвертое?

5.064. Если раскрыть все скобки в выражении

$$(1+x)^9 + (1+x)^{10} + \ldots + (1+x)^{14}$$

и привести подобные члены, то получится некоторый многочлен. Требуется определить коэффициент при x^9 в этом многочлене, не раскрывая скобок.

5.065. Двенадцати ученикам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами их можно посадить в два ряда, чтобы рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

5.066. Каждый из десяти радистов пункта A старается установить связь с каждым из двадцати радистов пункта $Б$. Сколько возможно различных исходов такой связи?

5.067. Шесть ящиков различных материалов доставляются на восемь этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на восьмой этаж будет доставлено не менее двух материалов?

5.068. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд, так чтобы при этом два футболиста одной команды не стояли рядом?

5.069. На книжной полке стоят книги по математике и по логике — всего 20 книг. Показать, что наибольшее количество вариантов комплекта, содержащего 5 книг по математике и 5 книг по логике, возможно в том случае, когда число книг на полке по каждому предмету равно 10.

5.070. Лифт, в котором находится 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры выходят группами в два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

[5.071.] «Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком». Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядка их следования?

[5.072.] В шахматной встрече двух команд по 8 человек, участники партий и цвет фигур каждого участника определяются жеребьевкой. Каково число различных исходов жеребьевки?

ГЛАВА 6
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Величины a, b, c, p, q, m, n, как правило, считаются постоянными, а x, y, z, u, w — переменными.

Группа А

Решить уравнения (6.001—6.066):

6.001. $\frac{x^2+1}{x-4}-\frac{x^2-1}{x+3}=23.$ **6.002.** $\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=2.$

6.003. $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$

$\left(\text{подстановка } \frac{x^2+x-5}{x}=z\right).$

6.004. $x^4-\frac{50}{2x^4-7}=14$

(подстановка $2x^4-7=z$).

6.005. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$

(подстановка $x^2+2x=z$).

6.006. $x+\frac{1}{x}=2\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}.$ **6.007.** $\frac{x^2}{a^3}+\frac{b^3}{x^2}=\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}.$

6.008. $\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+6}{x+2}+\frac{x-6}{x-2}.$

6.009. $\frac{5a}{y+a}+\frac{4a}{y+2a}+\frac{3a}{y+3a}=8.$

6.010. $\frac{1}{x^3+2}-\frac{1}{x^3+3}=\frac{1}{12}.$

6.011. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}.$

6.012. $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2.$

6.013. $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0.$

6.014. $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2.$

6.015. $\frac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=-2.$

6.016. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$ $\left(\text{подстановка } \frac{x^2+1}{x}=u\right).$

6.017. $\frac{x+n}{m+n}-\frac{m-n}{x-n}=\frac{x+p}{m+p}-\frac{m-p}{x-p}.$

6.018. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4$ (подстановка $x+x^{-1}=z$).

6.019. $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$

(подстановка $x^2-4x+10=y$).

6.020. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=2{,}5.$ 6.021. $8x^4+x^3+64x+8=0.$

6.022. $(x+3)^3-(x+1)^3=56.$

6.023. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6.$

6.024. $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47.$

6.025. $(x-a)^3-(x-b)^3=b^3-a^3.$

6.026. $\frac{ax^2}{x-1}=(a+1)^2.$ 6.027. $\frac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}=\frac{19}{7}.$

6.028. $\frac{x}{a+b}+\frac{2a-x}{a-b}-\frac{a+b}{x}=1.$

6.029. $\frac{a^2-1}{ax-1}+\frac{a-x}{a}=1.$

6.030. $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2.$

6.031. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}.$

6.032. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$

6.033. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$

6.034. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x.$

6.035. $\frac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b$ $(a>b).$

6.036. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2.$

6.037. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$

6.038. $2\sqrt{7-x}:0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=10\sqrt[4]{1{,}5}:\frac{1}{4}\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}$.

6.039. $\left(\frac{x+5}{x}\right)^{1/2}+4\left(\frac{x}{x+5}\right)^{1/2}=4$.

6.040. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

6.041. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

6.042. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

6.043. $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$.

6.044. $\sqrt[5]{(5x+2)^3}-\frac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}}=6$.

6.045. $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0$.

6.046. $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2x^{-1}$.

6.047. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$. 6.048. $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\frac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$.

6.049. $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.

6.050. $\frac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2$.

6.051. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

6.052. $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}$.

6.053. $\frac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

6.054. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$.

6.055. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$.

6.056. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

6.057. $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5$.

6.058. $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2$

$\left(\text{подстановка } \sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}=z\right)$.

6.059. $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}+\sqrt[5]{\frac{z-1}{16z}}=2{,}5$.

6.060. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

6.061. $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-18=0$.

6.062. $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}$.

6.063. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$.

6.064. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

6.065. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}$.

6.066. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$

(подстановка $x^2-4x-6=u$).

Решить системы уравнений (6.067—6.119):

6.067. $\begin{cases}(x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1,\\ x+y=0{,}9.\end{cases}$ 6.068. $\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ x^3y^3=-8.\end{cases}$

6.069. $\begin{cases}x^{-1}+y^{-1}=5,\\ x^{-2}+y^{-2}=13.\end{cases}$ 6.070. $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6},\\ x+y=5.\end{cases}$

6.071. $\begin{cases}x-y=1,\\ x^3-y^3=7.\end{cases}$ 6.072. $\begin{cases}\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{x},\\ y^2-x-5=0.\end{cases}$

6.073. $\begin{cases}y^2-xy=-12,\\ x^2-xy=28.\end{cases}$ 6.074. $\begin{cases}x+y+\frac{x}{y}=9,\\ \frac{(x+y)\,x}{y}=20.\end{cases}$

6.075. $\begin{cases}x^2y+xy^2=6,\\ xy+x+y=5.\end{cases}$ 6.076. $\begin{cases}x^2y^3+x^3y^2=12,\\ x^2y^3-x^3y^2=4.\end{cases}$

6.077. $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ xy=3. \end{cases}$

6.078. $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.079. $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ xy=2. \end{cases}$

6.080. $\begin{cases} u^2+uv=15, \\ v^2+uv=10. \end{cases}$

6.081. $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20. \end{cases}$

6.082. $\begin{cases} x^2+y^4=5, \\ xy^2=2. \end{cases}$

6.083. $\begin{cases} 12(x+y)^2+x=2{,}5-y, \\ 6(x-y)^2+x=0{,}125+y. \end{cases}$

6.084. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

6.085. $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

6.086. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=45, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.087. $\begin{cases} x^4-y^4=15, \\ x^3y-xy^3=6. \end{cases}$

6.088. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

6.089. $\begin{cases} u^3+v^3+1=m, \\ u^3v^3=-m. \end{cases}$

6.090. $\begin{cases} ax+\dfrac{b}{y}=2, \\ \dfrac{b}{x}+ay=2ab. \end{cases}$

6.091. $\begin{cases} (x-y)xy=30, \\ (x+y)xy=120. \end{cases}$

6.092. $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0, \\ x+y+8=0. \end{cases}$

6.093. $\begin{cases} v-u=1, \\ w-v=1, \\ (u-1)^3+(v-2)^3+(w-3)^3=3. \end{cases}$

6.094. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{13}{6}, \\ xy=5. \end{cases}$

6.095. $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$

6.096. $\begin{cases} x^2y^3=16, \\ x^3y^2=2. \end{cases}$

6.097. $\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=2. \end{cases}$

6.098. $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ xy(x+y)=-2. \end{cases}$

6.099. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=91, \\ x+\sqrt{xy}+y=13. \end{cases}$

6.100. $\begin{cases} \sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2, \\ \sqrt{u+v}-\sqrt{u-v}=8. \end{cases}$

6.101. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8 \end{cases}$

$\left(\text{положить } \sqrt{x+y}=u; \ \sqrt[3]{x-y}=v\right)$.

6.102. $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3, \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3. \end{cases}$

6.103. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1, \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4 \end{cases}$

$\left(\text{положить } \sqrt{\dfrac{y}{x}}=z\right)$.

6.104. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt{x}=12, \\ xy=64. \end{cases}$

6.105. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=3, \\ \sqrt{(x-y)^2}=1. \end{cases}$

6.106. $\begin{cases} u^2+v^2=uv+13, \\ u+v=\sqrt{uv}+3. \end{cases}$ **6.107.** $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3}, \\ xy=9. \end{cases}$

6.108. $\begin{cases} 3\left(2-\sqrt{x-y}\right)^{-1}+10\left(2+\sqrt{x+y}\right)^{-1}=5, \\ 4\left(2-\sqrt{x-y}\right)^{-1}-5\left(2+\sqrt{x+y}\right)^{-1}=3. \end{cases}$

6.109. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28. \end{cases}$ **6.110.** $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4, \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8. \end{cases}$

6.111. $\begin{cases} 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=3\sqrt{xy}, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.112. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10, \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4. \end{cases}$

6.113. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+a}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+a}}=2, \\ x+y=xy+a. \end{cases}$

6.114. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$

6.115. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3. \end{cases}$

6.116. $\begin{cases} \sqrt[4]{u}-\sqrt[4]{v}=1, \\ \sqrt{u}+\sqrt{v}=5. \end{cases}$ 6.117. $\begin{cases} x-y=8a^2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4a. \end{cases}$

6.118. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=14, \\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=3. \end{cases}$

6.119. $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=0{,}5\sqrt{xy}, \\ x+y=5. \end{cases}$

6.120. Не решая уравнения $ax^2+bx+c=0$, найти $x_1^{-2}+x_2^{-2}$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

6.121. Соста́вить квадратное уравнение с корнями $1/x_1$ и $1/x_2$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

6.122. Составить уравнение второй степени, один из корней которого был бы равен сумме, а другой — произведению корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

6.123. Составить уравнение второй степени, корни которого были бы на единицу больше корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

[6.124.] Определить коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ так, чтобы его корни были равны p и q.

6.125. Найти коэффициенты A и B уравнения $x^2+Ax+B=0$, если известно, что числа A и B являются также и его корнями.

6.126. При каком целом значении k один из корне уравнения $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ втрое меньше другого?

6.127. При каком целом значении p уравнения

$$3x^2-4x+p-2=0 \text{ и } x^2-2px+5=0$$

имеют общий корень? Найти этот корень.

6.128. Найти все значения a, при которых сумма корней уравнения

$$x^2-2a(x-1)-1=0$$

равна сумме квадратов корней.

6.129. При каком значении a уравнения

$$x^2+ax+8=0 \text{ и } x^2+x+a=0$$

имеют общий корень?

6.130. В уравнении

$$x^2-2x+c=0$$

определить то значение c, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_2-4x_1=47$.

6.131. Не решая уравнения

$$x^2-(2a+1)x+a^2+2=0,$$

найти, при каком значении a один из корней в два раза больше другого.

6.132. При каком значении p отношение корней уравнения $x^2+px-16=0$ равно -4?

6.133. Не решая уравнения $3x^2-5x-2=0$, найти сумму кубов его корней.

6.134. При каком целом значении b уравнения

$$2x^2+(3b-1)x-3=0 \text{ и } 6x^2-(2b-3)x-1=0$$

имеют общий корень?

6.135. При каком положительном значении c один корень уравнения

$$8x^2-6x+9c^2=0$$

равен квадрату другого?

Группа Б

Решить уравнения (6.136—6.182):

6.136. $\frac{x^2+1}{x+1}+\frac{x^2+2}{x-2}=-2.$

6.137. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x}=\frac{25}{6}$.

6.138. $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$.

6.139. $(x+1)^5+(x-1)^5=32x$.

6.140. $\frac{z^2-z}{z^2-z+1}-\frac{z^2-z+2}{z^2-z-2}=1$.

6.141. $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$.

6.142. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$.

6.143. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}$.

6.144. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$.

6.145. $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12$.

6.146. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1$.

6.147. $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

6.148. $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.

6.149. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2{,}5$. 6.150. $\frac{u^2}{2-u^2}+\frac{u}{2-u}=2$.

6.151. $\frac{x-m}{x-1}+\frac{x+m}{x+1}=\frac{x-2m}{x-2}+\frac{x+2m}{x+2}-\frac{6(m-1)}{5}$.

6.152. $\frac{z+4}{z-1}+\frac{z-4}{z+1}=\frac{z+8}{z-2}+\frac{z-8}{z+2}+6$.

6.153. $(2x+a)^5-(2x-a)^5=242a^5$.

6.154. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$.

6.155. $ax^4-x^3+a^2x-a=0$.

6.156. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\,\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

6.157. $2(x-1)^2-5(x-1)(x-a)+2(x-a)^2=0$.

6.158. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

6.159. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$.

6.160. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$.

6.161. $(x-1)x(x+1)+x(x+1)(x+2)=$
$$=3x^2+x+18x\sqrt{x}-16.$$

6.162. $\sqrt[7]{(ax-b)^3}-\sqrt[7]{(b-ax)^{-3}}=\frac{65}{8}\,(a\neq 0)$.

6.163. $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^7}=0$.

6.164. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$.

6.165. $\sqrt{\frac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}+\sqrt{\frac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}}=\frac{13}{6}$.

6.166. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

6.167. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$.

6.168. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

6.169. $\sqrt{x}+\frac{2x+1}{x+2}=2$.

6.170. $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$.

6.171. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

6.172. $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3=1$.

6.173. $2\sqrt{5\sqrt[4]{x+1}+4}-\sqrt{2\sqrt[4]{x+1}-1}=$
$$=\sqrt{20\sqrt[4]{x+1}+5}.$$

6.174. $\frac{z}{z+1}-2\sqrt{\frac{z+1}{z}}=3$.

6.175. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0$.

6.176. $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2=2$.

6.177. $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$.

6.178. $\frac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}=\frac{7}{3}$.

6.179. $\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-x}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-x}}{2}}=$

$=\sqrt{4+\sqrt{x}+\sqrt{16-x}}.$

6.180. $a\sqrt{x}-\sqrt{x^3+2ax\sqrt{x^2+7a^2}}=0.$

6.181. $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+a+1}+\sqrt[3]{x+a+2}=0.$

6.182. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x-4}=\sqrt[3]{4(x+2)}.$

Решить системы уравнений (**6.183—6.244**):

6.183. $\begin{cases} xy(x+1)(y+1)=72, \\ (x-1)(y-1)=2. \end{cases}$ 6.184. $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$

6.185. $\begin{cases} x^2+2y^2=17, \\ x^2-2xy=-3. \end{cases}$ 6.186. $\begin{cases} ax+by+cz=k, \\ a^2x+b^2y+c^2z=k^2, \\ a^3x+b^3y+c^3z=k^3. \end{cases}$ $a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a.$

6.187. $\begin{cases} (x+1)(y+1)=10, \\ (x+y)(xy+1)=25. \end{cases}$ 6.188. $\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3, \\ x-by+b^2z=b^3, \\ x-cy+c^2z=c^3, \end{cases}$ $a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a.$

6.189. $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=5, \\ (x+y)(x^2-y^2)=9. \end{cases}$ 6.190. $\begin{cases} xy=a, \\ yz=b, \\ zx=c, \end{cases}$ $abc>0.$

6.191. $\begin{cases} x^2+y=y^2+x, \\ y^2+x=6. \end{cases}$ 6.192. $\begin{cases} \frac{4}{x+y}+\frac{4}{x-y}=3, \\ (x+y)^2+(x-y)^2=20. \end{cases}$

6.193. $\begin{cases} x+yz=2, \\ y+zx=2, \\ z+xy=2. \end{cases}$ 6.194. $\begin{cases} \frac{5}{x^2-xy}+\frac{4}{y^2-xy}=-\frac{1}{6}, \\ \frac{7}{x^2-xy}-\frac{3}{y^2-xy}=\frac{6}{5}. \end{cases}$

6.195. $\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y-9=0, \\ 2x^2+2y^2+x-5y-1=0, \end{cases}$

6.196. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+y+xy=23. \end{cases}$ 6.197. $\begin{cases} x^2+y^4=20, \\ x^4+y^2=20. \end{cases}$

6.198. $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{ab+1}{b}, \\ x-y+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{ab+1}{a}. \end{cases}$

6.199. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{4}; \\ 2x+3y-5z+19=0. \end{cases}$

6.200. $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y, \\ (x-y)^2-2y=3-2x. \end{cases}$

6.201. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}+\dfrac{5}{2}=0, \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}+\dfrac{7}{5}=0. \end{cases}$

6.202. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3, \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=3, \\ \dfrac{1}{xyz}=1. \end{cases}$

6.203. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ cx+ay+bz=0, \\ (x+b)^2+(y+c)^2+(z+a)^2=a^2+b^2+c^2, \end{cases}$

$a \neq b \neq c.$

6.204. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x^2}{y^2}=7, \\ \dfrac{(x+y)\,x^2}{y^2}=12. \end{cases}$

6.205. $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1, \\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22. \end{cases}$

6.206. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$

6.207. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ x(y+z)=5, \\ y(x+z)=8. \end{cases}$

6.208. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=3a^3, \\ (x+y)(x^2+y^2)=15a^3. \end{cases}$

6.209. $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ x^2y+xy^2=-6. \end{cases}$

6.210. $\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$ 6.211. $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

6.212. $\begin{cases} \dfrac{3}{uv}+\dfrac{15}{vw}=2, \\ \dfrac{15}{vw}+\dfrac{5}{wu}=2, \\ \dfrac{5}{wu}+\dfrac{3}{uv}=2. \end{cases}$ 6.213. $\begin{cases} x^6+y^6=65, \\ x^4-x^2y^2+y^4=13. \end{cases}$

6.214. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x+3y+z=0, \\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=14. \end{cases}$

6.215. $\begin{cases} x^3+3xy^2=158, \\ 3x^2y+y^3=-185. \end{cases}$ 6.216. $\begin{cases} x^2+y-20=0, \\ x+y^2-20=0. \end{cases}$

6.217. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$ 6.218. $\begin{cases} x^3+y^3=9a^3, \\ x^2y+xy^2=6a^3. \end{cases}$

6.219. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y-z=2, \\ x+yz+zx=3. \end{cases}$ 6.220. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$

6.221. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+3y+z=1, \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9. \end{cases}$

6.222. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}}=2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}-\sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}}=1{,}5. \end{cases}$

6.223. $\begin{cases} x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1, \\ 2x+y=2. \end{cases}$

6.224. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3, \\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5, \\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4. \end{cases}$

6.225. $\begin{cases} \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3, \\ x+y=17. \end{cases}$

6.226. $\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{y+\frac{1}{x}}=2\sqrt{2}, \\ (x^2+1)\,y+(y^2+1)\,x=4xy. \end{cases}$

6.227. $\begin{cases} \sqrt[3]{u+v}+\sqrt[3]{v+w}=3, \\ \sqrt[3]{v+w}+\sqrt[3]{w+u}=1, \\ \sqrt[3]{w+u}+\sqrt[3]{u+v}=0. \end{cases}$

6.228. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30, \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35. \end{cases}$ 6.229. $\begin{cases} x+\sqrt{y}-56=0, \\ \sqrt{x}+y-56=0. \end{cases}$

6.230. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

6.231. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+2y=23. \end{cases}$

6.232. $\begin{cases} \sqrt{\frac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$

6.233. $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1, \\ 3x+2y=4. \end{cases}$

6.234. $\begin{cases} u^{-1/2}\sqrt[3]{u}+v^{-1/2}\sqrt[3]{v}=1{,}5, \\ uv=64. \end{cases}$

6.235. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}} - 2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}} = 1, \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5. \end{cases}$

6.236. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 6, \\ xy^2 = 6\sqrt{10}. \end{cases}$

6.237. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5. \end{cases}$

6.238. $\begin{cases} \sqrt{\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 1\right)^2} = 1{,}6, \\ xy = 2. \end{cases}$

6.239. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 1, \\ \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{y+1} = 1. \end{cases}$

6.240. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{xy+21} = 13, \\ \sqrt[4]{x+y} + \sqrt[4]{xy+21} = 5 \end{cases}$

(ограничиться отысканием целочисленных решений).

6.241. $\begin{cases} u - v + \sqrt{\dfrac{u-v}{u+v}} = \dfrac{12}{u+v}, \\ u^2 + v^2 = 41. \end{cases}$

6.242. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ x^2 - 18 = 2y(4y-9). \end{cases}$

6.243. $\begin{cases} 2(x+y) = 3\left(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}\right), \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6. \end{cases}$

6.244. $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-88} + \sqrt{x+6y} = 19, \\ 3\sqrt{x^2-3y-88} = 1 + 2\sqrt{x+6y}. \end{cases}$

6.245. Решить уравнение

$$\frac{x^3+x^4-2x^2+6}{x^4+2x^2+3}=11x^2-34,$$

предварительно сократив дробь в его левой части.

6.246. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня. Составить новое квадратное уравнение, у которого один из корней на единицу меньше большего корня, а другой на единицу больше меньшего корня данного уравнения.

6.247. Определить, при каких значениях m один из корней уравнения

$$z^3-(m^2-m+7)z-(3m^2-3m-6)=0$$

равен -1. Отыскать два остальных корня уравнения при этих значениях m.

6.248. Показать, что если коэффициенты a, b и c уравнения $ax^2+bx+c=0$ связаны условием $2b^2-9ac=0$, то отношение корней уравнения равно 2.

6.249. Показать, что если a и b — корни уравнения $x^2+px+1=0$, а b и c — корни уравнения $x^2+qx+2=0$, то

$$(b-a)(b-c)=pq-6.$$

6.250. При каких значениях a уравнения

$$x^2+ax+1=0 \text{ и } x^2+x+a=0$$

имеют общий корень?

6.251. При каком положительном значении p корни уравнения

$$2x^2-(p+2)x+7=p^2$$

обратны по величине и противоположны по знаку? Найти эти корни.

6.252. Найти коэффициенты уравнения $x^2+px+q=0$ при условии, что разность корней уравнения равна 5, а разность их кубов равна 35.

6.253. Составить квадратное уравнение с корнями $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$, если a и b — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

6.254. Обозначим через α и β корни уравнения $3x^2+7x+4=0$. Не решая данного уравнения, составить новое квадратное уравнение с числовыми коэффициентами, корни которого равны $\frac{\alpha}{\beta-1}$ и $\frac{\beta}{\alpha-1}$.

6.255. Показать, что среди корней уравнения

$$x^4+5x^3+15x-9=0$$

есть только один положительный и только один отрицательный корень (сами корни находить не обязательно).

Группа В

Решить уравнения (6.256—6.302):

6.256. $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

6.257. $u^3-(2a+1)u^2+(a^2+2a-b^2)u+(b^2-a^2)=0$.

6.258. $x^3-2x^2-(a^2-a-1)x+(a^2-a)=0$.

6.259. $x^3-(3a-1)x^2+(2a^2-3a)x+2a^2=0$.

6.260. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.

6.261. $x^3-(2a+1)x^2+(a^2+a)x-(a^2-a)=0$.

6.262. $\dfrac{16}{x^3+3x^2-x+5}-\dfrac{5}{x^3+3x^2-x+2}=1$

(ограничиться отысканием каких-либо трех корней).

6.263. $(x-2)^6+(x-4)^6=64$.

6.264. $x^3-x^2-\dfrac{8}{x^3-x^2}=2$.

6.265. $x^3-(2a+1)x^2+(a^2+2a-m)x-(a^2-m)=0$.

6.266. $x^3-3ax^2+(3a^2-b)x-(a^3-ab)=0$.

6.267. $x^3-(p^2-p+7)x-3(p^2-p-2)=0$.

6.268. $z^3-(2p+1)z^2+(p^2+2p-q)z-(p^2-q)=0$.

6.269. $x^3-2ax^2+\left(a^2+2\sqrt{3}a-9\right)x-$

$$-\left(2a^2\sqrt{3}-12a+6\sqrt{3}\right)=0.$$

6.270. $10x^3-3x^2-2x+1=0$.

6.271. $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$.

6.272. $27x^3+9x^2-48x+20=0$.

6.273. $4x^4-16x^3+3x^2+4x-1=0$.

6.274. $x^2+\dfrac{81x^2}{(9+x)^2}=40$. 6.275. $\dfrac{2+x}{2-x}+\sqrt{x}=1$.

6.276. $\dfrac{20}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x}+x=22$.

6.277. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$.

6.278. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

6.279. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$.

6.280. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}=0$.

6.281. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.

6.282. $\sqrt{u^2-u-1}+\sqrt{u^2+u+3}=\sqrt{2u^2+8}$.
(ограничиться отысканием положительных корней).

6.283. $\dfrac{x\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[5]{x^3-1}}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3-1}}{\sqrt[5]{x-1}}=16$.

6.284. $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$.

6.285. $\dfrac{x^2}{\sqrt{5x+4}}+\sqrt{5x+4}=\dfrac{4}{3}x+2$.

6.286. $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$.

6.287. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}$.

6.288. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x$.

6.289. $x^{4/5}-7x^{-2/5}+6x^{-1}=0$.

6.290. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$.

6.291. $8{,}4\sqrt[12]{x^{-7}}-0{,}2\sqrt[4]{x^{-1}\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[12]{x^{11}}$.

6.292. $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$.

6.293. $\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{2}-\dfrac{\sqrt[7]{x-\sqrt{2}}}{x^2}=\dfrac{x}{2}\sqrt[7]{\dfrac{x^3}{x+\sqrt{2}}}$.

6.294. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$.

6.295. $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}+3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}}=8$.

6.296. $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30$.

6.297. $\sqrt{x^2-19x+204}-\sqrt{x^2-25x-150}=3\sqrt{\dfrac{x+5}{x-30}}$.

6.298. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{(15-x)^2}+\sqrt[3]{(15-x)(x-6)}+\sqrt[3]{(x-6)^2}\right)^2}{\sqrt[3]{15-x}+\sqrt[3]{x-6}}=\dfrac{49}{3}$.

6.299. $\dfrac{2}{19}\left(\sqrt{x^2+37x+336}-\sqrt{x^2+18x+32}\right)=\sqrt{\dfrac{21+x}{16+x}}$.

6.300. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

6.301. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$.

6.302. $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12$.

Решить системы уравнений (**6.303—6.341**):

6.303. $\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2)=16,\\(x-y)(x^2+y^2)=40.\end{cases}$

6.304. $\begin{cases}\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}-\dfrac{c+a}{z+x}=1,\\[2mm]\dfrac{a+b}{x+y}-\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1,\\[2mm]-\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{b+c}{y+z}+\dfrac{c+a}{z+x}=1.\end{cases}$

6.305. $\begin{cases}uvx^2=8\\vx^2w=24,\\x^2wu=12,\\u+v+w=x+4\end{cases}$

(ограничиться отысканием положительных решений).

6.306. $\begin{cases}2x+y+z=0,\\3x+2y+z=0,\\3(x+2)^3+2(y+1)^3+(z+1)^3=27.\end{cases}$

6.307. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3,\\[2mm]\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=3,\\[2mm]x+y+z=3.\end{cases}$

6.308. $\begin{cases}xy+yz=8,\\yz+zx=9.\\zx+xy=5.\end{cases}$ **6.309.** $\begin{cases}x+y+z=2,\\x^2+y^2+z^2=6,\\x^3+y^3+z^3=8.\end{cases}$

6.310. $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}+2xy=\dfrac{21}{5},\\[2mm]\dfrac{1}{2xy}+x^2+y^2=\dfrac{21}{4}.\end{cases}$

6.311. $\begin{cases}10(x^4+y^4)=-17(x^3y+xy^3),\\x^2+y^2=5.\end{cases}$

6.312. $\begin{cases}x-y+z=6,\\x^2+y^2+z^2=14,\\x^3-y^3+z^3=36.\end{cases}$

6.313. $\begin{cases}(x+y)(x+2y)(x+3y)=60,\\(y+x)(y+2x)(y+3x)=105.\end{cases}$

6.314. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1{,}5, \\ xyz=8. \end{cases}$

6.315. $\begin{cases} x^3+y^3=2, \\ 2xy^2-x^2y=1, \end{cases}$

(ограничиться отысканием целочисленных решений).

6.316. $\begin{cases} uv+vw=2a^2, \\ vw+wu=2a^2-a-1, \\ wu+uv=2a^2+a-1. \end{cases}$

6.317. $\begin{cases} 2x+y+z=6, \\ 3x+2y+z=7, \\ (x-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7. \end{cases}$

6.318. $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136, \\ x^3y+xy^3=30. \end{cases}$

6.319. $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ (xy+8)(x+y)=2. \end{cases}$

6.320. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

6.321. $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=12, \\ (xy)^2+xy=6. \end{cases}$

6.322. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x^3}{y^3}=14, \\ x+y=3. \end{cases}$

6.323. $\begin{cases} 8x+\dfrac{8}{y}=3y^2, \\ y+\dfrac{1}{x}=3x^2. \end{cases}$

6.324. $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=102, \\ xy+x+y=69. \end{cases}$

6.325. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$

6.326. $\begin{cases} 9(u^4+v^4)=17(u+v)^2, \\ 3uv=-2(u+v). \end{cases}$

6.327. $\begin{cases} xy+\dfrac{y}{x}=2(x^2+y^2), \\ xy-\dfrac{x}{y}=x^2+y^2. \end{cases}$

6.328. $\begin{cases} (u^2+v^2)(u+v)=15uv, \\ (u^4+v^4)(u^2+v^2)=85u^2v^2. \end{cases}$

6.329. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$

(ограничиться отысканием целочисленных решений).

6.330. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{ax+by}{bx+ay}}+\sqrt{\dfrac{bx+ay}{ax+by}}=2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+1}}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

6.331. $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2,\\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1.\end{cases}$

6.332. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{x}}=3,\\ \sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{z}{y}}+\sqrt{\dfrac{x}{z}}=3,\\ \sqrt{xyz}=1.\end{cases}$

6.333. $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5,\\ x^2+y^2=13.\end{cases}$

6.334. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1,\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1.\end{cases}$

6.335. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8,\\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12.\end{cases}$

6.336. $\begin{cases}\sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y),\\ x^2-y^2=41.\end{cases}$

6.337. $\begin{cases}\sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6,\\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12,\\ x+y+z=14.\end{cases}$

6.338. $\begin{cases}\sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y},\\ \sqrt[3]{x+y}=\sqrt{x+y-4}.\end{cases}$

6.339. $\begin{cases}\sqrt{1-4x^2}-\sqrt{1-4y^2}=2(x+y),\\ x^2+y^2+4xy=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

6.340. $\begin{cases}u+v+\sqrt{u^2-v^2}=12,\\ v\sqrt{u^2-v^2}=12.\end{cases}$

6.341. $\begin{cases}x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=32,\\ y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=162.\end{cases}$

6.342. Дано уравнение $ax^2+bx+c=0$. Пусть $S_n=\alpha^n+\beta^n$, где α и β — корни уравнения. Найти зависимость между S_n, S_{n+1}, S_{n+2}.

6.343. Числа x_1, x_2, x_3 служат корнями уравнения

$$x^3+px^2+qx+r=0.$$

1) Составить уравнение с корнями x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1.

2) Воспользоваться результатом п. 1) для отыскания корней уравнения

$$x^3-3\sqrt{2}\,x^2+7x-3\sqrt{2}=0.$$

6.344. Найти коэффициенты a и b уравнения

$$x^4+x^3-18x^2+ax+b=0,$$

если известно, что среди его корней имеются три равных целых числа.

6.345. Найти коэффициенты p и q уравнения

$$x^4-10x^3+37x^2+px+q=0,$$

если известно, что среди его корней имеются две пары равных между собой чисел.

6.346. Для уравнения

$$x^3+ax^2+bx+1=0$$

произведение суммы его корней на сумму их обратных величин выразить через коэффициенты a и b.

6.347. Показать, что равенство $ab=c$ выражает необходимое и достаточное условие того, что среди корней уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

находятся два числа, сумма которых равна нулю.

6.348. Решить уравнение

$$12x^3+4x^2-17x+6=0,$$

если известно, что среди его корней имеются два числа, обратные по абсолютной величине и противоположные по знаку.

6.349. Решить уравнения

$$2x^3-5x^2+6x-2=0 \text{ и } 6x^3-3x^2-2x+1=0,$$

если известно, что они имеют один общий корень.

6.350. Написать уравнение третьей степени по его корням x_1^2, x_1x_2 и x_2^2, если числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$x^2+px+q=0.$$

6.351. Решить уравнения

$$x^3-6x^2-39x-10=0 \text{ и } x^3+x^2-20x-50=0,$$

воспользовавшись тем, что один из корней первого уравнения в два раза больше одного из корней второго уравнения.

6.352. Решить уравнения

$$x^4-x^3-22x^2+16x+96=0 \text{ и } x^3-2x^2-3x+10=0,$$

воспользовавшись тем, что у них есть общий корень.

6.353. Решить уравнение

$$x^3-3\sqrt{3}\,x^2+7x-\sqrt{3}=0,$$

если известно, что один из его корней отличается от некоторого другого корня на $\sqrt{2}$.

6.354. Решить уравнение

$$8x^3+4x^2-34x+15=0,$$

если известно, что два из его корней x_1 и x_2 удовлетворяют соотношению $2x_1-4x_2=1$.

6.355. Составить уравнение четвертой степени с корнями x_1, x_2, $1/x_1$, $1/x_2$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(c\neq 0)$.

6.356. Решить уравнение

$$x^4-6x^3+7x^2+6x-2=0,$$

если известно, что оно имеет по крайней мере одну пару корней, разность между которыми равна единице.

6.357. Решить уравнение

$$3x^3+2\sqrt{3}\,x^2-21x+6\sqrt{3}=0,$$

если известно, что произведение двух его корней равно единице.

6.358. Решить уравнения

$$x^3-7x^2+12x-10=0,\quad x^3-10x^2-2x+20=0,$$

если известно, что один из корней первого уравнения в два раза меньше одного из корней второго уравнения.

6.359. Найти все три корня уравнения

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

если его коэффициенты удовлетворяют условию $ad=bc$.

6.360. Показать, что условие

$$kb^2-(k+1)^2\,ac=0 \qquad (k\neq 0)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы отношение корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ было равно k.

6.361. Решить уравнение

$$2ax^3-(2a^2+a+2)\,x^2+(a^2+2a+1)\,x-a=0,$$

если известно, что произведение двух его корней равно единице.

6.362. Найти x из уравнения

$$ax^3-(a-1)^2\,x^2-(2a^2-a+2)\,x+2a=0.$$

6.363. 1) Пусть числа x_1, x_2 и x_3 служат корнями многочлена ax^3+bx^2+cx+d. В таком случае имеет место тождество

$$ax^3+bx^2+cx+d=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3).$$

Воспользоваться этим тождеством для получения формул, связывающих корни и коэффициенты данного многочлена.

2) При помощи формул, полученных в п. 1), найти корни x_1, x_2 и x_3 уравнения

$$8x^3-20x^2-10x+33=0,$$

составив и решив новое кубическое уравнение с корнями x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1.

6.364. Найти корни уравнения

$$(x^3+x^{-3})+(x^2+x^{-2})+(x+x^{-1})=6.$$

6.365. Составить уравнение с целыми коэффициентами возможно более низкой степени, одним из корней которого было бы число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

6.366. Показать, что корни уравнения

$$x+x^{-1}=2\cos 40^\circ$$

являются также корнями уравнения

$$x^4+x^{-4}=2\cos 160^\circ.$$

6.367. Решить уравнение

$$x^4-4x^3+3x^2+8x-10=0,$$

если известно, что два его корня отличаются друг от друга только знаком.

6.368. Решить уравнение

$$2x^5-x^4-2x^3+x^2-4x+2=0,$$

если известно, что оно имеет три корня, из которых два являются противоположными числами. (Противоположными называются два числа, сумма которых равна нулю.)

6.369. Показать, что уравнение

$$\sqrt{x^4+x-2}+\sqrt[4]{x^4+x-2}=6$$

имеет единственный корень, и найти этот корень.

6.370. Один из корней уравнения

$$2x^3-7x^2-12x+k=0$$

с целым свободным членом k лишь целым множителем отличается от числа $\sqrt{2}+1$. Решить это уравнение и отыскать его свободный член k.

Глава 7

ЛОГАРИФМЫ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Группа А

Упростить (7.001—7.014):

7.001. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

7.002. $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

7.003. $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$. **7.004.** $-\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

7.005. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}}+5^{\log_{25} 49}\right)\cdot\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}}-8^{\log_4 9}\right)}{3+5^{\frac{1}{\log_{16} 25}}\cdot 5^{\log_5 3}}$.

7.006. $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$.

7.007. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

7.008. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409}\cdot\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25} 7}}-125^{\log_{25} 6}\right)$.

7.009. $\left(2^{\log_{\sqrt[4]{2}} a}-3^{\log_{27}(a^2+1)^3}-2a\right):$

$:\left(7^{4\log_{49} a}-5^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} a}-1\right)$.

7.010. $\dfrac{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log^2_{1/a}\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1)\cdot\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}$.

7.011. $a^{\frac{2}{\log_b a}+1}b-2a^{\log_a b+1}b^{\log_b a+1}+ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}$.

7.012. $\dfrac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{40}25}}+2\log_2\log_2\log_2 a^{2\log_a 4}\right)\cdot 4^{-\frac{2}{\log_3 4}}-a^2}{1-a}$.

7.013. $(\log_a b+\log_b a+2)\cdot(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-1$.

7.014. $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\cdot\log_a \frac{a}{b}}$.

7.015. Если $\log_a 27=b$, то чему равен $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{a}$?

7.016. Показать, что при условии $x>0$ и $y>0$ из равенства $x^2+4y^2=12xy$ следует равенство

$$\lg(x+2y)-2\lg 2=\frac{1}{2}(\lg x+\lg y).$$

7.017. Вычислить сумму 2^x+2^{-x}, зная, что $4^x+4^{-x}=23$.

7.018. Доказать, что если $y=2^{x^2}$ и $z=2^{y^2}$, то $x=\pm\sqrt{\dfrac{\log_2\log_2 z}{2}}$, и указать все значения z, при которых x принимает действительные значения.

Решить уравнения (7.019—7.041):

7.019. $\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg 2=\lg\left(27-3^{1/x}\right)$.

7.020. $3\log_5 2+2-x=\log_5(3^x-5^{2-x})$.

7.021. $\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1$.

7.022. $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2-0,5=0$.

7.023. $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$.

7.024. $\log_2 182-2\log_2\sqrt{5-x}=\log_2(11-x)+1$.

7.025. $\log_5\sqrt{x-9}-\log_5 10+\log_5\sqrt{2x-1}=0$.

7.026. $\lg(x+1,5)=-\lg x$.

7.027. $5^{2(\log_5 2+x)}-2=5^{x+\log_5 2}$.

7.028. $x\lg\sqrt[5]{5^{2x-8}}-\lg 25=0$.

7.029. $\log_5(x-2)+\log_{\sqrt{5}}(x^3-2)+\log_{0,2}(x-2)=4$.

7.030. $\dfrac{2-\lg 4+\lg 0,12}{\lg\left(\sqrt{3x+1}+4\right)-\lg 2x}=1$.

7.031. $x^{\lg^3 x-5\lg x}=0,0001$.

7.032. $\lg\left(3^x-2^{4-x}\right)=2+0,25\log 16-0,5x\lg 4$.

[7.033.] $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2-20x+55}}\right)=0.$

7.034. $\lg\left(10^{\lg(x^2-21)}\right)-2=\lg x-\lg 25.$

7.035. $\lg(x^2+1)=2\lg^{-1}(x^2+1)-1.$

7.036. $\lg\sqrt{5^{x(13-x)}}+11\lg 2=11.$

7.037. $x(\lg 5-1)=\lg(2^x+1)-\lg 6.$

7.038. $\lg 81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}=0.$ **7.039.** $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4.$

7.040. $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8.$

7.041. $\lg(5-x)+2\lg\sqrt{3-x}=1.$

7.042. Найти натуральное число n из равенства

$$3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\ldots 3^{3n-1}=27^5.$$

Решить уравнения **(7.043—7.103)**:

7.043. $0{,}5(\lg(x^2-55x+90)-\lg(x-36))=\lg\sqrt{2}.$

7.044. $\lg(5-x)-\frac{1}{3}\lg(35-x^3)=0.$

7.045. $\frac{\lg 8-\lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}=-1.$

7.046. $\log_{1/2}^2 4x+\log_2\frac{x^2}{8}=8.$

7.047. $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0.$

7.048. $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11.$

7.049. $\log_3(3^x-8)=2-x.$

7.050. $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot 5^{\lg x-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}.$

7.051. $\frac{\log_5\left(\sqrt{2x-7}+1\right)}{\log_5\left(\sqrt{2x-7}+7\right)}=0{,}5.$

7.052. $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}=81.$

7.053. $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{1/x}}}=4\sqrt[3]{2}.$

7.054. $\sqrt{2}\cdot 0{,}5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}-16^{\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}}=0.$

7.055. $8^{\frac{x-3}{3x-7}}\sqrt[3]{\sqrt{0{,}25^{\frac{3x-1}{x-1}}}}=1.$

7.056. $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot\left(10^{x-1}\right)^3.$

7.057. $0{,}6^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3.$

7.058. $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}.$

7.059. $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2.$

7.060. $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2.$

7.061. $10^{2/x}+25^{1/x}=4{,}25\cdot 50^{1/x}.$

7.062. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0.$

7.063. $4^x-10\cdot 2^{x-1}-24=0.$

7.064. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x+\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10}=84.$

7.065. $8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0.$

7.066. $2\log_x 27-3\log_{27}x=1.$ **7.067.** $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}.$

7.068. $x^{\log_4 x-2}=2^{3(\log_4 x-1)}.$ **7.069.** $\frac{2^x+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}.$

7.070. $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99.$ **7.071.** $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{100}}=0.$

[7.072.] $7^x\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2-6}-\left(\frac{7}{4}\right)^x=0.$

[7.073.] $3\cdot 4^{\log_x 2}-46\cdot 2^{\log_x 2-1}=8.$

7.074. $9^{\log_{1/3}(x+1)}=5^{\log_{1/5}(2x^2+1)}.$

7.075. $27^{\lg x}-7\cdot 9^{\lg x}-21\cdot 3^{\lg x}+27=0.$

7.076. $\log_2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1.$

7.077. $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0.$

7.078. $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27}x\cdot\log_{81}x=2/3.$

7.079. $4^{\log_5 x^2}-4^{\log_5 x+1}+4^{\log_5 x-1}-1=0.$

7.080. $\sqrt{\log_a x}+\sqrt{\log_x a}=10/3.$

7.081. $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1.$

7.082. $\dfrac{\lg(2x-19)-\lg(3x-20)}{\lg x}=-1.$

7.083. $\log_a y+\log_a(y+5)+\log_a 0{,}02=0.$

7.084. $\log_x\sqrt{2}-\log_x^2\sqrt{2}=\log_3 27-\log_x(2x).$

7.085. $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0.$

7.086. $\lg 36-\lg 4+\lg 81=\lg 3^{x^2-4x-15}.$

7.087. $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}.$

7.088. $\frac{1}{3}\lg\left(271+3^{2\sqrt{x}}\right)+\lg 10=2.$

7.089. $\left(\left(\sqrt[5]{27}\right)^{\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right)^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}}=\sqrt[4]{3^7}.$

7.090. $x^{\lg x}=1000x^2.$ 7.091. $\lg(x(x+9))+\lg\frac{x+9}{x}=0.$

7.092. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\frac{1}{x}.$

7.093. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=\dfrac{2}{\log_4 x}.$

7.094. $\lg\left(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right)=0.$ 7.095. $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400.$

7.096. $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_5 0{,}2.$

7.097. $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3).$

[7.098.] $\sqrt[3]{27^{5\sqrt{x}}}=3^{x(\sqrt{x}-4)}.$

7.099. $\log_6\sqrt[7]{3^{x(15-x)}}+8\log_6 2=8.$

7.100. $\log_5(4^x+144)-4\log_5 2=1+\log_5(2^{x-2}+1).$

7.101. $27x^{\log_{27}x}=x^{10/3}.$ 7.102. $\log_x 9+\log_{x^2}729=10.$

7.103. $\log_2(25^{x+3}-1)=2+\log_2(5^{x+3}+1).$

Решить системы уравнений (7.104—7.125):

7.104. $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2,\\ x^2-y=20.\end{cases}$

7.105. $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50,\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5.\end{cases}$

7.106. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2-\lg 5, \\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=\lg 1{,}2+1. \end{cases}$

7.107. $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9, \\ x+y-20=0. \end{cases}$

7.108. $\begin{cases} 3^y\cdot 9^x=81, \\ \lg(y+x)^2-\lg x=2\lg 3. \end{cases}$

7.109. $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=5/2, \\ xy=27. \end{cases}$

7.110. $\begin{cases} 3^{2x}-2^y=725, \\ 3^x-2^{y/2}=25. \end{cases}$

7.111. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2, \\ \log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y. \end{cases}$

7.112. $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}}=81, \\ \lg\sqrt{xy}=1+\lg 3. \end{cases}$

7.113. $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}}+2^{\frac{y-x}{2}}=2{,}5, \\ \lg(2x-y)+1=\lg(y+2x)+\lg 6. \end{cases}$

7.114. $\begin{cases} x^{2y^2-1}=5, \\ x^{y^2+2}=125. \end{cases}$

7.115. $\begin{cases} 8\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-y}=0{,}5^{y-3}, \\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3. \end{cases}$

7.116. $\begin{cases} 4^{x+y}=2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x}=y^4-5. \end{cases}$

7.117. $\begin{cases} \log_4 x-\log_2 y=0, \\ x^2-2y^2-8=0. \end{cases}$

7.118. $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y=4, \\ \log_4 x+\log_2 y=5. \end{cases}$

7.119. $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6, \\ x^2+5y^2=6xy. \end{cases}$

7.120. $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=6, \\ 3^x\cdot 4^y=12, \end{cases}$

7.121. $\begin{cases} y=1+\log_4 x, \\ x^y=4^6. \end{cases}$

7.122. $\begin{cases} \log_{\sqrt{x}} xy=8, \\ \log_3\left(\log_{1/9}\dfrac{x}{y}\right)=0. \end{cases}$

7.123. $\begin{cases} \log_{xy}(x-y)=1, \\ \log_{xy}(x+y)=0. \end{cases}$

7.124. $\begin{cases} (x+y)\,2^{y-2x}=6{,}25, \\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}}=5. \end{cases}$

7.125. $\begin{cases} 8^{\log_9(x-4y)}=1, \\ 4^{x-2y}-7\cdot 2^{x-2y}=8. \end{cases}$

Группа Б

Упростить выражения (7.126—7.132):

7.126. $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}}\right)^{2\log_{ab}(a+b)}$.

7.127. $\left(\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\right)^{1/2}+2\right)^{1/2}-\log_b a-\log_a b$.

7.128. $\log_2 2x^2+\log_2 x\cdot x^{\log_x(\log_2 x+1)}+$

$$+\frac{1}{2}\log_4^2 x^4+2^{-3\log_{1/2}\log_2 x}.$$

7.129. $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}}+8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}}+1\right)^{1/2}$.

7.130. $\dfrac{\log_a b-\log_{\sqrt{a}/b^3}\sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b-\log_{a/b^6} b}:\log_b\left(a^3b^{-12}\right)$.

7.131. $\left(6\left(\log_b a\cdot\log_{a^2} b+1\right)+\log_a b^{-6}+\log_a^2 b\right)^{1/2}-\log_a b$ при $a>1$.

7.132. $\dfrac{\log_a b+\log_a\left(b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right)}{\log_a b-\log_{ab} b}\cdot\dfrac{\log_{ab} b\cdot\log_a b}{b^{2\log_b\log_a b}-1}$.

7.133. Известно, что $\log_a x=\alpha$, $\log_b x=\beta$, $\log_c x=\gamma$, $\log_d x=\delta$ и $x\neq 1$. Найти $\log_{abcd} x$.

7.134. Известно, что $\beta=10^{\frac{1}{1-\lg\alpha}}$ и $\gamma=10^{\frac{1}{1-\lg\beta}}$. Найти зависимость α от γ.

7.135. Доказать, что $\log_{ab} c=\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_a c+\log_b c}$.

7.136. Упростить выражение

$$\log_{a+b} m+\log_{a-b} m-2\log_{a+b} m\cdot\log_{a-b} m,$$

если известно, что $m^2=a^2-b^2$.

7.137. Найти $\log_{30} 8$, если известно, что

$$\lg 5=a \quad \text{и} \quad \lg 3=b.$$

7.138. Доказать, что

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b.$$

7.139. Зная, что $\lg 2=a$ и $\log_2 7=b$, найти $\lg 56$.

7.140. Зная, что $b=8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ и $c=8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, показать, что $a=8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

Решить уравнения (7.141—7.234):

[7.141.] $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.

7.142. $\sqrt{\log_{0,04} x+1}+\sqrt{\log_{0,2} x+3}=1$.

7.143. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}}=-\log_x 5$.

7.144. $\log_{4x+1} 7+\log_{9x} 7=0$.

7.145. $\left(16^{\sin x}\right)^{\cos x}+\dfrac{6}{4^{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}-4=0$.

7.146. $\log_2 (2-x)-\log_2\left(2-\sqrt{x}\right)=$
$=\log_2 \sqrt{2-x}-0,5$.

7.147. $5^{1+\log_4 x}+5^{\log_{0,25} x-1}=26/5$.

7.148. $\sqrt{2\log_8 (-x)}-\log_8 \sqrt{x^2}=0$.

7.149. $2\lg x^2-(\lg (-x))^2=4$.

7.150. $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$.

7.151. $\lg (x^3+8)-0,5\lg (x^2+4x+4)=\lg 7$.

7.152. $2^{\log_5 x^2}-2^{1+\log_5 x}+2^{\log_5 x-1}-1=0$.

7.153. $\dfrac{\log_2 (9-2^x)}{3-x}=1$.

7.154. $\log_5 x+\log_{25} x=\log_{1/5} \sqrt{3}$.

7.155. $\log_{a^2} x^2+\log_a (x-1)=\log_a \log_{\sqrt{5}} 5$.

7.156. $x^{2\lg^2 x}=10x^3$.

7.157. $\log_x 3+\log_3 x=\log_{\sqrt{x}} 3+\log_3 \sqrt{x}+0,5$.

7.158. $\log_{\sqrt{x}} a\cdot\log_{a^2} \dfrac{a^2}{2a-x}=1$.

[7.159.] $5^{-2\log_{0,04}(3-4x^2)}+1,5\log_{1/8} 4^x=0$.

7.160. $\log_a x+\log_{a^2} x+\log_{a^3} x=11$.

7.161. $6-\left(1+4\cdot 9^{4-2\log_{\sqrt{3}}3}\right)\log_7 x=\log_x 7.$

7.162. $\log_{12}(4^{3x}+3x-9)=3x-x\log_{12}27.$

7.163. $x^2\cdot\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4.$

7.164. $\sqrt{\log_5^2 x+\log_x^2 5+2}=2{,}5.$

7.165. $\log_x m\cdot\log_{\sqrt{m}}\dfrac{m}{\sqrt{2m-x}}=1.$

7.166. $\log_2 3+2\log_4 x=x^{\frac{\log_9 16}{\log_3 x}}.$

7.167. $\log_{10}x+\log_{\sqrt{10}}x+\log_{\sqrt[3]{10}}x+\ldots+\lg_{\sqrt[10]{10}}x=5{,}5.$

7.168. $\sqrt{3\log_2^2 x-1-9\log_x^2 2}=5.$

7.169. $\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\sqrt[4]{3}}x+\log_{\sqrt[6]{3}}x+\ldots+\log_{\sqrt[16]{3}}x=36.$

7.170. $\log_x 2-\log_4 x+7/6=0.$

7.171. $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1.$

7.172. $3^{\log_3 x+\log_3 x^2+\log_3 x^3+\ldots+\log_3 x^8}=27x^{30}.$

7.173. $5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}}\cdot 0{,}2^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}}=125^{x-4}\cdot 0{,}04^{x-2}.$

7.174. $\left(3\cdot\left(3^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=3/\sqrt[10]{3}.$

7.175. $\log_2\log_3(x^2-16)-\log_{1/2}\log_{1/3}\dfrac{1}{x^2-16}=2.$

7.176. $\dfrac{1+2\log_9 2}{\log_9 x}-1=2\cdot\log_x 3\cdot\log_9(12-x).$

7.177. $3\lg 2+\lg\left(2^{\sqrt{x-1}-1}-1\right)=$

$$=\lg\left(0{,}4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}}+4\right)+1.$$

7.178. $5\log_{x/9}x+\log_{9/x}x^3+8\log_{9x^2}x^2=2.$

7.179. $20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x}x^3-3\log_{x/2}x^2=0.$

7.180. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}}=\sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$

7.181. $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1.$ **7.182.** $|x-2|^{10x^2-3x-1}=1.$

7.183. $\log_{\sqrt{a}}\dfrac{\sqrt{2a-x}}{a}-\log_{1/a}x=0.$

7.184. $2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=6{,}5+3{,}25+1{,}625+\ldots$ (выражение в правой части — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия).

7.185. $49^{1+\sqrt{x-2}}-344\cdot 7^{\sqrt{x-2}}=-7.$

7.186. $5^{x-1}+5\cdot 0{,}2^{x-2}=26.$

7.187. $\log_{\sqrt{3}} x\cdot\sqrt{\log_{\sqrt{3}}3-\log_x 9}+4=0.$

7.188. $\dfrac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2}+\log_{2x} 2\cdot\log_{1/2} 2x=0.$

7.189. $|\log_{\sqrt{3}} x-2|-|\log_3 x-2|=2.$

7.190. $9^x+6^x=2^{2x+1}.$

7.191. $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0.$

7.192. $27^x-13\cdot 9^x+13\cdot 3^{x+1}-27=0.$

7.193. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14.$

7.194. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2\log_9(x+1)}\cdot\left(\dfrac{125}{27}\right)^{\log_{1/27}(x-1)}=\dfrac{\log_5 27}{\log_5 243}.$

7.195. $5^{1+x^3}-5^{1-x^3}=24.$

7.196. $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0.$

7.197. $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{\lg x^2+2}=0.$

7.198. $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$

7.199. $\log_5\left(2^{1,5x-2,5}+2^{1,5x-0,5}-0{,}01\cdot 5^{3x+1}\right)=3x-1.$

7.200. $\dfrac{8^x+2^x}{4^x-2}=5.$

7.201. $\log_{3x+7}(5x+3)+\log_{5x+3}(3x+7)=2.$

7.202. $2{,}5^{\log_3 x}+0{,}4^{\log_3 x}=2{,}9.$

7.203. $(\lg(x+20)-\lg x)\log_x 0{,}1=-1.$

7.204. $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}.$

7.205. $27\cdot 2^{-3x}+9\cdot 2^x-2^{3x}-27\cdot 2^{-x}=8.$

7.206. $\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0,5}(x+1).$

7.207. $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2.$

7.208. $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3.$

7.209. $(3\log_a x-2)\log_x^2 a=\log_{\sqrt{a}} x-3\quad(a>0,\ a\neq 1).$

7.210. $\dfrac{10x^{2\lg^2 x}}{x^8}=\dfrac{x^{3\lg x}}{10}$.

7.211. $x\log_{x+1}5\cdot\log_{\sqrt[3]{1/5}}(x+1)=\dfrac{x-4}{x}$.

7.212. $3\lg(x^2)-\lg^2(-x)=9$.

7.213. $4\log_4^2(-x)+2\log_4(x^2)=-1$.

7.214. $\dfrac{2}{\sqrt{3}\log_2\sqrt{x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{\log_2(-x)}}=0$.

7.215. $\lg\sqrt{10}-\lg 100=\sqrt[6]{\lg\left(390635-5\sqrt[3]{2x}\right)-2{,}5}$.

7.216. $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^3=25$.

7.217. $\dfrac{\log_2(x^3+3x^2+2x-1)}{\log_2(x^3+2x^2-3x+5)}=\log_{2x}x+\log_{2x}2$.

7.218. $\left(16\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}-0{,}048\right)\lg(x^3+2x+1)=0$.

7.219. $5^x\cdot\sqrt[x]{8^{x-1}}=500$.

7.220. $3\log_2^2\sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2$.

7.221. $\log_{1+x}(2x^3+2x^2-3x+1)=3$.

7.222. $\log_2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\log_2 x}=4/3$.

7.223. $\sqrt{\log_5 x}+\sqrt[3]{\log_5 x}=2$.

7.224. $\log_2 x\cdot\log_3 x=\log_3(x^3)+\log_2(x^2)-6$.

7.225. $3\cdot 4^{(x-2)}+27=a+a\cdot 4^{(x-2)}$
(найти область допустимых значений a).

7.226. $\log_a x+\log_{\sqrt{a}}x+\log_{\sqrt[3]{a^2}}x=27$.

7.227. $x^{2-\lg^2 x-\lg x^2}-\dfrac{1}{x}=0$.

7.228. $\dfrac{2}{15}\left(16^{\log_9 x+1}-16^{\log_3\sqrt{x}}\right)+$

$$+16^{\log_3 x}-\log_{\sqrt{5}}5\sqrt{5}=0.$$

7.229. $\log_a\sqrt{4+x}+3\log_{a^2}(4-x)-\log_{a^4}(16-x^2)^2=2$
(рассмотреть при всех действительных значениях a).

7.230. $\log_2\sqrt[3]{4}+\log_8\left(9^{x+1}-1\right)=1+\log_8\left(3^{x+1}+1\right)$.

7.231. $25^{\log_4 x}-5^{\log_{16}x^2+1}=\log_{\sqrt{3}}9\sqrt{3}-25^{\log_{16}x}$.

7.232. $\left(1+\frac{x}{2}\right)\log_2 3-\log_2(3^x-13)=2.$

7.233. $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ \ldots\ \cdot\log_n(n+1)=10\quad(n\in N).$

7.234. $2^{\frac{a+3}{a+2}}\cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}}=4^{\frac{1}{x}}$

(рассмотреть при всех действительных значениях a).

Решить системы уравнений (7.235—7.270):

7.235. $\begin{cases}2-\log_2 y=2\log_2(x+y),\\ \log_2(x+y)+\log_2(x^2-xy+y^2)=1.\end{cases}$

7.236. $\begin{cases}3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0,\\ \lg(3x-y)+\lg(y+x)-4\lg 2=0.\end{cases}$

7.237. $\begin{cases}(0{,}48^{x^2+2})^{2x-y}=1,\\ \lg(x+y)-1=\lg 6-\lg(x+2y).\end{cases}$

7.238. $\begin{cases}\log_2(x-y)=5-\log_2(x+y),\\ \frac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1.\end{cases}$

7.239. $\begin{cases}4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32,\\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y).\end{cases}$

7.240. $\begin{cases}y^{5x^2-51x+10}=1,\\ xy=15.\end{cases}$ 7.241. $\begin{cases}\log_x y=2,\\ \log_{x+1}(y+23)=3.\end{cases}$

7.242. $\begin{cases}(x^2+y)\,2^{y-x^2}=1,\\ 9(x^2+y)=6^{x^2-y}.\end{cases}$ 7.243. $\begin{cases}y-\log_3 x=1,\\ x^y=3^{12}.\end{cases}$

7.244. $\begin{cases}9^{\sqrt[4]{xy^2}}-27\cdot 3^{\sqrt{y}}=0,\\ \frac{1}{4}\lg x+\frac{1}{2}\lg y=\lg\left(4-\sqrt[4]{x}\right).\end{cases}$

7.245. $\begin{cases}3^{-x}\cdot 2^y=1152,\\ \log_{\sqrt{5}}(x+y)=2.\end{cases}$

7.246. $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=1+\lg 8,\\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 3.\end{cases}$

7.247. $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2.\end{cases}$

7.248. $\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)}=48, \\ 2\log_5(2y-x-12)-\log_5(y-x)=\log_5(y+x). \end{cases}$

7.249. $\log_9(x^3+y^3)=\log_3(x^2-y^2)=\log_3(x+y)$.

7.250. $\begin{cases} (\log_a x+\log_a y-2)\log_{16} a=1, \\ 2x+y-20a=0. \end{cases}$

7.251. $\begin{cases} (x+y)\,3^{y-x}=\dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5(x+y)=x-y. \end{cases}$

7.252. $\begin{cases} 2^{\sqrt{xy}-2}+4^{\sqrt{xy}-1}=5, \\ \dfrac{3(x+y)}{x-y}+\dfrac{5(x-y)}{x+y}=8. \end{cases}$

7.253. $\begin{cases} x^y=2, \\ (2x)^{y^2}=64 \quad (x>0). \end{cases}$

7.254. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ 2^{-\log_2 x}+5^{\log_5 \frac{1}{y}}=1/3. \end{cases}$

7.255. $\begin{cases} x^{y^2-7y+10}=1, \\ x+y=8 \quad (x>0). \end{cases}$

7.256. $\begin{cases} 2\left(\log_{1/y} x-2\log_{x^2} y\right)+5=0, \\ xy^2=32. \end{cases}$

7.257. $\begin{cases} yx^{\log_y x}=x^{2,5}, \\ \log_3 y\cdot\log_y(y-2x)=1. \end{cases}$

[7.258.] $\begin{cases} \lg(x-3)-\lg(5-y)=0, \\ 4^{-1}\sqrt[y]{4^x}-8\sqrt[x]{8^y}=0. \end{cases}$

7.259. $\begin{cases} \log_x(3x+2y)=2, \\ \log_y(2x+3y)=2. \end{cases}$

7.260. $\begin{cases} x+y=12, \\ 2\left(2\log_{y^2} x-\log_{1/x} y\right)=5. \end{cases}$

7.261. $\begin{cases} x^{x^2-y^2-16}=1, \\ x-y=2 \quad (x>0). \end{cases}$

7.262. $\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1, \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2. \end{cases}$

7.263. $\begin{cases} 4^x - 7\cdot 2^{x-\frac{y}{2}} = 2^{3-y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$

7.264. $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 200, \\ 5^{2\sqrt[3]{x}} + 2^{2\sqrt{y}} = 689. \end{cases}$

7.265. $\begin{cases} 10^{\lg \frac{1}{2}(x^2+y^2)+1,5} = 100\sqrt{10}, \\ \dfrac{\sqrt{x^2+10y}}{3} = \dfrac{6}{2\sqrt{x^2+10y}-9}. \end{cases}$

7.266. $\begin{cases} y^x = 1,5 + y^{-x}, \\ y^{2,5+x} = 64 \ (y > 0). \end{cases}$

7.267. $\begin{cases} \lg(x+y) - \lg 5 = \lg x + \lg y - \lg 6, \\ \dfrac{\lg x}{\lg(y+6) - (\lg y + \lg 6)} = -1. \end{cases}$

7.268. $\begin{cases} \log_{xy} \dfrac{y}{x} - \log_y^2 x = 1, \\ \log_2 (y - x) = 1. \end{cases}$

7.269. $\begin{cases} (x+y)^x = (x-y)^y, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$

7.270. $\begin{cases} x^{x-2y} = 36, \\ 4(x-2y) + \log_6 x = 9 \end{cases}$

(найти только целочисленные решения).

Группа B

Упростить выражения (7.271—7.275):

7.271. $\dfrac{\left(\lg b \cdot 2^{\log_2 \lg b}\right)^{1/2} \cdot \lg^{-1/2} b^2}{\sqrt{\dfrac{\lg^2 b + 1}{2\lg b} + 1 - 10^{1/2 \lg\lg b^{1/2}}}}.$

7.272. $2\log_a^{1/2} b\left(\left(\log_a \sqrt[4]{ab} + \log_b \sqrt[4]{ab}\right)^{1/2} - \right.$

$\left. - \left(\log_a \sqrt[4]{\dfrac{b}{a}} + \log_b \sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}\right)^{1/2}\right)$, если $a > 1$ и $b > 1$.

7.273. $\sqrt{\log_n p+\log_p n+2}\cdot(\log_n p-\log_{np} p)\cdot\sqrt{\log_n p}$.

7.274. $\left(\left(\dfrac{\log_a b+1}{2\log_a b}-1\right)^{1/2}-\left(\dfrac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}+1\right)^{1/2}\right)\cdot\sqrt{2}\,\log_a^{1/2} b$

при $a>1$.

7.275. $\dfrac{1-\log_{1/a}\dfrac{1}{(a-b)^2}+\log_a^2(a-b)}{\left(1-\log_{\sqrt{a}}(a-b)+\log_a^2(a-b)\right)^{1/2}}$.

7.276. Заметив, что $675=9\cdot75$, а $135=3\cdot45$, дать без помощи таблиц ответ на вопрос о том, какое число больше: $\log_{135}675$ или $\log_{45}75$.

7.277. Уравнение $4^x+10^x=25^x$ имеет единственный корень. Найти его и выяснить: искомый корень положителен или отрицателен? больше или меньше единицы?

7.278. Показать, что $\log_3 12=\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4+1$.

7.279. Выражение

$$\log_m A\cdot\log_n A+\log_n A\cdot\log_p A+\log_p A\cdot\log_m A$$

представить в форме произведения.

7.280. Показать, что

$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7=1/3.$$

7.281. Упростить выражение

$$\left(\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\right)^{1/2}-2\right)^{1/2}$$

при условии, что $1<a<b$.

7.282. При каких значениях p уравнение

$$\lg(x^2+2px)-\lg(8x-6p-3)=0$$

имеет единственный корень?

7.283. Определить, при каких значениях a уравнение

$$2\lg(x+3)=\lg(ax)$$

имеет единственный корень.

Решить уравнения (7.284—7.308):

7.284. $2\log_9^2 x=\log_3 x\cdot\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$.

7.285. $\left(1+\log_x\dfrac{4-x}{10}\right)\cdot\lg x=\lg\lg 10^3-1$.

7.286. $3\log_x 4+2\log_{4x}4+3\log_{16x}4=0$.

7.287. $4^{\log_{16}x}-3^{\log_{16}x-0,5}=3^{\log_{16}x+0,5}-2^{2\log_{16}x-1}$.

7.288. $\log_{x+1}(x^3-9x+8)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3$.

7.289. $\dfrac{2-4\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)}-1=\dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$.

7.290. $2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-2\cdot0,25^{-\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}}-1=0$.

7.291. $\lg 2x+\lg(2-x)=\lg\lg p$ (указать допустимые значения p).

7.292. $\log_4 x+\log_x 2-\log_4 \sqrt{x}=1$.

7.293. $\log_k x+\log_{\sqrt{k}} x+\ldots+\lg_{\sqrt[k]{k}} x=\dfrac{k+1}{2}$ $(k \in N)$.

7.294. $2-\log_{b^2}(1+x)=3\log_b \sqrt{x-1}-\log_{b^4}(x^2-1)^2$.

7.295. $m^{1+\log_3 x}+m^{1-\log_3 x}=m^2+1$ $(m>0,\ m\neq 1)$.

7.296. $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$.

7.297. $a^{2\lg x-\lg(6-x)}=1$ $(a>0)$.

7.298. $P^{\log_2(x+14)+\log_2(x+2)}=P^6$ $(P>0)$.

7.299. $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1$.

7.300. $(2^x-2\cdot 2^{-x})^{\log_a(2x+3)-\log_a x}=1$. 7.301. $|x|^{x^2-2x}=1$.

7.302. $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^2$. 7.303. $|2^x-1|+|2^x-2|=1$.

7.304. $\log_{\sqrt{x}}(x+12)=8\log_{x+12} x$ (ограничиться отысканием целого корня).

[7.305.] $5^{\lg x}-3^{\lg x}=5$, $(3)\cdot 3^{0,5\lg x}\cdot 5^{0,5(\lg x-2)}$.

7.306. $|\log_2(3x-1)-\log_2 3|=|\log_2(5-2x)-1|$.

[7.306.] $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$,

[7.307.] $\dfrac{\log_3 x-1}{\log_3 \dfrac{x}{3}}-2\log_3 \sqrt{x}+\log_3^2 x=3$.

7.308. $\log_{x+3}\left(3-\sqrt{1-2x+x^2}\right)=1/2$.

[7.308.] $\sqrt{\log_2(2x^2)\cdot\log_4(16x)}=\log_4 x^3$

Решить системы уравнений (7.309—7.315):

7.309. $\begin{cases}\log_2(u+v)-\log_2(u-v)=1,\\ u^2-v^2=2.\end{cases}$

7.310. $\begin{cases}x^p=y^q,\\ \log_a \dfrac{x}{y}=\dfrac{\log_a x}{\log_a y}\end{cases}$ $(p\neq q$ и $pq\neq 0)$.

7.311. $\begin{cases}3^{\lg x}=4^{\lg y},\\ (4x)^{\lg 4}=(3y)^{\lg 3}.\end{cases}$

7.312. $\begin{cases}xy=a^2,\\ \lg^2 x+\lg^2 y=2,5\lg^2(a^2)\end{cases}$ при условии $a<0$

7.313. $\begin{cases}x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4,\\ \log_4 x-\log_4 y=1.\end{cases}$ 7.314. $\begin{cases}(2^{x+y})^{x^2-xy-8}=1,\\ (0,37^{x-y})^{x^2+xy-2x-16}=1.\end{cases}$

7.315. $\begin{cases}x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27,\\ \log_3 y-\log_3 x=1.\end{cases}$

Глава 8
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Группа А

Решить уравнения (8.001—8.385):

8.001. $\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)$.

8.002. $7+4\sin x\cos x+1{,}5(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)=0$.

8.003. $\frac{4\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}^2x}+\sin^2 2x+1=0$.

8.004. $\frac{\sin^2 2x-4\sin^2 x}{\sin^2 2x+4\sin^2 x-4}+1=2\operatorname{tg}^2 x$.

8.005. $\sin z\cdot\sin(60^\circ-z)\cdot\sin(60^\circ+z)=1/8$.

8.006. $\cos^{-2}2t-\sin^{-2}2t=8/3$.

8.007. $\operatorname{tg}3t-\operatorname{tg}t-4\sin t=0$.

8.008. $\cos^{-1}3t-6\cos 3t=4\sin 3t$.

8.009. $\operatorname{ctg}t-\sin t=2\sin^2\frac{t}{2}$.

8.010. $8\cos z\cdot\cos(60^\circ-z)\cos(60^\circ+z)+1=0$.

8.011. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\operatorname{ctg}3x+\sin(\pi+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0$.

8.012. $\sin x\cos 2x+\cos x\cos 4x=$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right).$$

8.013. $\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$.

8.014. $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x$.

8.015. $\sin^2 2z+\sin^2 3z+\sin^2 4z+\sin^2 5z=2$.

8.016. $\operatorname{ctg}^4 2z+\sin^{-4}2z=25$

8.017. $\operatorname{tg}2x\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0$.

8.018. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2}x$.

8.019. $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}-\sin x\cdot\sin 3x-\sin 2x\cdot\sin 3x=0.$

8.020. $1-\sin 3x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2.$

8.021. $2\operatorname{ctg}^2 x\cos^2 x+4\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x-2=0.$

8.022. $2\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0.$

8.023. $\sin 7x+\sin 9x=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right).$

8.024. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x=0.$

8.025. $\sin(15^\circ+x)+\sin(45^\circ-x)=1.$

8.026. $\cos^{-1} x+\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}.$

8.027. $\sin x\cdot\sin 3x+\sin 4x\cdot\sin 8x=0.$

8.028. $2\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-3=0.$

8.029. $\cos x\cdot\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)+$
$$+\sin\left(\frac{3\pi}{4}+4x\right)\cos\left(\frac{7\pi}{4}-5x\right).$$

8.030. $2+\operatorname{tg} x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0.$

8.031. $\sin 2x+\sin(\pi-8x)=\sqrt{2}\cos 3x.$

8.032. $0{,}5(\cos 5x+\cos 7x)-\cos^2 2x+\sin^2 3x=0.$

8.033. $2(\cos 4x-\sin x\cos 3x)=\sin 4x+\sin 2x.$

8.034. $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x.$

8.035. $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0.$

8.036. $\sin 2x\sin 6x-\cos 2x\cos 6x=\sqrt{2}\sin 3x\cos 8x.$

8.037. $\sin 3x\cos 3x=\sin 2x.$

8.038. $\cos 2x-5\sin x-3=0.$

8.039. $3\sin 2x+2\cos 2x=3.$

8.040. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\operatorname{ctg}^2 x+\frac{1+\cos 2x}{\sin^2 x}=0.$

8.041. $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0.$

8.042. $2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1\right)=\cos t.$

8.043. $\sin 3z - \cos 3z = \sqrt{3/2}$.

8.044. $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.

8.045. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

8.046. $\sin \frac{z}{2} \cos \frac{3z}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2z = \sin \frac{3z}{2} \cos \frac{z}{2}$.

8.047. $8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$.

8.048. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) =$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right).$$

8.049. $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

8.050. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

8.051. $1 + \sin 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2$.

8.052. $\sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. 8.053. $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0$.

8.054. $\sin x + \sin 7x - \cos 5x + \cos(3x - 2\pi) = 0$.

8.055. $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = 25/16$.

8.056. $1 + \cos t + \cos 2t + \cos 3t = 0$.

8.057. $\cos 2x = \sqrt{2} (\cos x - \sin x)$.

8.058. $1 + \cos 7x = \left(\sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2}\right)^2$.

8.059. $2\,\mathrm{tg}^4 3x - 3\,\mathrm{tg}^2 3x + 1 = 0$.

8.060. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \cos\left(7x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

8.061. $4\,\mathrm{tg}^2 3x - \cos^{-2} 3x = 2$.

8.062. $\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cos^2 \frac{x}{2} = 0$.

8.063. $\sin 9x = 2\sin 3x$.

8.064. $(\sin^{-1} z + \cos^{-1} z)(\sin z + \cos z) + 2 = 0$.

8.065. $\sin 2z + \cos 2z = \sqrt{2} \sin 3z$.

8.066. $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

8.067. $\sin 3x + \sin 5x = 2(\cos^2 2x - \sin^2 3x)$.

8.068. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \mathrm{ctg}^2 x + \sin^{-2} x (1 + \cos 2x) = 0$.

8.069. $2\sin^3 x-\cos 2x-\sin x=0.$

8.070. $3\sin 5z-2\cos 5z=3.$

8.071. $4\sin 3z+\frac{1}{3}\cos 3z=3.$

8.072. $(\cos 6x-1)\operatorname{ctg} 3x=\sin 3x.$

8.073. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=3.$

8.074. $1-\cos(\pi+x)-\sin\frac{3\pi+x}{2}=0.$

8.075. $9^{\cos x}=9^{\sin x}\cdot 3^{2/\cos x}.$

8.076. $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0.$

8.077. $2\sin z-\cos z=2/5.$

8.078. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x.$

8.079. $(1+\sin x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\cos^{-1}x-\cos x.$

8.080. $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos 3x.$

8.081. $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2.$

8.082. $\cos 7x+\sin 8x=\cos 3x-\sin 2x.$

8.083. $\sin^2 x-2\sin x\cos x=3\cos^2 x.$

8.084. $\cos 5x+\cos 7x=\cos(\pi+6x).$

8.085. $4\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin(\pi+x)\cos x+$

$$+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(\pi+x)=1.$$

8.086. $\cos 6x=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right).$

8.087. $2\sin x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-3\sin(\pi-x)\cos x+$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=0.$$

8.088. $(\sin 4t+\cos 4t)^2=16\sin 2t\cos^3 2t-8\sin 2t\cos 2t.$

8.089. $\cos(2t-18^\circ)\cdot\operatorname{tg}50^\circ+\sin(2t-18^\circ)=\frac{1}{2\cos 130^\circ}.$

8.090. $\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{3t}{2}+\cos^{-1}\frac{t}{2}\sin^{-1}\frac{3t}{2}=1.$

8.091. $\frac{1}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}t}-\frac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}t}=\sin 2t.$

8.092. $\cos(20^\circ+x)+\cos(100^\circ-x)=1/2.$

8.093. $\cos t\sin\left(\frac{\pi}{2}+6t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin 6t=$

$=\cos 6t+\cos 4t.$

8.094. $\frac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}}=2.$

8.095. $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}+\sin 2x\cos 7x=0.$

8.096. $\sin 3x+\sin 5x=\sin 4x.$

8.097. $\sin z-\sin^2 z=\cos^2 z-\cos z.$

8.098. $\sin z+\sin 2z+\sin 3z=\cos z+\cos 2z+\cos 3z.$

8.099. $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x+1}+\frac{1}{\operatorname{tg}x-1}\right)=4.$

8.100. $1-\cos 6x=\operatorname{tg}3x.$

8.101. $\sqrt{2}\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0.$

8.102. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-0{,}5.$

8.103. $2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5.$

8.104. $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x.$

8.105. $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cos 2x.$

8.106. $\cos(3x-30^\circ)-\sin(3x-30^\circ)\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{2\cos 210^\circ}.$

8.107. $4\sin x+\cos x=4.$

8.108. $2\sin^2 z+\operatorname{tg}^2 z=2.$

8.109. $\cos 2x+\cos 6x+2\sin^2 x=1.$

8.110. $\cos 3x\cos 6x=\cos 4x\cos 7x.$

8.111. $\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\cos 5x=0.$

8.112. $\operatorname{ctg}^3 x+\sin^{-2}x-3\operatorname{ctg}x-4=0.$

8.113. $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=3/2.$

8.114. $1+\sin x-\cos 5x-\sin 7x=2\cos^2\frac{3}{2}x.$

8.115. $\frac{\sin z}{1+\cos z}=2-\operatorname{ctg} z.$

8.116. $\sin(15^\circ+x)+\cos(45^\circ+x)+\frac{1}{2}=0.$

8.117. $\cos 2x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x).$

8.118. $3(1-\sin t)+\sin^4 t=1+\cos^4 t.$

8.119. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-3\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2} x.$

8.120. $\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{3}{2}x-\sin^2 2x-\sin^2 4x=0.$

8.121. $\frac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$

8.122. $\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0.$

8.123. $\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0.$

8.124. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\cos^{-1} 4x.$

8.125. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\sin(\pi-5x)=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 3x).$

8.126. $\frac{1}{1+\cos^2 z}+\frac{1}{1+\sin^2 z}=\frac{16}{11}.$

8.127. $\frac{\cos x}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg} x}=2\sqrt{3}.$

8.128. $\cos 4x\cos(\pi+2x)-\sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x.$

8.129. $\sin x-\sin 3x-\sin 5x+\sin 7x=0.$

8.130. $\sin 3x-\sin 7x=\sqrt{3}\sin 2x.$

8.131. $\sqrt{3}-\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right).$

8.132. $\sin^2 x\cos^{-4} x-4\operatorname{tg}^2 x+3\cos^{-2} x-12=0.$

8.133. $\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x.$

8.134. $(\sin 2t-\sin^{-1} 2t)^2+(\cos^{-1} 2t-\cos 2t)^2=1.$

8.135. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+0{,}25$.

8.136. $\sin 2z-4\cos 2z=4$.

8.137. $3+2\sin 2x=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

8.138. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+t\right)=\sin t+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-t\right)$.

8.139. $\sin^3\frac{x}{3}-\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}-3\sin\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}+$

$$+3\cos^3\frac{x}{3}=0.$$

8.140. $\operatorname{tg}(x-15^\circ)\operatorname{ctg}(x+15^\circ)=1/3$.

8.141. $\cos(x+1)\sin 2(x+1)=\cos 3(x+1)\sin 4(x+1)$.

8.142. $\cos(4x+2)+3\sin(2x+1)=2$.

8.143. $\cos 4x+2\cos^2 x=1$.

8.144. $\sin^4 x+\cos^4 x=5/8$.

8.145. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.

8.146. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 50^\circ+\operatorname{tg} 70^\circ=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 50^\circ\operatorname{tg} 70^\circ$.

8.147. $\cos x-\sin x=4\cos x\sin^2 x$.

8.148. $\operatorname{tg} 2x\sin 2x-3\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2x\cos 2x=0$.

8.149. $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$.

8.150. $\sqrt{2}(1+\cos x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

8.151 $\sin\frac{3x-7\pi}{2}+\cos\frac{\pi-3x}{2}=\cos^{-1}\frac{3}{2}x$.

8.152. $\sin^2 3x=3\cos^2 3x$.

8.153. $\sin 3x+\sin x=4\sin^3 x$.

8.154. $\sin 6x+\sin 2x=\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$.

8.155. $\dfrac{2\cos(\pi+x)-5\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-\cos(\pi-x)}=\frac{3}{2}$.

8.156. $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2=2-2\cos\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)$.

8.157. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} 2x+1=4\cos^2 x+\frac{\sin 3x}{\sin x}-2\cos 2x$.

8.158. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 20^\circ+\operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} x=1$.

8.159. $2\cos^2\frac{x}{2}-1=\sin 3x$. **8.160.** $\sin^2 2x+\sin^2 x=9/16$.

8.161. $3\cos^2 x=\sin^2 x+\sin 2x$.

8.162. $2(1-\cos 2x)=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x$.

8.163. $a\cos^2\frac{x}{2}-(a+2b)\sin^2\frac{x}{2}=a\cos x-b\sin x$.

8.164. $\sin 5x=\cos 4x$. **8.165.** $2\,\mathrm{tg}\,x-2\,\mathrm{ctg}\,x=3$.

8.166. $25\sin^2 x+100\cos x=89$.

8.167. $\cos 2x+\sin^2 x+\sin x=0{,}25$.

8.168. $\frac{1}{1-\mathrm{tg}^2 2x}=1+\cos 4x$.

8.169. $\sin x+\sin 3x=4\cos^3 x$.

8.170. $\cos 2x+3\sin x=2$. **8.171.** $\cos 2x=1-\sin 2x$.

8.172. $\mathrm{tg}(70^\circ+x)+\mathrm{tg}(20^\circ-x)=2$.

8.173. $\sin x+\sin\frac{1}{\pi}=\sin\left(x+\frac{1}{\pi}\right)$.

8.174. $\mathrm{tg}^2 3x-2\sin^2 3x=0$.

8.175. $6\,\mathrm{ctg}^2 x-2\cos^2 x=3$.

Группа Б

8.176. $\sin^3 x(1+\mathrm{ctg}\,x)+\cos^3 x(1+\mathrm{tg}\,x)=2\sqrt{\sin x\cos x}$.

8.177. $\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}+\mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}+$
$+\sin x=4$.

8.178. $\mathrm{tg}(120^\circ+3x)-\mathrm{tg}(140^\circ-x)=2\sin(80^\circ+2x)$.

8.179. $\sin^2 x+2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin x\sin^2\frac{x}{2}+\mathrm{ctg}\,x=0$.

8.180. $\frac{\cos^2 z(1+\mathrm{ctg}\,z)-3}{\sin z-\cos z}=3\cos z$.

8.181. $\frac{1}{2\,\mathrm{ctg}^2 t+1}+\frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2 t+1}=\frac{15\cos 4t}{8+\sin^2 2t}$.

8.182. $\sin^3 z\cos z-\sin z\cos^3 z=\sqrt{2}/8$.

8.183. $\frac{6\cos^3 2t+2\sin^3 2t}{3\cos 2t-\sin 2t}=\cos 4t$.

8.184. $\cos z\cos 2z\cos 4z\cos 8z=1/16$.

8.185. $\dfrac{\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}}{2+\sin x}=\frac{1}{3}\cos x.$

8.186. $\operatorname{tg}^2 t-\dfrac{2\sin 2t+\sin 4t}{2\sin 2t-\sin 4t}=2\operatorname{ctg} 2t.$

8.187. $\sin^2 x\operatorname{tg} x+\cos^2 x\operatorname{ctg} x+2\sin x\cos x=4\sqrt{3}/3.$

8.188. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 15^\circ+\operatorname{ctg}(x+25^\circ)=$

$=\operatorname{ctg} 15^\circ\operatorname{ctg}(x+25^\circ)\operatorname{ctg} x.$

8.189. $\dfrac{40\left(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2}\right)}{16\sin\frac{t}{2}-25\cos\frac{t}{2}}=\sin t.$

8.190. $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right).$

8.191. $\sin^{-1} t-\sin^{-1} 2t=\sin^{-1} 4t.$

8.192. $\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\cdot\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}-3=0.$

8.193. $\operatorname{ctg}^2 2x+\dfrac{3(\cos 3x-\cos x)}{\sin 3x-\sin x}+2=0.$

8.194. $\operatorname{tg}^4 3t=\sin^2 6t.$ 8.195. $\dfrac{1-\sin^6 z-\cos^6 z}{1-\sin^4 z-\cos^4 z}=2\cos^2 3z.$

8.196. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\dfrac{\cos x-\sin x}{0{,}5\sin 2x}.$

8.197. $\dfrac{\operatorname{ctg} 2z}{\operatorname{ctg} z}+\dfrac{\operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} 2z}+2=0.$

8.198. $\cos^{-2} 2x\operatorname{tg} 2x+\sin^{-2} 2x\operatorname{ctg} 2x=$

$=\dfrac{8\cos^2 4x}{\sin^3 4x}+10\sin^{-1} 4x+4\sqrt{3}.$

8.199. $\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{8}\left(1-\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}\right).$

8.200. $\dfrac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$

8.201. $\sin 2x+2\operatorname{ctg} x=3.$

8.202. $2\cos 13x+3\cos 3x+3\cos 5x-8\cos x\cdot\cos^3 4x=0.$

8.203. $(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=3-\sin 4x.$

8.204. $\operatorname{tg}^3 t+6\sin^{-1}2t=8\sin^{-3}2t-3\operatorname{ctg} t.$

8.205. $2\sin x\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x-$

$$-5\cos^2 x\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0.$$

8.206. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x=\frac{82}{9}(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x+1)\cos 2x.$

8.207. $2\cos^6 2t-\cos^4 2t+1{,}5\sin^2 4t-3\sin^2 2t=0.$

8.208. $\sin 6x+2=2\cos 4x.$

8.209. $\sin^2 t\operatorname{tg} t+\cos^2 t\operatorname{ctg} t-2\sin t\cdot\cos t=$

$$=1+\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t.$$

8.210. $\operatorname{tg}^3 2x+\operatorname{ctg}^3 2x+6\sin^{-1}2x=8\sin^{-3}4x.$

8.211. $\cos x\cos 2x\sin 3x=0{,}25\sin 2x.$

8.212. $\cos 9x-2\cos 6x=2.$

8.213. $2\sin^5 2t-\sin^3 2t-6\sin^2 2t+3=0.$

8.214. $\sin^6 2t+\cos^6 2t=$

$$=\frac{3}{2}(\sin^4 2t+\cos^4 2t)+\frac{1}{2}(\sin t+\cos t).$$

8.215. $(\cos^{-2}2x+\operatorname{tg}^2 2x)(\sin^{-2}2x+\operatorname{ctg}^2 2x)=$

$$=4\sin^{-2}4x+5.$$

8.216. $\sin 3z+\sin^3 z=\frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2z.$

8.217. $(\cos 2x+(\cos x+\sin x)^2)(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)=0.$

8.218. $2\sin 2x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-$

$$-\cos 3x\cos^{-1}5x\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=0.$$

8.219. $3\operatorname{ctg} t-3\operatorname{tg} t+4\sin 2t=0.$

8.220. $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x+\cos^{-2}2x}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 2x+\sin^{-2}2x}=\frac{2}{3}.$

8.221. $\operatorname{tg} 3t+\operatorname{tg} t=2\sin 4t.$

8.222. $\sin(3\pi-x)+\operatorname{tg}(\pi+x)=\frac{\cos^{-1}x-\cos x}{2\sin x}.$

8.223. $\frac{1}{2}\sin 4x\sin x+\sin 2x\sin x=2\cos^2 x.$

8.224. $\dfrac{2(\cos^4 t+\sin^4 t)}{\cos^4 t-\sin^4 t}=\cos^{-1} 2t+\cos 4t+1.$

8.225. $\operatorname{tg} t=\dfrac{\sin^2 t+\sin 2t-1}{\cos^2 t-\sin 2t+1}.$

8.226. $\dfrac{\sin 2t+2\cos^2 t-1}{\cos t-\cos 3t+\sin 3t-\sin t}=\cos t.$

8.227. $\sin t^2-\sin t=0.$

8.228. $\sin^3 z \sin 3z+\cos^3 z \cos 3z=\cos^3 4z.$

8.229. $2\sin^4 t(\sin 2t-3)-2\sin^2 t(\sin 2t-3)-1=0.$

8.230. $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x=\frac{1}{8}\cos 15x.$

8.231. $2\sin^4 x+1{,}25\sin^2 2x-\cos^4 x=\cos 2x.$

8.232. $\sin 2t \cos 2t(\sin^4 2t+\cos^4 2t-1)=\frac{1}{2}\sin^2 4t.$

8.233. $\sin 2x-2\cos^2 x+4(\sin x-\cos x+\operatorname{tg} x-1)=0.$

8.234. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg} 2x.$

8.235. $\operatorname{ctg}^4 x=\cos^3 2x+1.$

8.236. $\dfrac{1}{\sin^3\frac{x}{2}\cdot\cos^3\frac{x}{2}}-6\cos^{-1} x=\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}.$

8.237. $4\sin 2x \sin 5x \sin 7x-\sin 4x=0.$

8.238. $\sin x+\cos x+\sin 2x+\sqrt{2}\sin 5x=\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}.$

8.239. $3\sin^2\frac{x}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)+3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-$

$$-\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}.$$

8.240. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1+\sin x}{\sin x}=\sqrt{2}\cos x.$

8.241. $\operatorname{tg}^3 z+\operatorname{ctg}^3 z-8\sin^{-3} 2z=12.$

8.242. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 5x+\operatorname{tg} 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 5x+\operatorname{ctg} 2x}=\operatorname{tg} 3x.$

8.243. $\operatorname{ctg}\frac{z}{2}-\operatorname{tg}\frac{z}{2}+4\cos^{-1} 2z=\dfrac{4\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}-1}.$

8.244. $\operatorname{ctg}^4 x=\cos^2 2x-1.$

8.245. $\dfrac{4\sin^2\dfrac{t}{2}-1}{\cos t}=\operatorname{tg} t\,(1-2\cos t).$

8.246. $3\sin^2 z\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+z\right)-\dfrac{1}{2}\sin^2 2z-$

$-5\cos^4 z+2\cos 2z=0.$

8.247. $\dfrac{\cos^2 3t}{\operatorname{tg} t}+\dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{tg} 3t}=0.$

8.248. $\dfrac{\sin 2t}{1+\cos 2t}\cdot\dfrac{\sin t}{1+\cos t}=\sin^{-1} t-1.$

8.249. $\dfrac{\cos^4 2x+\sin^4 2x}{\cos^4 2x-\sin^4 2x}-\dfrac{1}{2}\cos 4x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin^{-1} 4x.$

8.250. $\cos^{-4} z=\dfrac{160}{9}-2\sin^{-2} z\,(\operatorname{ctg} 2z\operatorname{ctg} z+1).$

8.251. $\cos^{-3} t\sin^{-3} t-\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{ctg}^3 t=2\sqrt{3}\cos^{-1} 2t.$

8.252. $(\sin x-\cos x)^2+\operatorname{tg} x=2\sin^2 x.$

8.253. $\sin 3t-\sin t=\dfrac{8\cos t\operatorname{ctg} 2t}{4-\sin^{-2} t}.$

8.254. $\sin^2 2x\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)+3\sin 2x\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+2x\right)+$

$+2\cos^2 2x=0.$

8.255. $\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{ctg}(2x+3)=1.$

8.256. $\dfrac{4\sin^4 z}{(1+\cos 2z)^2}-2\cos^{-2} z-1=0.$

8.257. $\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}+\operatorname{ctg}^2\dfrac{z}{2}-2=4\operatorname{tg} z.$

8.258. $\cos^3 z\cdot\cos 3z+\sin^3 z\cdot\sin 3z=\sqrt{2}/4.$

8.259. $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\sin^2 x-2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\cos^2 x+2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}.$

8.260. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3z+\operatorname{tg} 4z}+\operatorname{ctg}^2 7z=\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 3z+\operatorname{ctg} 4z}.$

8.261. $(2\cos 2t+5)\cos^4 t-(2\cos 2t+5)\sin^4 t=3.$

8.262. $\operatorname{tg} z\operatorname{tg}(z+60^\circ)\operatorname{tg}(z+120^\circ)=\sqrt{3}.$

8.263. $\cos 3x+\cos\frac{5x}{2}=2.$

8.264. $1-\frac{2(\cos 2t-\operatorname{tg} t\sin 2t)}{\cos^{-2} t}=\sin^4 t-\cos^4 t.$

8.265. $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=\cos 2x.$

8.266. $\cos^3 x+\frac{1}{2}\sin 2x-\cos x\sin^3 x+4\sin x+4=0.$

8.267. $\frac{2(\cos^3 x+2\sin^3 x)}{2\sin x+3\cos x}=\sin 2x.$

8.268. $\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2\sin x.$

8.269. $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=1.$

8.270. $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x+0{,}375=0.$

8.271. $\sin 2z+5(\sin z+\cos z)+1=0.$

8.272. $\sin^3 2t+\cos^3 2t+\frac{1}{2}\sin 4t=1.$

8.273. $\operatorname{tg} z\operatorname{tg} 2z=\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} 2z.$

8.274. $\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{2\cos x-\sin x}=\cos 2x.$ 8.275. $\frac{\operatorname{ctg} 4t}{\sin^2 t}+\frac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 4t}=0.$

8.276. $\operatorname{tg}^4 x=36\cos^2 2x.$

8.277. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 4x+8=0.$

8.278. $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x=3\sin 2x.$

8.279. $2\cos z\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}-z\right)-5\sin^2 z\cos^2 z+$
$+\sin z\cos^3\left(\frac{3\pi}{2}+z\right)=\cos 2z.$

8.280. $\sin 2x\sin 6x\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 12x=0.$

8.281. $2\sin 2x+3\operatorname{tg} x=5.$

8.282. $5\sin^4 2z-4\sin^2 2z\cos^2 2z-\cos^4 2z+4\cos 4z=0.$

8.283. $1+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 5x-\sqrt{2}\operatorname{tg} 2x\cos 3x\cos^{-1} 5x=0.$

8.284. $\cos^6 x+\sin^6 x-\cos^2 2x=1/16.$

8.285. $\frac{1}{\sin^2 2x}+\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x-4=0.$

8.286. $\operatorname{tg} 5z-\operatorname{tg} 3z-2\operatorname{tg} 2z=0.$

8.287. $\cos 2x+\cos\frac{3x}{4}-2=0.$

8.288. $(\operatorname{ctg} z-1)(1+\sin 2z)=1+\operatorname{ctg} z.$

8.289. $\operatorname{tg} x\cdot\frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}=\sin 6x.$

8.290. $\sin^4 3t+\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+3t\right)=\frac{1}{4}.$

8.291. $\cos 10x+2\cos^2 4x+6\cos 3x\cos x=$
$=\cos x+8\cos x\cos^3 3x.$

8.292. $1+\sin\frac{t}{2}\sin t-\cos\frac{t}{2}\sin^2 t=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right).$

8.293. $\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)}{\cos^2 x}+2\operatorname{tg} x=0.$

8.294. $\frac{4\cos^2 t-1}{\sin t}=\operatorname{ctg} t\,(1+2\cos 2t).$

8.295. $(\sin x+\cos x)^4=2(1+\sin^2 x)-(\sin x-\cos x)^4.$

8.296. $\cos^{-4} z=64\cos^2 2z.$

8.297. $4\sin 5x\cos 5x(\cos^4 x-\sin^4 x)=\sin 4x.$

8.298. $\frac{\operatorname{tg} 4z}{\operatorname{tg} 2z}+\frac{\operatorname{tg} 2z}{\operatorname{tg} 4z}+\frac{5}{2}=0.$

8.299. $\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}=6\cos 2x+4\sin 2x.$

8.300. $\operatorname{tg} 5x-2\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 5x.$

8.301. $\cos z+\sin z=\sqrt{1-2\cos^2 z}.$

8.302. $\sqrt{3}\,(1+\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg} 3x)=\operatorname{tg} 2x\cos^{-1} 3x.$

8.303. $\left(\cos^{-6} z-\operatorname{tg}^6 z-\frac{7}{3}\right)(\sin z+\cos z+2)=0.$

8.304. $\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 3x+\operatorname{ctg} 5x=0.$

8.305. $\cos^{-1} 2t+\sin^{-1} 2t+\cos^{-1} 2t\sin^{-1} 2t-5=0.$

8.306. $\cos(22^\circ - t)\cos(82^\circ - t) +$
$$+\cos(112^\circ - t)\cos(172^\circ - t) = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t).$$

8.307. $\sin 4x(3\sin 4x - 2\cos 4x) =$
$$= \sin^2 2x - 16\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 2x + \cos^2 2x.$$

8.308. $\cos 3z - \cos^3 z + \frac{3}{4}\sin 2z = 0.$

8.309. $\operatorname{tg}(t^2 - t)\operatorname{ctg} 2 = 1.$

8.310. $\sin^3 x(1 - \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 - \operatorname{tg} x) = 1{,}5\cos 2x.$

8.311. $\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)}{1+\cos 2t} = \cos^{-2} 2t - 1.$

8.312. $4\cos x\cos 2x\cos 3x = \cos 6x.$

8.313. $1 - \cos x = \sqrt{1 - \sqrt{4\cos^2 x - 7\cos^4 x}}.$

8.314. $\dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x} + \operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{10}{3}.$

8.315. $4(\sin t\cos^5 t + \cos t\sin^5 t) + \sin^3 2t = 1.$

8.316. $\sin^4 x - \sin^2 x + 4(\sin x + 1) = 0.$

8.317. $\dfrac{\sin^2 t - \operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t - \operatorname{ctg}^2 t} + 2\operatorname{tg}^3 t + 1 = 0.$

8.318. $\dfrac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 5t} - \dfrac{\operatorname{tg} 5t}{\cos^2 t} = 0.$

8.319. $\dfrac{1+\sin 2x + \cos 2x}{1+\sin 2x - \cos 2x} + \sin x\left(1 + \operatorname{tg} x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) = 4.$

8.320. $\sin 2z - \sin 6z + 2 = 0.$

8.321. $\sin^2(t + 45^\circ) - \sin^2(t - 30^\circ) -$
$$- \sin 15^\circ\cos(2t + 15^\circ) = 0{,}5\sin 6t.$$

8.322. $3\operatorname{tg} 3x - 4\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x\operatorname{tg} 3x.$

8.323. $\dfrac{5\sin x - 5\operatorname{tg} x}{\sin x + \operatorname{tg} x} + 4(1 - \cos x) = 0.$

8.324. $4\cos x = \sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 1.$

8.325. $1 + \dfrac{2(\cos 2z\operatorname{tg} z - \sin 2z)}{\cos^{-2} z} = \cos 2z.$

8.326. $(\cos x - \sin x)^2 + \cos^4 x - \sin^4 x = 0{,}5\sin 4x.$

8.327. $\operatorname{ctg} x\left(1-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=1.$

8.328. $\cos^2(x+40^\circ)+\cos^2(x-40^\circ)-\sin 10^\circ\cos 2x=$
$=\sin 2x.$

8.329. $2\cos^2\frac{x}{2}(1-\sin x)+\cos^2 x=0.$

8.330. $\operatorname{tg} 6x\cos 2x-\sin 2x-2\sin 4x=0.$

8.331. $\cos 8x+3\cos 4x+3\cos 2x=8\cos x\cos^3 3x-0{,}5.$

8.332. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg}(x+1)=1.$

8.333. $\frac{8\sin^{-2}2x+1}{\cos^{-2}x+\operatorname{tg}^2 x}=\operatorname{ctg}^2 x+\frac{4}{3}.$

8.334. $2+\sin t=3\operatorname{tg}\frac{t}{2}.$

8.335. $\operatorname{tg}(35^\circ+x)\operatorname{ctg}(10^\circ-x)=2/3.$

8.336. $2\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+2\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x=0.$

8.337. $\sin^4 2x+\sin^3 2x\cos 2x-$
$-8\sin 2x\cos^3 2x-8\cos^4 2x=0.$

8.338. $\cos t(1-\operatorname{tg} t)(\sin t+\cos t)=\sin t.$

8.339. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}-\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x}-\sqrt{1-\cos x}}=$
$=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}.$

8.340. $1+\sin z+\cos z+\sin 2z+\cos 2z=0.$

8.341. $\operatorname{ctg}(x-25^\circ)+\operatorname{tg}(3x+15^\circ)=2\sin(2x-50^\circ).$

8.342. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+3\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x+4=0.$

8.343. $\operatorname{tg} 2t=\operatorname{ctg} t-4\cos t\cos 3t.$

8.344. $\cos 2x=\cos^2\frac{3}{2}x.$

8.345. $(\operatorname{tg} t-\operatorname{ctg} t+2\operatorname{tg} 2t)(1+\cos 3t)=4\sin 3t.$

8.346. $\sin x(\cos x-2)+\operatorname{tg} x=2-\cos x-\cos^{-1} x.$

8.347. $(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-2+\sin x=2\cos x.$

8.348. $1-\sin 2x=\cos x-\sin x.$

8.349. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^4 x-\operatorname{ctg}^2 x=106/9.$

8.350. $\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=0.$

8.351. $3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x\sin x-\mathrm{ctg}\,x\cos x+$

$$+9\sin x-3\sqrt{3}\cos x=0.$$

8.352. $\cos 2x-\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=\sin\frac{\pi}{4}-1.$$

8.353. $\mathrm{tg}^4 x+\mathrm{ctg}^4 x+\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=4.$

8.354. $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\frac{\cos\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)}{1+\cos x}=2.$

3.355. $\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,2x=\sin x.$

8.356. $2\sin^2 3x+\sin^2 6x=(\sin 2x+\sin 4x)\cos^{-1}x\sin^{-1}3x.$

8.357. $4\sin^4 x+\cos 4x=1+12\cos^4 x.$

8.358. $5(1-\sin 2x)-16(\sin x-\cos x)+3=0.$

8.359. $37\,\mathrm{tg}\,3x=11\,\mathrm{tg}\,x.$

8.360. $\sqrt{2}(\cos^4 2x-\sin^4 2x)=\cos 2x+\sin 2x.$

8.361. $\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x=\sin^{-1}x-\cos^{-1}x.$

8.362. $\sin^6 x+\cos^6 x=7/16.$

8.363. $\sin 3x+\sin x-\sin 2x=2\cos x(\cos x-1).$

8.364. $1+\sin 2x=\sin x+\cos x.$

8.365. $2(1+\sin 2x)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$

8.366. $\frac{1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x}{\mathrm{tg}\,2x}=0.$

8.367. $\frac{\mathrm{tg}\,2t}{\cos^2 t}-\frac{\mathrm{tg}\,t}{\cos^2 2t}=0.$

8.368. $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,2x+\mathrm{tg}\,3x=0.$

8.369. $\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{tg}\,x=\sin x+\cos x.$

8.370. $\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{2}}+\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{2}}=2.$

8.371. $\sin 3x=a\sin x.$ 8.372. $\cos 3x=m\cos x.$

8.373. $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,\alpha+1=\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,\alpha.$

8.374. $12\sin x+4\sqrt{3}\cos(\pi+x)=m\sqrt{3}.$

8.375. $\sin\left(x+\frac{5}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)=\cos\alpha.$

8.376. $2^{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x}=4$. 8.377. $2^{\sin^2 x}+4\cdot 2^{\cos^2 x}=6$.

8.378. $3^{1+\sin x+\ldots+\sin^n x+\ldots}=\sqrt[3]{9}$.

8.379. $2^{-1+\cos x-\cos^2 x+\ldots+(-1)^{n-1}\cos^n x+\ldots}=\sqrt[3]{0,25}$.

8.380. $9^{1-\cos 6x}=3^{\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x}}$. 8.381. $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$.

8.382. $1+2^{\operatorname{tg} x}=3\cdot 4^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\cos^{-1}x}$.

8.383. $\log_{\cos x} 4\cdot\log_{\cos^2 x} 2=1$.

8.384. $\log_{\sin x} 4\cdot\log_{\sin^2 x} 2=4$.

8.385. $3(\log_2 \sin x)^2+\log_2(1-\cos 2x)=2$.

8.386. Дано $(1+\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} y)=2$. Найти $x+y$.

8.387. Показать, что уравнение

$$\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg} 3x+\frac{1}{\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x}=0$$

не имеет корней.

8.388. Один из углов прямоугольного треугольника удовлетворяет уравнению $\sin^3 x+\sin x\cdot\sin 2x-3\cos^3 x=0$. Показать, что треугольник равнобедренный.

8.389. Показать, что не существует треугольника, каждый угол которого удовлетворял бы уравнению

$$(3\cos x-2)(14\sin^2 x+\sin 2x-12)=0.$$

8.390. Показать, что существуют треугольники, у которых каждый угол удовлетворяет уравнению

$$(65\sin x-56)(80-64\sin x-65\cos^2 x)=0.$$

Найти эти углы.

8.391. Дан треугольник, каждый из углов которого удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=0.$$

Показать, что треугольник равносторонний.

8.392. Найти $\sin\alpha$, зная, что

$$\cos\alpha=\operatorname{tg}\beta,\quad \cos\beta=\operatorname{tg}\gamma,\quad \cos\gamma=\operatorname{tg}\alpha$$

$(0<\alpha<\pi/2,\quad 0<\beta<\pi/2,\quad 0<\gamma<\pi/2)$.

Решить системы уравнений (8.393—8.405):

8.393. $\begin{cases} 9^{2\operatorname{tg} x+\cos y}=3, \\ 9^{\cos y}-81^{\operatorname{tg} x}=2. \end{cases}$ 8.394. $\begin{cases} \sin x+\cos y=0, \\ \sin^2 x+\cos^2 y=1/2. \end{cases}$

8.395. $\begin{cases} x+y=\pi/6, \\ 5(\sin 2x+\sin 2y)=2(1+\cos^2(x-y)). \end{cases}$

8.396. $\begin{cases} x-y=5\pi/3, \\ \sin x=2\sin y. \end{cases}$ 8.397. $\begin{cases} \sin x\cos y=0{,}25, \\ \sin y\cos x=0{,}75 \end{cases}$

8.398. $\begin{cases} x-y=-1/3, \\ \cos^2\pi x-\sin^2\pi x=1/2. \end{cases}$ 8.399. $\begin{cases} x+y=\pi/4, \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=1/6. \end{cases}$

8.400. $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x=\sin y, \\ \sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos y. \end{cases}$

8.401. $\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=2, \\ \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=-1{,}8. \end{cases}$

8.402. $\begin{cases} 2^{\cos x}+2^{\cos^{-1} y}=5, \\ 2^{\cos x}\cdot 2^{\cos^{-1} y}=4. \end{cases}$ 8.403. $\begin{cases} \sin x\sin y=0{,}75, \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3. \end{cases}$

8.404. $\begin{cases} \cos^2 x+\cos^2 y=0{,}25, \\ x+y=5\pi/6. \end{cases}$ 8.405. $\begin{cases} \sin x\sin y=0{,}25, \\ x+y=\pi/3. \end{cases}$

Группа В

Решить уравнения **(8.406—8.492)**:

8.406. $(\cos^2 x+\cos^{-2} x)(1+\operatorname{tg}^2 2y)(3+\sin 3z)=4$.

8.407. $\dfrac{1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x+\ldots+\operatorname{tg}^n x+\ldots}{1-\operatorname{tg}x+\ldots+(-1)^n\operatorname{tg}^n x+\ldots}=1+\sin 2x$.

8.408. $\operatorname{tg}x-\sin 2x-\cos 2x(1-2\cos^{-1} x)=0$.

8.409. $\dfrac{1-\sin t+\ldots+(-1)^n\sin^n t+\ldots}{1+\sin t+\ldots+\sin^n t+\ldots}=\dfrac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}$.

8.410. $\sqrt{3}\sin t-\sqrt{2\sin^2 t-\sin 2t+3\cos^2 t}=0$.

8.411. $\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{4}$.

8.412. $2\sin^2 t=\sqrt{\sin^2 t-16\sin^2 t\cos^2 t\cos^2 2t+\cos^2 t}$.

8.413. $\cos z\sqrt{\operatorname{tg}^2 z-\sin^2 z}+\sin z\sqrt{\operatorname{ctg}^2 z-\cos^2 z}=2\sin z$.

8.414. $\cos x+\sqrt{\frac{3}{2}-\cos^2 x}-\cos x\sqrt{\frac{3}{2}-\cos^2 x}=1$.

8.415. $\sqrt[5]{\frac{1}{2}-\sin x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}+\sin x}=1$.

8.416. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1+\cos x$.

8.417. $\sqrt{1+3\,\mathrm{ctg}\,x}+\sqrt{\frac{\mathrm{tg}\,x}{3+\mathrm{tg}\,x}}=\frac{5}{2}$.

8.418. $\sqrt[4]{\frac{1}{2}-\cos 2x}+\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\cos 2x}=1$.

8.419. $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}=3$.

8.420. $2-\sin x=\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}$.

8.421. $\sqrt[3]{2-\mathrm{tg}\,x}+\sqrt[3]{7+\mathrm{tg}\,x}=3$.

8.422. $\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}=4$.

8.423. $\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}$.

8.424. $\cos x+\sqrt{\sin^2 x-2\sin 2x+4\cos^2 x}=0$.

8.425. $\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sqrt{\sin x+\cos x}$.

8.426. $\frac{1-2\cos^2 x}{\sin x\cos x}+2\,\mathrm{tg}\,2x+\mathrm{ctg}^3\,4x=3$.

8.427. $\sqrt[4]{10+8\sin^2 x}-\sqrt[4]{8\cos^2 x-1}=1$.

8.428. $\sin^{-1} 2x\sqrt{\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x+2}+\mathrm{ctg}\,2x\sqrt{\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x-2}=$
$=4\cos^2 2x$.

8.429. $\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0$.

8.430. $\sin\pi\sqrt{t}+\sin\pi t=0$.

8.431. $(\cos^4 x+2\sin^3 x-2\sin x+1)(\sin x+\cos x)=0$.

8.432. $4\,\mathrm{ctg}^3\,2x-12\,\mathrm{ctg}\,2x+\mathrm{ctg}^2 x+\mathrm{tg}^2 x-14=0$.

8.433. $\cos^{-4} x+\cos^4 x=1+\cos 2x-2\sin^2 2x$.

8.434. $\cos^{-4} x+8\cos^{-1} x-7=0$.

8.435. $\sin^{10} 3x+\cos^{10} 3x=4\,\frac{\sin^6 3x+\cos^6 3x}{4\cos^2 6x+\sin^2 6x}$.

8.436. $\mathrm{ctg}^4\,2z=\cos^2 4z+1$.

8.437. $\left(2+\frac{1}{\cos^2 x}\right)(4-2\cos^4 x)=1+5\sin 3y$.

8.438. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(1-4\cos^2 2x)-2\cos 4x=3$.

8.439. $18\cos^2 x+5(3\cos x+\cos^{-1} x)+2\cos^{-2} x+5=0$.

8.440. $\mathrm{tg}\,(\pi\,\mathrm{ctg}\,t)=\mathrm{ctg}\,(\pi\,\mathrm{tg}\,t)$.

8.441. $\cos^{-4} x-2\cos^{-2} x-12\,\mathrm{tg}\,x-16=0$.

8.442. $\sin^8 2x+\cos^8 2x=41/128$.

8.443. $2(1-\sin x-\cos x)+\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x=0$.

8.444. $\frac{\operatorname{tg} t}{2-\cos^{-2} t}(\sin 3t-\sin t)=\frac{2}{\operatorname{ctg}^2 t-3}$.

8.445. $\operatorname{tg}(\pi \cos t)=\operatorname{ctg}(\pi \sin t)$. 8.446. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x-\cos 4x=3$.

8.447. $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg}^2 5x=\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg}^2 3x-\operatorname{tg}^2 5x$.

8.448. $(5+3\sin^{-2} x)(2-\sin^6 x)=7+\cos 2y$.

8.449. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-3\operatorname{ctg}^2 x-3\operatorname{ctg} x-2=0$.

8.450. $\cos^4 x+4\cos x-1=0$.

8.451. $\frac{1-\cos 2x+\ldots+(-1)^n \cos^n 2x+\ldots}{1+\cos 2x+\ldots+\cos^n 2x+\ldots}=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^4 x$.

8.452. $2(\operatorname{tg} x-\sin x)+3(\operatorname{ctg} x-\cos x)+5=0$.

8.453. $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^3 x-4=0$.

8.454. $\cos\sqrt{x}=\cos x$. 8.455. $|\sin t+\cos t|=\sqrt{2}$.

8.456. $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 4x=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 3x+\operatorname{tg} 4x$.

8.457. $\cos 6x+\sin\frac{5x}{2}=2$. 8.458. $\sqrt{3}\,|\cos t|=1+\operatorname{ctg} t$.

8.459. $\cos^2 x^2(\operatorname{tg} x^2+2\operatorname{tg} x)+\operatorname{tg}^3 x(1-\sin^2 x^2)(2-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} x^2)=0$.

8.460. $\frac{1-\operatorname{tg} x+\ldots+(-1)^n \operatorname{tg}^n x+\ldots}{1+\operatorname{tg} x+\ldots+\operatorname{tg}^n x+\ldots}=1+\sin 2x$.

8.461. $(\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x)^2-\cos(x+4\operatorname{tg} x)=-1$.

8.462. $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 2x \operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 2x+\operatorname{ctg} 3x$.

8.463. $(4-\cos 2x)(2+3\sin y)=12+13\cos^{-2} 3z$.

8.464. $(2\sin x-1)(\cos^4 x+2\cos^3 x+2\cos^2 x-2\cos x+1)=0$.

8.465. $1+\sqrt{3}(1+\cos x)=\cos 2(x+2\operatorname{tg} x)$.

8.466. $2\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4\operatorname{ctg} 2x=\operatorname{ctg} 3x$.

8.467. $2\sin^2 x+\sin x+\sin^{-1} x+2\sin^{-2} x=6$.

8.468. $2\operatorname{tg}\pi t^2-\operatorname{tg}\pi t+\operatorname{tg}\pi t\operatorname{tg}^2\pi t^2=0$.

8.469. $\sin^4 x+2\cos^3 x+2\sin^2 x-\cos x+1=0$.

8.470. $|\sin t|+|\cos t|=1{,}4$.

8.471. $\frac{3\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}{2-\cos^{-2} x}=\frac{4+2\cos\frac{6}{5}x}{\cos 3x+\cos x}$.

8.472. $12\cos^{-2} x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 x+10\left(2\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{ctg} x}{3}\right)=1$.

8.473. $\sin^5 x+\cos^5 x=2-\sin^4 x$.

8.474. $3\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 2x$.

8.475. $\operatorname{ctg} 2\pi t^2+\operatorname{ctg} 4\pi t=0$.

8.476. $(3-\operatorname{tg}^2 x)(\cos 3x+\cos x)=\frac{4\cos 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

8.477. $\dfrac{1+\sin t+\ldots+\sin^n t+\ldots}{1-\sin t+\ldots+(-1)^n \sin^n t+\ldots}=\dfrac{4}{1+\operatorname{tg}^2 t}$.

8.478. $|\operatorname{tg} 2t+\operatorname{ctg} 2t|=4\sqrt{3}/3$.

8.479. $(3-\sin x)(4-\sin^{-2} x)=12+\cos^2 y$.

8.480. $4-4(\cos z-\sin z)-\sin 2z=0$.

8.481. $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\dfrac{t}{4}+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+\operatorname{tg} t=2\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{t}{4}$.

8.482. $\dfrac{3\operatorname{tg} t-\operatorname{tg}^3 t}{1-\operatorname{tg}^2 t}(\cos 3t+\cos t)=2\sin 5t$.

8.483. $\operatorname{tg} x-\sin 2x-\cos 2x+2(2\cos x-\cos^{-1} x)=0$.

8.484. $5\sin 2z-11(\sin z+\cos z)+7=0$.

8.485. $\sin^{-1} 5x-\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. 8.486. $4\cos^2 2t-\operatorname{tg} 4t=\operatorname{ctg} 2t$.

8.487. $\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}-\operatorname{tg}^6 x+\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x=0$.

8.488. $\sin^{10} x+\cos^{10} x=29/64$.

8.489. $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2=5+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+4x\right)$.

8.490. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x=6$.

8.491. $\log_{0,5\sin 2x}\sin x=1/2$.

8.492. $\log_{\sin x\cos x}\sin x\cdot\log_{\sin x\cos x}\cos x=1/4$.

8.493. Показать, что уравнение $2\operatorname{ctg} 2x-3\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg} 2x$ не имеет корней.

Решить системы уравнений (8.494—8.499):

8.494. $\begin{cases}\sin x-\dfrac{1}{\sin x}=\sin y,\\[2mm] \cos x-\dfrac{1}{\cos x}=\cos y.\end{cases}$ 8.495. $\begin{cases}3\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}^3 y,\\ \cos x=\sin 2y.\end{cases}$

8.496. $\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}},\\[2mm] \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2\sqrt{3}.\end{cases}$ 8.497. $\begin{cases}\cos x-\cos y=\sin(x+y),\\ |x|+|y|=\pi/4.\end{cases}$

8.498. $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\sin\left(y-\dfrac{3\pi}{4}\right),\\[2mm] \operatorname{tg} y+\operatorname{ctg} y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).\end{cases}$ 8.499. $\begin{cases}2\cos x=3\operatorname{tg} y,\\ 2\cos y=3\operatorname{tg} z,\\ 2\cos z=3\operatorname{tg} x.\end{cases}$

8.500. Найти x, y, z, если $\dfrac{\sin x}{1}=\dfrac{\sin y}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin z}{2}$, $x+y+z=\pi$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Глава 9
НЕРАВЕНСТВА

Группа А

9.001. Показать, что для всех положительных чисел a и b верно неравенство

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}.$$

9.002. Доказать, что если $a>0$ и $b>0$, то

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leqslant\sqrt[4]{ab}.$$

9.003. Доказать, что если $p>0$ и $q>0$, то

$$(p+2)(q+2)(p+q)\geqslant 16pq.$$

9.004. Доказать, что если $a\neq 2$, то

$$\frac{1}{a^2-4a+4}>\frac{2}{a^3-8}.$$

9.005. Доказать, что если m, n и p представляют собой длины сторон некоторого треугольника, то

$$m^2+n^2+p^2<2(mn+mp+np).$$

9.006. Доказать, что если $m\geqslant 0$ и $n\geqslant 0$, то

$$mn(m+n)\leqslant m^3+n^3.$$

9.007. Доказать, что для любых действительных чисел x и y верно неравенство

$$x^2+2y^2+2xy+6y+10>0.$$

9.008. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2-(a+1)x+a+4=0$ оказываются отрицательными?

9.009. Показать, что для любых двух положительных чисел произведение их суммы на сумму их обратных величин не меньше четырех.

9.010. Найти целые положительные значения x, удовлетворяющие неравенству $\frac{5x+1}{x-1} > 2x+2$.

9.011. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} + \frac{x}{6} < 2 - \frac{x+5}{2}, \\ 1 - \frac{x+5}{8} + \frac{4-x}{2} < 3x - \frac{x+1}{4}. \end{cases}$$

9.012. Найти натуральные значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-1) < 4, \\ \frac{x}{x-3} + \frac{x-5}{x} < \frac{2x}{3-x}. \end{cases}$$

9.013. При каких значениях x функция $y = \sqrt[4]{10+x} - \sqrt{2-x}$ принимает положительные значения?

9.014. Найти множество целых значений x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{x+8}{x+2} > 2, \\ \lg(x-1) < 1. \end{cases}$$

9.015. При каких значениях m неравенство $x^2 - mx > 2/m$ выполняется для любых x?

Найти области определения функций (**9.016—9.021**):

9.016. $y = \sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

9.017. $y = 0{,}5^{\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x-1}}$.

9.018. $y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}$.

9.019. $y = \sqrt{\log_{1/2} \log_3 \frac{x+1}{x-1}}$.

9.020. $y = \sqrt{5 - x - \frac{6}{x}}$.

9.021. $y = \sqrt{-\frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}}$.

Решить неравенства (9.022—9.095):

9.022. $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$. **9.023.** $\log_{1/3}\frac{3x-1}{x+2}<1$.

[9.024.] $\log_3\frac{3x-5}{x+1}\leqslant 1$.

9.025. $\log_\pi(x+27)-\log_\pi(16-2x)<\log_\pi x$.

9.026. $\log_{0,3}(3x-8)>\log_{0,3}(x^2+4)$.

9.027. $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0$.

9.028. $\sqrt{3x-x^2}<4-x$.

9.029. $\frac{1}{3x-2-x^2}-\frac{3}{7x-4-3x^2}>0$.

9.030. $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{x-3}$. **9.031.** $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$.

9.032. $|2x^2-9x+15|\geqslant 20$. **9.033.** $|x^2-5x|<6$.

9.034. $5x-20\leqslant x^2\leqslant 8x$. **9.035.** $\frac{4x^2-1}{\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)}\leqslant 0$.

9.036. $\frac{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}{(x-8)(2-x)}>0$.

9.037. $(0,(4))^{x^2-1}>(0,(6))^{x^2+6}$.

9.038. $\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)}<0$. **9.039.** $\frac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x}<0$.

9.040. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$. **9.041.** $x^6-9x^3+8>0$.

9.042. $0,3^{2+4+6+\ldots+2x}>0,3^{72}$.

9.043. $\sqrt{x^2-x-12}<x$.

9.044. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$. **9.045.** $\sqrt{9x-20}<x$.

9.046. $1<\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2$. **9.047.** $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$.

9.048. $\frac{4-x}{x-5}>\frac{1}{1-x}$. **9.049.** $\lg 10^{\lg(x^2+21)}>1+\lg x$.

9.050. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geqslant 1$. **9.051.** $\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{1/x^2}\right)^{x^2-2x}\geqslant 1$.

9.052. $2^{1-2^{1/x}}<0{,}125$. **9.053.** $x^2\cdot 3^x-3^{x+1}\leqslant 0$.

9.054. $5^{2x+1}>5^x+4$. **9.055.** $0{,}5^{x-2}>6$.

9.056. $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}<1$.

9.057. $0{,}3^{\log_{1/3}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1$.

9.058. $2^{\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}\frac{5x}{2}}>1$.

9.059. $4^x-2^{2(x-1)}+8^{\frac{2}{3}(x-2)}>52$.

9.060. $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>2/3$.

9.061. $25^x<6\cdot 5^x-5$. **9.062.** $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)}\leqslant 2{,}5$.

9.063. $4^{\frac{1}{x}-1}-2^{\frac{1}{x}-2}-3\leqslant 0$.

[**9.064.**] $\left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)}\cdot 12{,}25^{\frac{4x+1}{2}}\geqslant 1$. **9.065.** $\dfrac{15}{4+3x-x^2}>1$.

9.066. $0{,}64<\sqrt{0{,}8^{x(x-3)}}<1$.

9.067. $\frac{1}{2}+\log_9 x-\log_3 5x>\log_{1/3}(x+3)$.

9.068. $\log_{\frac{x-1}{x+5}}0{,}3>0$. **9.069.** $(\log_{0,2}(x-1))^2>4$.

9.070. $\log_{1,5}\dfrac{2x-8}{x-2}<0$. **9.071.** $\log_{0,3}(x^2-5x+7)>0$.

9.072. $x^8-6x^7+9x^6-x^2+6x-9<0$.

9.073. $a^4+a^3-a-1<0$. **9.074.** $m^3+m^2-m-1>0$.

9.075. $\log_2(1+\log_{1/9}x-\log_9 x)<1$.

9.076. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>2$.

9.077. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$.

9.078. $0{,}3^{2x^2-3x+6}<0{,}00243$. **9.079.** $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\leqslant 0$.

9.080. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0$.

9.081. $\log_{1,2}(x-2)+\log_{1,2}(x+2)<\log_{1,2}5$.

9.082. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1$.

9.083. $\frac{1}{3^x+5}<\frac{1}{3^{x+1}-1}$.

9.084. $\log_x(\log_9(3^x-9))<1$. 9.085. $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}}>25$.

9.086. $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{\sqrt{x}+1}+5^{\sqrt{x}}$. 9.087. $|3-\log_2 x|<2$.

[9.088.] $5\cdot 0{,}2^{\lg x}>0{,}04^{\lg 2}$. 9.089. $\log_2\log_{1/3}\log_5 x>0$.

9.090. $3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}-1}-3^{\sqrt{x}-2}<11$. 9.091. $0{,}5^x\leqslant 0{,}25^{x^2}$.

9.092. $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5}x-2\leqslant 0$. 9.093. $5^{\log_3\frac{x-2}{x}}<1$.

9.094. $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{1/3}x<6$.

9.095. $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)$.

Группа Б

9.096. Доказать, что произведение суммы трех положительных чисел на сумму обратных чисел не меньше 9.

9.097. Доказать, что если a — любое действительное число, то верно неравенство

$$\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}}\geqslant 2.$$

9.098. Найти все значения p, при которых выражение

$$\lg((p-1)x^2+2px+3p-2)$$

определено при любых x.

9.099. Найти все значения a, при которых выражение

$$\sqrt{(a+1)x^2-2(a-1)x+3a-3}$$

принимает действительные значения для любых действительных чисел x.

[9.100.] Найти множество целых значений x, удовлетворяющих неравенству

$$4^{2+\sqrt{x-1}}+3\cdot 2^{2+\sqrt{x-1}}-16<15\cdot 4^{\sqrt{x-1}}+2^{3+\sqrt{x-1}}+$$
$$+5\cdot 2^{1+\sqrt{x-1}}.$$

9.101. При каких значениях p оба корня квадратного трехчлена

$$x^2+2(p+1)x+9p-5$$

отрицательны?

9.102. При каких значениях n оба корня уравнения

$$(n-2)x^2-2nx+n+3=0$$

положительны?

9.103. При каких значениях m корни уравнения

$$4x^2-(3m+1)x-m-2=0$$

заключены в промежутке между -1 и 2?

9.104. При каких значениях a квадратный трехчлен $ax^2-7x+4a$ принимает отрицательные значения для любых действительных значений x?

9.105. Найти целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$\left|\frac{2}{x-13}\right|>\frac{8}{9}.$$

9.106. Доказать, что при условии $2y+5x=10$ выполняется неравенство $3xy-x^2-y^2<7$.

9.107. Доказать, что если $4b+a=1$, то выполняется неравенство $a^2+4b^2\geqslant 1/5$.

9.108. Доказать, что многочлен

$$m^6-m^5+m^4+m^2-m+1$$

принимает положительные значения при всех действительных значениях m.

9.109. Указать все значения x, для которых

$$\sqrt[6]{4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4}$$

является числом действительным.

9.110. Указать все значения x, для которых

$$\sqrt{9-\left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2}$$

есть число действительное.

9.111. Найти целые неотрицательные значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}<\frac{2x}{2x-x^2}.$$

9.112. При каких значениях a неравенство $\frac{ax}{x^2+4}<1{,}5$ выполняется для любых действительных значений x?

9.113. При каких значениях x выражение

$$\sqrt{\log_{0,5}(x^2-9)+4}$$

будет числом действительным?

9.114. При каких значениях x определено следующее выражение:

$$\log_3(1-\log_{0,5}(x^2-2x-2{,}5))?$$

9.115. Найти те значения m, при которых неравенство

$$\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$$

выполняется для любых действительных значений x.

9.116. При каких значениях x разность $\frac{11x^2-5x+6}{x^2+5x+6}-x$ принимает только отрицательные значения?

9.117. При каких значениях m неравенство $\frac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3}<$ <1 выполняется для любых x?

9.118. При каких значениях m неравенство $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4}>$ >-1 выполняется при любом x?

9.119. При каких значениях a сумма $a+\frac{-1+9a+4a^2}{a^2-3a-10}$ принимает только положительные значения?

[9.120.] Найти целые значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_4 x+\log_2\left(\sqrt{x}-1\right)<\log_2\log_{\sqrt{5}}5.$$

9.121. Показать, что при любых действительных значениях x функция $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ не может иметь значений, больших $3/2$ и меньших $1/2$.

Найти области определения функций (9.122—9.129):

9.122. $y=2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}$. **9.123.** $y=\frac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3|x-4|}$.

9.124. $y=\log_3\left(0{,}64^{2-\log_{\sqrt{2}}x}-1{,}25^{8-(\log_2 x)^2}\right)$.

9.125. $y=\sqrt{\log_{1/3}\log_3|x-3|}$.

9.126. $y=\sqrt{\log_{1/2}^2(x-3)-1}$.

[9.127.] $y=\sqrt[4]{2-\lg|x-2|}$.

9.128. $y=\log_3(2^{\log_{x-3}0,5}-1)+\dfrac{1}{\log_3(2x-6)}$.

9.129. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}-1}+\dfrac{1}{\log_3(x-4)}$.

Решить неравенства (9.130—9.206):

9.130. $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|<3$. 9.131. $\log_{|x-1|}0,5>0,5$.

9.132. $\log_x\dfrac{3x-1}{x^2+1}>0$. 9.133. $\dfrac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$.

9.134. $0,5^{\sqrt{3}}<0,5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}}<0,5$. 9.135. $\dfrac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1$.

9.136. $\left(\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{3x}{4}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-x-\dfrac{(x-2)^2(1-x)}{(x+2)^2}\right)>0$.

9.137. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{1/2}\dfrac{x^3}{8}\right)^2+9\log_2\dfrac{32}{x^2}<4(\log_{1/2}x)^2$.

9.138. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geqslant 2$.

9.139. $\dfrac{m^2x+1}{2}-\dfrac{m^2x+3}{3}<\dfrac{m+9x}{6}$.

9.140. $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

9.141. $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$.

9.142. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leqslant 1$.

9.143. $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

9.144. $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0$. 9.145. $\sqrt{3}\cos^{-2}x<4\operatorname{tg}x$.

9.146. $\sin 4x+\cos 4x\operatorname{ctg}2x>1$.

9.147. $2+\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}2x<0$. 9.148. $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2-8}{x^2}<0$.

9.149. $\frac{3}{6x^2-x-12}<\frac{25x-47}{10x-15}-\frac{3}{3x+4}$.

9.150. $\frac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}<0$. 9.151. $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

9.152. $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leqslant\frac{1}{2}$. 9.153. $\log_{4/3}\left(\sqrt{x+3}-x\right)>0$.

9.154. $\frac{2-x}{x^3+x^2}>\frac{1-2x}{x^3-3x^2}$.

9.155. $0,2^{\frac{6\log_4 x-3}{\log_4 x}}>\sqrt[3]{0,008^{2\log_4 x-1}}$.

9.156. $2,25^{\log_2(x^2-3x-10)}>\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{1/2}(x^2+4x+4)}$.

9.157. $\log_{0,5}(x+3)<\log_{0,25}(x+15)$.

9.158. $\log_{1/3}(x-1)+\log_{1/3}(x+1)+\log_{\sqrt{3}}(5-x)<1$.

9.159. $2\log_3\log_3 x+\log_{1/3}\log_3\left(9\sqrt[3]{x}\right)\geqslant 1$.

9.160. $0,008^x+5^{1-3x}+0,04^{\frac{3}{2}(x+1)}<30,04$.

9.161. $0,4^{\log_3\frac{3}{x}\cdot\log_3 3x}>6,25^{\log_3 x^2+2}$.

9.162. $0,3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots}<\sqrt[3]{0,3^{3x^2+5x}}<1$.

9.163. $\frac{\lg 7-\lg(-8x-x^2)}{\lg(x+3)}>0$.

9.164. $\log_3\log_4\frac{4x-1}{x+1}-\log_{1/3}\log_{1/4}\frac{x+1}{4x-1}<0$.

9.165. $2^{\log^2_{0,5}x}+x^{\log_{0,5}x}>2,5$.

9.166. $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$.

9.167. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}\leqslant\frac{1-2x}{x^3+1}$.

9.168. $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$.

9.169. $\frac{1}{x^2-4}+\frac{4}{2x^2+7x+6}\leqslant\frac{1}{2x+3}+\frac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}$.

9.170. $\frac{10(5-x)}{3(x-4)}-\frac{11}{3}\cdot\frac{6-x}{x-4}\geqslant\frac{5(6-x)}{x-2}$.

[9.171.] $0{,}6^{\lg^2(-x)+3} \leqslant \left(1\frac{2}{3}\right)^{2\lg x^2}$.

9.172. $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leqslant x^2-9$.

9.173. $\left(\frac{3}{5}\right)^{13x^2} \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{x^4+36} < \left(\frac{3}{5}\right)^{12x^2}$.

9.174. $|x-3|^{2x^2-7x} > 1$. **9.175.** $\log_{1/5} x + \log_4 x > 1$.

9.176. $-9 < x^4 - 10x^2 < 56$. **9.177.** $216x^6 + 19x^3 < 1$.

9.178. $x^{0{,}5\log_{0{,}5} x - 3} \geqslant 0{,}5^{3-2{,}5\log_{0{,}5} x}$.

9.179. $|x-6| > |x^2-5x+9|$.

9.180. $\frac{6x}{x-2} - \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - 2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 0$.

9.181. $\log_{0{,}3} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} < 0$.

9.182. $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$.

9.183. $\log_{1/2} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$.

9.184. $\log_{0{,}25} \left|\frac{2x+1}{x+3} + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$.

9.185. $x^2(x^4+36) - 6\sqrt{3}(x^4+4) < 0$.

9.186. $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10} < 0$. **9.187.** $2\log_{\log_3 x} 3 < 1$.

9.188. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x+4} > 0$.

9.189. $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1$.

9.190. $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2} > 0$.

9.191. $2\cos x\left(\cos x - \sqrt{8}\,\operatorname{tg} x\right) < 5$.

9.192. $\sqrt{x^3+3x+4} > -2$.

9.193. $\log_2^2 (x-1)^2 - \log_{0{,}5}(x-1) > 5$.

9.194. $\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 > \left(\log_x \sqrt{5}\right)^2$.

9.195. $\log_3 \log_{x^2} \log_{x^2} x^4 > 0$.

9.196. $0{,}5^{2\sqrt{x}} + 2 > 3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}$.

9.197. $x^2\left(x+3\sqrt{5}\right) + 5\left(3x+\sqrt{5}\right) > 0$.

9.198. $9^{\log_2(x-1)-1}-8\cdot5^{\log_2(x-1)-2}>$
$$>9^{\log_2(x-1)}-16\cdot5^{\log_2(x-1)-1}.$$

9.199. $\dfrac{\log_2\left(\sqrt{4x+5}-1\right)}{\log_2\left(\sqrt{4x+5}+11\right)}>\dfrac{1}{2}.$

9.200. $\dfrac{\log_{0,5}\left(\sqrt{x+3}-1\right)}{\log_{0,5}\left(\sqrt{x+3}+5\right)}<0{,}5.$

9.201. $\dfrac{1}{\log_2(x-1)}<\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}.$

9.202. $x^{\log_2 x}+16x^{-\log_2 x}<17.$

9.203. $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<10.$

9.204. $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1)<1.$

9.205. $(x^2+4x+10)^2-7(x^2+4x+11)+7<0.$

9.206. $25\cdot2^x-10^x+5^x>25.$

Решить системы неравенств (9.207—9.214):

9.207. $\begin{cases}0{,}2^{\cos x}\leqslant 1,\\ \dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{1}{2}>0.\end{cases}$

9.208. $\sqrt{x^2-9x+20}\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant\sqrt{x^2-13}.$

9.209. $\begin{cases}\dfrac{x^2+4}{x^2-16x+64}>0,\\ \lg\sqrt{x+7}>\lg(x-5)-2\lg 2.\end{cases}$

9.210. $\dfrac{5x-7}{x-5}<4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<4.$

9.211. $\begin{cases}\sqrt{4x-7}<x,\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}>4.\end{cases}$

9.212. $\begin{cases}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{27}{64},\\ 2^{x^2-6x-3,5}<8\sqrt{2}.\end{cases}$

9.213. $\begin{cases}|x^2+5x|<6,\\ |x+1|\leqslant 1.\end{cases}$ **9.214.** $\begin{cases}|x^2-4x|<5,\\ |x+1|<3.\end{cases}$

9.215. Найти область определения функции

$$y=\sqrt[4]{\frac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}+\frac{2}{x^2-49}.$$

Группа В

Решить неравенства (9.216—9.220):

9.216. $\log_5 x+\log_x \frac{x}{3}<\frac{\log_5 x(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$.

9.217. $\frac{\sin x-2}{4\sin^2 x-1}>2$.

9.218. $\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x+1}<3$.

9.219. $\frac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|}$.

9.220. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$.

9.221. Доказать, что из всех прямоугольных параллелепипедов с данной суммой всех ребер наибольший объем имеет куб. (Для доказательства можно использовать, например, неравенство $\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$, верное для всяких положительных чисел.)

9.222. При каких значениях p система неравенств

$$-9<\frac{3x^2+px-6}{x^2-x+1}<6$$

выполняется для всех действительных значений x?

9.223. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}(x-1)\lg 2+\lg(2^{x+1}+1)<\lg(7\cdot 2^x+12),\\ \log_x(x+2)>2.\end{cases}$$

9.224. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\sin x-0{,}5}+\log_3(25-x^2).$$

9.225. Доказать неравенство

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$$

при $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $d>0$.

9.226. При каких значениях m неравенство

$$-6<\frac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1}<4$$

выполняется для всех действительных значений x?

Доказать неравенства (9.227—9.230):

9.227. $\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)\geqslant 8\ (x>0,\ y>0,\ z>0)$.

9.228. $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\ (a>0,\ b>0)$.

9.229. $\frac{a^4+b^4}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$.

9.230. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}>2$.

9.231. Без помощи таблиц показать, что

$$2<\log_3 2+\log_2 3<3.$$

9.232. Пусть число $x_1>0$ является корнем уравнения $ax^2+bx+c=0$. Показать, что существует корень x_2 уравнения $cx^2+bx+a=0$ такой, что $x_1+x_2\geqslant 2$.

9.233. Доказать, что если $(x^2+5x+6)(x^2+11x+30)<0$, то $\sin 2x>0$.

9.234. Из значений x, удовлетворяющих неравенству $\log_{1,3}(2x-2)<\log_{1,3}(x+1)$, указать те, для которых $\sin 2x<0$.

9.235. Числа x_1 и x_2 являются действительными корнями уравнений $5x^3-6=0$ и $6x^3-5=0$ соответственно. Показать, что $x_1+x_2>2$.

Решить неравенства (9.236—9.290):

9.236. $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2>0$.

9.237. $\log_x\log_2(4^x-12)\leqslant 1$.

9.238. $10\cdot 0{,}3^{\sqrt[4]{\log_{1/\sqrt{3}}(\operatorname{tg}x)}}>3$.

9.239. $2<2^{\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^2}<8$.

9.240. $3^{\frac{2\cos^2x-6}{2\cos^2x-1}}>3^{\frac{\cos x}{1-2\cos^2x}}$.

9.241. $0{,}2^{\cos 2x}-\frac{1}{25^{\cos^2x}}<4\cdot 125^{-1/2}$.

9.242. $\log_x\log_3(9^x-6)\geqslant 1$.

9.243. $\sqrt{\log_{1/2}(x^2+4x-4)}<1\ (x\in Z)$.

9.244. $\sqrt{1-9(\log_{1/8}x)^2}>1-4\log_{1/8}x$.

9.245. $\log_{1/2}x+\sqrt{1-4(\log_{1/2}x)^2}<1$.

9.246. $\log_{x^2}(3-2x)>1$.

9.247. $\log_3(4^x+1)+\log_{(4^x+1)}3>2{,}5$.

9.248. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_{1/3}(3^{x+2}-9)>-3$.

9.249. $\log_p \dfrac{1+\log_p^2 x}{1-\log_p x} < 0$.

9.250. $|x^3-1| > 1-x$. 9.251. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x$.

9.252. $\log_x (x^3+1)\cdot \log_{x+1} x > 2$.

9.253. $\log_x (x+1) < \log_{1/x} (2-x)$.

9.254. $\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \dfrac{x-1}{x+5} > 0$.

9.255. $\log_x (x^2+3x-3) > 1$.

9.256. $|x-1| + |2-x| > 3+x$.

9.257. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x}$.

9.258. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

9.259. $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{2}$.

9.260. $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$.

9.261. $\log_{1/2} \dfrac{|x^2-2x|+4}{|x+2|+x^2} \leqslant 0$.

9.262. $\log_{x^2} \dfrac{2x}{|x-3|} < \dfrac{1}{2}$.

9.263. $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1$.

9.264. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x)-1}} > 1$.

9.265. $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$. 9.266. $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} \geqslant 25$.

9.267. $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2 (x+6)} > 1$.

9.268. $\log_{|x-4|} (2x^2-9x+4) > 1$.

9.269. $\dfrac{1}{\log_{1/2} \sqrt{x+3}} \leqslant \dfrac{1}{\log_{1/2} (x+1)}$. 9.270. $\log_x \dfrac{3}{8-2x} \geqslant -2$.

9.271. $\log_{1/2} (x-3) - \log_{1/2} (x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0$.

9.272. $|2^{4x^2-1}-5| \leqslant 3$.

9.273. $8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geqslant 9^{\sqrt{x}}$.

9.274. $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geqslant (x^2+x+1)^3$.

9.275. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0.$

9.276. $\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x>\sin 10x.$

9.277. $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2}+12^\circ\right)+\operatorname{tg}(x+12^\circ)>0.$

9.278. $\left(\dfrac{15}{14}\right)^{|x+7|}<\left(\dfrac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|}.$

9.279. $\log_x 10-0,5\log_a 10>0\ (0<a<1).$

9.280. $\log_7 x-\log_3 7\cdot\log_3 x>\log_2 0,25.$

9.281. $x^{\log_a x+4}<a^4x\ (0<a<1).$

9.282. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1.$

9.283. $\log_x^2\sqrt{5}-\log_x 5\sqrt{5}+1,25<0.$

9.284. $|\log_3 x|<\left|\log_3\dfrac{x}{9}\right|.$

9.285. $\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+2\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)>0.$

9.286. $\sin^3 x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)+\cos^3 x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)>\dfrac{3\sqrt{3}}{8}.$

9.287. $2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1.$

9.288. $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x-2\operatorname{tg}2x-4\operatorname{tg}4x>8\sqrt{3}.$

9.289. $4\sin x\sin 2x\sin 3x>\sin 4x.$

9.290. $\sin(2x+10^\circ)+\sin(x+10^\circ)-\sin x<0.$

9.291. Показать, что

$$1/8<\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 70^\circ<1/4.$$

9.292. Решить неравенство

$$\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}>3\operatorname{tg}x.$$

9.293. Показать, что $\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}50^\circ>3.$

9.294. Показать, что при условии $360^\circ k-45^\circ<\alpha<360^\circ k+45^\circ$, где $k\in Z$, выполняется неравенство

$$\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha)+\operatorname{ctg}45^\circ+\operatorname{ctg}(45^\circ+\alpha)>3.$$

9.295. Решить неравенство

$$3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x<1/2.$$

9.296. Решить неравенство

$$\frac{\cos x+2\cos^2 x+\cos 3x}{\cos x+2\cos^2 x-1}>1.$$

9.297. Решить неравенство

$$8\sin^4 x-8\sin^2 x+\sin x-1<0.$$

9.298. Показать, что для всех значений x, принадлежащих первой четверти, выполняется неравенство

$$\sin x+\cos x+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+\sin^{-1}x+\cos^{-1}x>6.$$

9.299. Показать, что
$$2<\sqrt{\log_2 3}+\sqrt{\log_3 2}<\sqrt{2}+1.$$

9.300. Показать, что
$$1/8<\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ<1/4.$$

[9.301.] Решить неравенство $\log_{x^2-3} 729>3$.

[9.302.] Найти множество целых значений x, удовлетворяющих неравенству
$$\log_{0,3}\left(\sqrt{x+5}-x+1\right)>0.$$

[9.303.] Дано n неравенств:
$$\sqrt{1\cdot n}<\frac{1+n}{2},$$
$$\sqrt{2(n-1)}\leqslant\frac{1+n}{2},$$
$$\sqrt{3(n-2)}\leqslant\frac{1+n}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sqrt{(n-1)\cdot 2}\leqslant\frac{n+1}{2},$$
$$\sqrt{n\cdot 1}<\frac{n+1}{2}.$$

Требуется: 1) обосновать правильность неравенств для любого натурального $n>1$; 2) перемножив левые и правые части, выразить результат одним неравенством в наиболее простой форме.

[9.304.] Найти область определения функции
$$y=\sqrt{\log_{1/4}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-1}.$$

[9.305.] Решить неравенство
$$\frac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)}>3.$$

Глава 10

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Группа А

10.001. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной в 5 см и 12 см. Найти катеты треугольника.

10.002. Найти диагональ и боковую сторону равнобочной трапеции с основаниями 20 см и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

10.003. В равнобочной трапеции даны основания $a=21$ см, $b=9$ см и высота $h=8$ см. Найти радиус описанного круга.

10.004. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной m и n. Определить диагонали ромба.

10.005. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

10.006. Две окружности радиусов $R=3$ см и $r=1$ см касаются внешним образом. Найти расстояния от точки касания окружностей до их общих касательных.

10.007. Около окружности с диаметром в 15 см описана равнобочная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

10.008. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4 см, проведена медиана боковой стороны. Найти основание треугольника, если длина медианы равна 3 см.

10.009. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Вычислить радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

10.010. Каждая сторона правильного треугольника разделена на три равные части и соответственные точки деления, считая в одном направлении, соединены между собой. В получившийся правильный треугольник вписана окружность радиуса $r=6$ см. Определить стороны треугольников.

10.011. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти длины боковых сторон.

10.012. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а расстояние от точки A до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

10.013. Дан треугольник со сторонами 12 см, 15 см и 18 см. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найти отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.

10.014. Хорда окружности равна 10 см. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12 см.

10.015. Через концы дуги окружности, содержащей 120°, проведены касательные и в фигуру, ограниченную этими касательными и данной дугой, вписана окружность. Доказать, что ее длина равна длине исходной дуги.

[**10.016.**] В сектор AOB с радиусом R и углом 90° вписана окружность, касающаяся отрезков OA, OB и дуги AB. Найти радиус окружности.

10.017. Дана точка P, удаленная на 7 см от центра окружности с радиусом 11 см. Через эту точку проведена хорда длиной 18 см. Каковы длины отрезков, на которые делится хорда точкой P?

[**10.018.**] Дана трапеция $ABCD$, $O=[AC]\cap[BD]$, причем треугольник COD — равносторонний. Доказать, что середины отрезков OA, BC и OD являются вершинами равностороннего треугольника.

[**10.019.**] Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ конгруэнтны и перпендикулярны. Точки $P\in[AB]$, $Q\in[BC]$, $R\in[CD]$, $S\in[DA]$ делят стороны в равных отношениях (по обходу). Доказать, что $[PR]\perp[QS]$, $|PR| = |QS|$.

10.020. В пересечение двух конгруэнтных кругов вписан ромб с диагоналями 12 см и 6 см. Найти радиус окружностей.

10.021. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найти стороны треугольника.

10.022. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к его гипотенузе, делит прямой угол в отношении 1:2.

10.023. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности радиуса R, а две другие — на касательной к этой окружности. Найти длину диагонали квадрата.

[10.024.] Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны в точках M и N. Доказать, что

$$|MN| = \frac{2ab}{a+b},$$

где a и b — длины оснований.

10.025. Общая хорда двух окружностей служит для одной из них стороной вписанного квадрата, а для другой — стороной правильного вписанного шестиугольника. Найти расстояние между центрами окружностей, если радиус меньшей из них равен r. (Рассмотреть два возможных случая расположения окружностей.)

10.026. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 см и касательная, длина которой составляет 2/3 внутреннего отрезка секущей. Определить длину касательной.

10.027. Каждая из трех конгруэнтных окружностей радиуса r касается двух других. Найти площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

[10.028.] Основания равнобочной трапеции a и b, боковая сторона ее равна c, а диагональ равна d. Доказать, что $d^2=ab+c^2$.

10.029. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и служит для одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — стороной вписанного квадрата. Определить расстояние между центрами окружностей. (Рассмотреть два возможных случая.)

10.030. На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники и их вершины последовательно соединены. Определить отношение периметра полученного таким образом четырехугольника к периметру данного квадрата.

10.031. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность с радиусом в 2 единицы. Найти сторону ромба.

10.032. В треугольнике известны длины двух сторон 6 см и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

10.033. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

10.034. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной 12 см, а расстояние между точкам касания 14,4 см. Определить радиус окружности.

[10.035.] Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон.

10.036. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6 см, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти стороны треугольника.

10.037. Дан правильный треугольник ABC. Точка K делит сторону AC в отношении $2:1$, а точка M — сторону AB в отношении $1:2$ (считая в обоих случаях от вершины A). Показать, что длина отрезка KM равна радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

10.038. Периметр параллелограмма равен 90 см и острый угол содержит 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении $1:3$. Найти стороны параллелограмма

10.039. Прямые, содержащие боковые стороны равнобочной трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длины всех сторон трапеции, если ее площадь равна 12 см², а длина высоты равна 2 см.

[10.040.] Две окружности пересекаются в точках M и N, а прямая l пересекает окружности последовательно в точках P, Q, R, S. Найти величину угла PMS, если $\widehat{QNR}=\alpha$.

10.041. Величина одного из углов параллелограмма равна 60°, а меньшая диагональ $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного через точку пересечения диагоналей к большей стороне, равна $\sqrt{75}/2$ см. **Найти** длины сторон и большей диагонали параллелограмма.

10.042. Один из углов трапеции равен 30°, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований 8 см.

10.043. В окружность с диаметром, равным $\sqrt{12}$, вписан правильный треугольник. На его высоте, как на стороне, построен другой правильный треугольник, в который вписана новая окружность. Найти радиус этой окружности.

[10.044.] Длины диагоналей параллелограмма пропорциональны длинам его непараллельных сторон. Доказать, что углы между диагоналями такого параллелограмма равны его углам.

10.045. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно $\sqrt{3}+1$.

10.046. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе треугольника. Каков радиус окружности, если длины катетов равны 5 и 12?

[10.047.] Через точки пересечения двух окружностей проведены параллельные прямые. Доказать, что они пересекают окружности в вершинах параллелограмма.

10.048. В острый угол, равный 60°, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r. Найти радиус большей окружности.

10.049. Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 см и 40 см. Найти катеты треугольника.

10.050. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3 см, а меньший катет равен 10 см.

10.051. Три окружности равных радиусов попарно касаются друг друга. Прямые, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найти радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней окружностей равны соответственно 6 см и 4 см.

10.052. Окружность касается одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найти радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе треугольника, а катет треугольника равен a.

[10.053.] Доказать, что сумма расстояний от произвольной точки, принадлежащей равностороннему треугольнику, до его сторон постоянна. Найти эту постоянную.

[10.054.] Доказать, что множество всех точек M, для которых

$$|MA|^2-|MB|^2=kS_{MAB},$$

где A и B — данные две точки, S_{MAB} — площадь треугольника MAB, k — данная постоянная, есть пара прямых.

[10.055.] Биссектрисы углов A и B треугольника ABC одинаково наклонены к сторонам BC и AC. Найти зависимость между углами A и B.

10.056. Доказать, что сумма расстояний любой точки, взятой внутри правильного многоугольника, до всех прямых, содержащих его стороны, есть величина постоянная.

[10.057.] На сторонах CA и CB равнобедренного треугольника $ABC(|CA|=|CB|)$ даны точки P и Q такие, что $|BQ|=|CP|$. Найти множество середин отрезков PQ.

[10.058.] Прямые p и q, проходящие через центр M параллелограмма $ABCD$, делят его на четыре равновеликих четырехугольника, причем $p\cap(BC)=U$, $q\cap(DC)=V$. Доказать, что $|BU|:|VC|=|CU|:|DV|$.

10.059. В окружности радиуса r проведена хорда, равная $r/2$. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Найти расстояние между касательной и секущей.

10.060. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника соответственно равны 2 см и 5 см. Найти катеты треугольника.

10.061. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 см и 15 см. Разность длин сторон параллелограмма равна 7 см. Найти длины сторон параллелограмма и его диагоналей

10.062. В большем из двух концентрических кругов проведена хорда, равная 32 см и касающаяся меньшего круга. Определить длину радиуса каждого из кругов, если ширина образовавшегося кольца равна 8 см.

10.063. В треугольник вписан ромб так, что один угол у них общий, а противоположная вершина делит сторону треугольника в отношении 2:3. Диагонали ромба равны m и n. Найти стороны треугольника, содержащие стороны ромба.

10.064. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, основание 12 см. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные высоте треугольника и отсекающие от данного треугольника два прямоугольных треугольника. Найти длины сторон этих треугольников.

10.065. В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найти сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r.

10.066. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

[**10.067.**] Дан треугольник ABC, в котором $2h_C=|AB|$, $\hat{A}=75°$. Найти величину угла $\hat{C}$.

[**10.068.**] При переносе $\vec{m}$ треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$. Доказать, что если A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA и AB, то прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

10.069. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 15 см, а радиус вписанной в него окружности равен 6 см. Найти стороны треугольника.

10.070. В круговой сектор с центральным углом 120° вписан круг. Найти радиус вписанного круга, если радиус данного круга равен R.

[**10.071.**] Найти зависимость между длинами сторон треугольника ABC, если вершина C, середины сторон CA и CB и точка пересечения медиан треугольника принадлежат одной окружности.

10.072. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а боковая сторона равна 39 см. Определить радиус вписанного круга.

[10.073.] На окружности даны точки A и B. Найти множество всех точек пересечения пар конгруэнтных хорд AN и BP данной окружности.

10.074. В окружности с центром в точке O проведена хорда AB, пересекающая диаметр в точке M и составляющая с диаметром угол, равный 60°. Найти $|OM|$, если $|AM|=10$ см, а $|BM|=4$ см.

10.075. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Найти расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

10.076. Найти отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, к высоте, проведенной к гипотенузе.

10.077. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 см и 20 см. Найти биссектрису угла при основании треугольника.

10.078. Катеты прямоугольного треугольника равны соответственно 6 см и 8 см. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до центра описанной около него окружности.

10.079. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 24 см и 18 см.

10.080. Если в четырехугольнике диагонали лежат на биссектрисах его углов, то такой четырехугольник есть ромб. Доказать.

10.081. Площадь прямоугольника равна 9 см^2, а величина одного из углов, образованного диагоналями, равна 120°. Найти стороны прямоугольника.

10.082. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна S, а высота трапеции в два раза меньше ее боковой стороны. Определить радиус вписанного круга.

10.083. Сумма длин диагоналей ромба равна m, а его площадь равна S. Найти сторону ромба.

[**10.084.**] Дан квадрат $ABCD$. Найти множество всех таких точек M, что треугольники ABM, BCM, CDM и DAM являются равнобедренными.

10.085. В равнобочную трапецию вписана окружность радиуса R. Верхнее основание трапеции в два раза меньше ее высоты. Найти площадь трапеции.

10.086. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении $3:1$, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих трех точках меньше площади исходного треугольника?

10.087. В равнобедренный треугольник вписан квадрат единичной площади, одна сторона которого лежит на основании треугольника. Найти площадь треугольника, если известно, что центры тяжести треугольника и квадрата совпадают. (Центр тяжести треугольника лежит на пересечении его медиан.)

10.088. В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции.

10.089. Найти площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание этого треугольника равно 24 см, а боковая сторона 13 см.

10.090. Расстояние центра круга до хорды длиной в 16 см равно 15 см. Найти площадь треугольника, описанного около круга, зная, что периметр треугольника равен 200 см.

10.091. Найти площадь круга, вписанного в равнобочную трапецию, если ее большее основание равно a, а угол при меньшем основании равен 120°.

10.092. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 15° и 60°. Найти площадь треугольника.

10.093. Периметр прямоугольного треугольника равен $2p$, а гипотенуза равна c. Определить площадь круга, вписанного в этот треугольник.

10.094. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 м и 16 м.

10.095. Площадь равнобедренного треугольника равна $1/3$ площади квадрата, построенного на основании данного треугольника. Длины боковых сторон треугольника короче длины его основания на 1 см. Найти длины сторон и высоты треугольника, проведенной к основанию.

10.096. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна $32\sqrt{3}$ см^2. Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\pi/3$.

10.097. Площадь прямоугольного треугольника равна $2\sqrt{3}$ см^2. Определить его высоту, проведенную к гипотенузе, если она делит прямой угол в отношении 1 : 2.

10.098. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся, как 2 : 1, считая от вершины. В каком отношении она делит боковые стороны?

10.099. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна 8 см^2. Определить стороны трапеции, если угол при основании содержит 30°.

10.100. Равносторонний шестиугольник $ABCDEF$ состоит из двух трапеций, имеющих общее основание CF. Известно, что $[AC]=13$ см, $[AE]=10$ см. Найти площадь шестиугольника.

10.101. Найти площадь правильного треугольника, вписанного в квадрат со стороны a, при условии, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной квадрата.

10.102. Диагональ равнобочной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, периметр равен 42 см. Найти площадь трапеции.

10.103. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если высота, проведенная к гипотенузе, делит последнюю на отрезки длиной 25,6 см и 14,4 см.

10.104. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь его равна 24 см^2. Найти площадь описанного круга.

10.105. Найти площадь равнобедренного треугольника с углом в 120°, если радиус вписанного круга равен $\sqrt[4]{12}$ см.

10.106. На сторонах равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой c вне этого треугольника построены квадраты. Центры этих квадратов соединены между собой. Найти площадь полученного треугольника.

10.107. В квадрат вписан другой квадрат, вершины которого лежат на сторонах первого, а стороны составляют со сторонами первого квадрата углы по 60°. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного?

10.108. Найти площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

10.109. На сторонах равностороннего треугольника вне его построены квадраты. Их вершины, лежащие вне треугольника, последовательно соединены. Определить площадь полученного шестиугольника, если сторона данного треугольника равна a.

10.110. Данный квадрат со стороной a срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Определить площадь этого восьмиугольника.

10.111. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь квадрата, вписанного в ту же окружность.

10.112. Вычислить отношение площадей квадрата, правильного треугольника и правильного шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

10.113. Сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь отсекаемого ею сегмента.

10.114. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь отсекаемого ею сегмента.

10.115. На диаметре $2R$ полуокружности построен правильный треугольник, сторона которого конгруэнтна диаметру. Треугольник расположен по ту же сторону от диаметра, что и полуокружность. Вычислить площадь той части треугольника, которая лежит вне круга.

10.116. Круг радиуса R обложен четырьмя равными кругами, касающимися данного так, что каждые два соседних из этих четырех кругов касаются друг друга. Вычислить площадь одного из этих кругов.

10.117. В точках пересечения двух окружностей с радиусами 4 см и 8 см касательные к ним взаимно перпендикулярны. Вычислить площадь фигуры O_1ABO_2, где (AB) — общая касательная к окружностям, а O_1 и O_2 — их центры.

10.118. Определить сторону ромба, зная, что площадь его равна S, а длины диагоналей относятся, как $m:n$.

10.119. Периметр ромба равен $2p$; длины диагоналей относятся, как $m:n$. Вычислить площадь ромба.

10.120. Две окружности радиуса R с центрами в точках O_1 и O_2 касаются друг друга. Их пересекает прямая в точках A, B, C и D так, что $|AB|=|BC|=|CD|$. Найти площадь четырехугольника O_1ADO_2.

10.121. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, если ее острый угол равен 60°, меньшее основание равно a и большая боковая сторона равна b.

[10.122.] Найти множество середин всех хорд данной окружности с центром O, пересекающих данную хорду AB этой же окружности.

10.123. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить боковую сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции равен $\pi/6$.

10.124. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Доказать, что треугольники, прилегающие к боковым сторонам, равновелики.

[10.125.] В окружность радиуса R вписан правильный 12-угольник. Вычислить площадь пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$.

10.126. На диаметре полукруга построен правильный треугольник, стороны которого равны диаметру. Как относятся площади частей треугольника, лежащих вне и внутри полукруга?

10.127. В правильный треугольник со стороной, равной a, вписана окружность, в которую вписан правильный шестиугольник. Найти площадь шестиугольника.

10.128. Вокруг квадрата, сторона которого равна a, описана окружность, а около окружности описан правильный шестиугольник. Определить площадь шестиугольника.

10.129. В равнобочную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон ее делится точкой касания на отрезки длиной m и n. Определить площадь трапеции.

10.130. Сторона квадрата, вписанного в окружность, отсекает сегмент, площадь которого равна $(2\pi - 4)$ см^2. Найти площадь квадрата.

10.131. В ромб с острым углом 30° вписан круг. Площадь круга равна Q. Найти площадь ромба.

10.132. В круговой сектор, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Найти отношение площади этого круга к площади сектора.

10.133. Из точки M, находящейся на расстоянии a от окружности, проведена к этой окружности касательная длиной $2a$. Найти площадь правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность.

10.134. В равнобочной трапеции одно основание равно 40 см, а другое 24 см. Диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны. Найти ее площадь.

10.135. Основание треугольника равно 30 см, а боковые стороны 26 см и 28 см. Высота разделена в отношении 2 : 3 (считая от вершины) и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь получившейся при этом трапеции.

10.136. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 см и 5 см. Определить площадь треугольника.

10.137. Хорда AB постоянной длины скользит своими концами по окружности радиуса R. Точка C этой хорды, находящаяся на расстояниях a и b от концов A и B хорды, описывает при полном обороте окружность. Вычислить площадь кольца, заключенного между данной окружностью и окружностью, описанной точкой C.

10.138. Три конгруэнтные окружности радиуса r попарно касаются одна другой. Вычислить площадь фигуры, расположенной вне окружностей и ограниченной их дугами, заключенными между точками касания.

10.139. На сторонах ромба, как на диаметрах, описаны полуокружности, обращенные внутрь ромба. Определить площадь полученной розетки, если диагонали ромба равны a и b.

10.140. Доказать, что если через вершины четырехугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь параллелограмма, определяемого этими прямыми, в два раза больше площади данного четырехугольника.

10.141. Определить боковые стороны равнобочной трапеции, если ее основания и площадь равны соответственно 8 см, 14 см и 44 см^2.

10.142. В правильный треугольник вписана окружность, а в нее вписан правильный шестиугольник. Найти отношение площадей треугольника и шестиугольника.

10.143. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в 60° и 120°. Найти отношение площадей этих кругов.

10.144. В прямоугольнике проведены биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне. Определить, на какие части делится площадь прямоугольника этими биссектрисами, если стороны прямоугольника равны 2 м и 4 м.

10.145. Высота ромба равна 12 см, а одна из его диагоналей равна 15 см. Найти площадь ромба.

[10.146.] Правильный треугольник ABC, вписанный в окружность радуса R, повернут вокруг центра окружности на 90° в положение $A_1B_1C_1$. Вычислить площадь шестиугольника $AA_1BB_1CC_1$.

[10.147.] Доказать, что для площади S всякого треугольника ABC выполняется неравенство $S \leqslant {}^1/_4\,(b^2+c^2)$. Выяснить, для какого треугольника имеет место равенство.

10.148. Найти площадь равнобочной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом $60°$.

10.149. Круг, радиус которого равен R, разделен на два сегмента хордой, равной стороне вписанного квадрата. Определить площадь меньшего из этих сегментов.

10.150. Определить площадь кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями, длины которых равны C_1 и C_2 $(C_1 > C_2)$.

10.151. Круг разделен на два сегмента хордой, конгруэнтной стороне правильного вписанного треугольника. Определить отношение площадей этих сегментов.

10.152. В правильный шестиугольник, сторона которого равна a, вписана окружность, и около него же описана окружность. Определить площадь кругового кольца, заключенного между этими окружностями.

10.153. Круг радиуса R разделен двумя концентрическими окружностями на три равновеликие фигуры. Найти радиусы этих окружностей.

10.154. Площадь кругового кольца равна S. Радиус большей окружности равен длине меньшей окружности. Определить радиус последней.

10.155. В круге радиуса R по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды, одна из которых конгруэнтна стороне правильного вписанного треугольника, а другая — стороне правильного вписанного шестиугольника. Определить площадь части круга, содержащейся между хордами.

10.156. В круг радиуса R вписаны два правильных треугольника так, что при их взаимном пересечении каждая из сторон разделилась на три конгруэнтных отрезка. Найти площадь пересечения этих треугольников.

10.157. Через точки R и E, принадлежащие сторонам AB и AD параллелограмма $ABCD$ и такие, что $|AR| = {}^2/_3|AB|$, $|AE| = {}^1/_3|AD|$, проведена прямая. Найти отношение площади параллелограмма к площади полученного треугольника.

10.158. Три окружности радиусов $R_1 = 6$ см, $R_2 = 7$ см, $R_3 = 8$ см попарно касаются друг друга. Определить площадь треугольника, вершины которого совпадают с центрами этих окружностей.

10.159. Найти отношение площадей равностороннего треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, длины сторон которых равны.

10.160. В трапеции, площадь которой равна 594 м^2, высота 22 м, а разность параллельных сторон равна 6 м, найти длину каждой из параллельных сторон.

10.161. Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см проведен перпендикуляр к гипотенузе. Вычислить площади образовавшихся треугольников.

10.162. Вычислить площадь равнобедренного треугольника, если длина его высоты, проведенной к боковой стороне, равна 12 см.

10.163. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Найти отношение площадей описанного и вписанного в этот треугольник кругов.

10.164. Вычислить площадь трапеции $ABCD$, если длины ее оснований относятся, как $5:3$ и площадь треугольника ADM равна 50 см, где $M = (AB \cap)(CD)$.

10.165. В правильный треугольник вписана окружность и около него описана окружность. Найти площадь образовавшегося кольца, если сторона треугольника равна a.

10.166. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3 см. Найти площадь этого треугольника.

10.167. Доказать, что площадь трапеции равна произведению длины одной из непараллельных сторон и длины перпендикуляра, проведенного через середину другой боковой стороны на первую.

10.168. Доказать, что если диаметр полукруга разделить на две произвольные части и на каждой из них построить как на диаметре полуокружность (внутри данного полукруга), то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, будет равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра к диаметру полукруга, проведенного в точке деления.

10.169. В круг радиуса R вписан прямоугольник, площадь которого вдвое меньше площади круга. Определить стороны прямоугольника.

10.170. Определить площадь круга, вписанного в сектор круга радиуса R с хордой $2a$.

10.171. Основания трапеции равны a и b, углы при большем основании равны $\pi/6$ и $\pi/4$. Найти площадь трапеции.

10.172. В ромб с острым углом 30° вписан круг, а в круг — квадрат. Найти отношение площади ромба к площади квадрата.

10.173. По трем данным сторонам a, b и c треугольника определить площадь описанного около него круга.

10.174. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить радиус этого круга, если угол при основании трапеции равен 30°.

10.175. Найти площадь равнобедренного треугольника, если основание его равно a, а длина высоты, проведенной к основанию, равна длине отрезка, соединяющего середины основания и боковой стороны.

10.176. Доказать, что в параллелограмме $ABCD$ расстояния от любой точки диагонали AC до прямых BC и CD обратно пропорциональны длинам этих сторон.

10.177. Доказать, что отношение периметра треугольника к одной из его сторон равно отношению высоты, опущенной на эту сторону, к радиусу вписанной окружности.

10.178. Найти длины сторон равнобедренного треугольника ABC с основанием $[AC]$, если известно, что длины его высот AN и BM равны соответственно n и m.

10.179. Ромб, у которого сторона равна меньшей диагонали, равновелик кругу радиуса R. Определить сторону ромба.

10.180. Вычислить площадь трапеции по разности оснований, равной 14 см, и двум непараллельным сторонам, равным 13 см и 15 см, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

10.181. В квадрате со стороной a середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Определить площадь внутреннего треугольника.

10.182. Около квадрата со стороной a описана окружность. В один из образовавшихся сегментов вписан квадрат. Определить площадь этого квадрата.

10.183. В равнобочную трапецию вписан круг. Доказать, что отношение площади круга к площади трапеции равно отношению длины окружности к периметру трапеции.

10.184. Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой содержат 16 см и 44 см, а непараллельные 17 см и 25 см.

10.185. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а дагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

10.186. Длины оснований равнобедренной трапеции относятся, как 5 : 12, а длина ее высоты равна 17 см. Вычислить радиус окружности, описанной около трапеции, если известно, что ее средняя линия конгруэнтна высоте.

10.187. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна H и вдвое больше своей проекции на боковую сторону. Найти площадь треугольника.

10.188. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, относится к радиусу вписанной в него окружности, как 5 : 2. Найти площадь треугольника, если один из его катетов равен a.

10.189. В сегмент, дуга которого равна 60°, вписан квадрат. Вычислить площадь квадрата, если радиус круга равен $2\sqrt{3}+\sqrt{17}$.

10.190. В треугольнике стороны a, b, c относятся, как 2 : 3 : 4. В него вписан полукруг с диаметром, лежащим на большей стороне. Найти площадь полукруга.

Группа Б

10.191. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на расстояния 3 см и 9 см. Найти стороны трапеции.

10.192. Две окружности касаются внешним образом. Их радиусы относятся, как 3 : 1, а длина их общей внешней касательной равна $6\sqrt{3}$. Определить периметр фигуры, образованной внешними касательными и внешними частями окружностей.

10.193. Внутри прямого угла дана точка M, расстояния которой от сторон угла равны 4 см и 8 см. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от прямого угла треугольник с площадью 100 см^2. Найти катеты треугольника.

[10.194.] Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник, принадлежит треугольнику, вершины которого совпадают с серединами сторон данного треугольника.

10.195. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 см и 23 см. Найти радиус окружности.

[10.196.] Около окружности описан шестиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Доказать, что эти стороны попарно конгруэнтны.

10.197. В прямоугольный треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см вписана окружность. Через центр окружности построены прямые, параллельные сторонам треугольника. Вычислить длины средних отрезков сторон треугольника, отсекаемых построенными прямыми.

10.198. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис 15 см и 13 см.

10.199. Основания трапеции равны 4 см и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

10.200. В треугольник вписан ромб со стороной m так, что один угол у них общий, а противоположная вершина ромба лежит на стороне треугольника и делит эту сторону на отрезки длины p и q. Найти стороны треугольника.

10.201. Дан треугольник ABC такой, что $|AB|=15$ см, $|BC|=12$ см и $|AC|=18$ см. Вычислить, в каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C.

10.202. Дан равнобедренный треугольник с основанием, равным a и боковой стороной, равной b. Доказать, что центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании в отношении $(a+b)/b$, считая от вершины угла.

10.203. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 см и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно 5 см.

10.204. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 10 см и 12 см. Найти радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4 см.

10.205. В некоторый угол вписана окружность радиуса 5 см. Длина хорды, соединяющей точки касания, равна 8 см. К окружности проведены две касательные параллельно хорде. Определить стороны образовавшейся трапеции.

10.206. Какими целыми числами выражаются стороны равнобедренного треугольника, если радиус вписанной окружности равен 3/2 см, а описанной 25/8 см?

10.207. В треугольник со сторонами 10 см, 17 см и 21 см вписан прямоугольник с периметром в 24 см так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

10.208. Через вершину острого угла построены перпендикуляры к прямым, содержащим стороны ромба, которым не принадлежит эта вершина. Длина каждого перепендикуляра равна 3 см, а расстояние между их основаниями $3\sqrt{3}$ см. Вычислить длины диагоналей ромба.

10.209. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найти радиус окружности.

10.210. Найти радиус окружности, описанной около равнобочной трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10.

10.211. На большом катете прямоугольного треугольника, как на диаметре, построена окружность. Определить радиус этой окружности, если меньший катет треугольника равен 7,5 см, а длина хорды, соединяющей вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы и окружности, равна 6 см.

10.212. Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найти расстояния от середины одной из больших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его равны 24 см и 7 см.

10.213. Центр полуокружности, вписанной в прямоугольный треугольник так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40. Найти длину дуги полуокружности, заключенной между точками ее касания с катетами.

10.214. Около круга радиуса 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом при основании в 30°. Определить стороны треугольника.

10.215. В прямоугольном треугольнике медианы катетов равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу треугольника.

10.216. Две окружности, радиусы которых 4 и 8, пересекаются под прямым углом. Определить длину их общей касательной.

10.217. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять трапеция, чтобы в нее можно было вписать и вокруг нее можно было описать окружность?

10.218. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны 4 см и 12 см.

[**10.219.**] В окружности проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды AB и CD. Доказать, что $|AC|^2+|BD|^2=4R^2$.

10.220. Показать, что сумма расстояний любой точки, взятой на стороне правильного треугольника, до двух других его сторон, есть величина постоянная.

10.221. Две стороны треугольника равны соответственно 6 см и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти третью сторону треугольника.

10.222. Окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом. Боковые стороны равнобедренного треугольника являются их общими касательными, а основание касается большей из окружностей. Найти основание треугольника.

10.223. Периметр прямоугольного треугольника равен 60 см. Найти его стороны, если высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.

10.224. Дан равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 18 см. Отрезки какой длины нужно отложить от вершины треугольника на его боковых сторонах, чтобы, соединив их концы, получить трапецию с периметром, равным 40 см?

10.225. Две окружности разных радиусов касаются друг друга внешним образом. Найти угол, определяемый хордами, соединяющими точку касания окружностей с точками касания их общей внешней касательной.

10.226. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найти все стороны треугольника, если центр вписанной окружности удален от вершины прямого угла на расстояние $\sqrt{8}$ см.

10.227. Внутри равностороннего треугольника взята точка M, отстоящая от его сторон на расстояниях b, c, d. Найти высоту этого треугольника.

10.228. Один конец диаметра полуокружности совпадает с вершиной угла при основании равнобедренного треугольника, а другой принадлежит этому основанию. Найти радиус полуокружности, если она касается одной боковой стороны и делит другую на отрезки длиной 5 см и 4 см, считая от основания.

10.229. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 см и 5 см и диагональю, равной 6 см. Найти стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма соответственно параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.

10.230. Высота, основание и сумма боковых сторон треугольника равны соответственно 24 см, 28 см и 56 см. Найти боковые стороны.

10.231. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса r. Найти стороны трапеции, если ее меньшее основание равно $4r/3$.

10.232. В треугольник с боковыми сторонами 9 см и 15 см вписан параллелограмм так, что одна из его сторон длиной в 6 см лежит на основании треугольника, а диагонали параллелограмма соответственно параллельны боковым сторонам треугольника. Найти другую сторону параллелограмма и основание треугольника.

10.233. Найти среднюю линию равнобочной трапеции с высотой h, если боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом в 120°.

10.234. Окружность радиуса 13 см касается двух смежных сторон квадрата со стороной в 18 см. На какие два отрезка делит окружность каждую из двух других сторон квадрата?

10.235. В равнобедренном треугольнике угол при основании содержит 72°, а биссектриса этого угла имеет длину, равную m. Найти длины сторон треугольника.

10.236. В равнобедренном треугольнике угол при вершине содержит 36°, а биссектриса угла при основании равна $\sqrt{20}$. Найти длины сторон треугольника.

[10.237.] Диагонали четырехугольника конгруэнтны, а длины его средних линий равны p и q. Вычислить площадь четырехугольника.

10.238. Большое основание трапеции в два раза больше ее меньшего основания. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти отношение высоты каждой из двух образовавшихся трапеций к высоте данной трапеции.

10.239. Найти радиус круга, в сегмент которого, соответствующий хорде длиной в 6 см, вписан квадрат со стороной 2 см.

10.240. Длина основания равнобедренного треугольника равна 12 см, а боковой стороны — 18 см. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Вычислить длину отрезка с концами в основаниях высот.

10.241. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной b, проведены биссектрисы углов при основании. Отрезок прямой между точками пересечения биссектрис с боковыми сторонами равен m. Определить основание треугольника.

10.242. Основание равнобедренного треугольника равно 8, а боковая сторона 12. Найти длину отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис углов при основании с боковыми сторонами треугольника.

10.243. Внутри угла в 60° расположена точка, отстоящая на расстояниях $\sqrt{7}$ см и $2\sqrt{7}$ см от сторон угла. Найти расстояние этой точки от вершины угла.

10.244. В треугольник вписана окружность радиуса 3 см. Вычислить длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки с длинами 4 см и 3 см.

10.245. В угол вписаны три окружности — малая, средняя и большая. Большая окружность проходит через центр средней, а средняя через центр малой окружности. Определить радиусы средней и большой окружностей, если радиус меньшей равен r и расстояние ее центра от вершины угла равно a.

10.246. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 8 см и 4 см. Найти среднюю линию трапеции.

10.247. Основания двух правильных треугольников со сторонами a и $3a$ лежат на одной и той же прямой. Треугольники расположены по разные стороны от прямой и не имеют общих точек, а расстояние между ближайшими концами их оснований равно $2a$. Найти расстояние между вершинами треугольников.

10.248. К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r построена секущая так, что окружности отсекают на ней три конгруэнтных отрезка. Найти длины этих отрезков.

10.249. На отрезке $[AB]$ взята точка M. На $[AM]$ и $[MB]$ по одну сторону от (AB) построены квадраты.

Около квадратов описаны окружности, пересекающиеся в точке N. Найти множество точек N при различном выборе точек M.

10.250. Точка $M \in [AB]$; на $[AM]$ и $[MB]$ по одну сторону от (AB) построены квадраты, описанные окружности которых пересекаются в точке N. Доказать, что (AN) проходит через вершину второго квадрата и что треугольник ANB прямоугольный.

10.251. На отрезке AB произвольно взята точка M. На $[AM]$ и $[MB]$ по одну сторону от (AB) построены квадраты. Около квадратов описаны окружности, пересекающиеся в точке N. Показать, что треугольник ANB прямоугольный.

10.252. Стороны треугольника относятся, как $5:4:3$. Найти отношение отрезков сторон, на которые они делятся точкой касания вписанной окружности.

10.253. Для треугольника со сторонами в 26 см, 28 см и 30 см найти произведение радиусов описанной и вписанной окружностей.

10.254. В треугольнике ABC проведены медианы AL и BM, пересекающиеся в точке K. Вершина C лежит на окружности, проходящей через точки K, L, M. Длина стороны AB равна a. Найти длину медианы CN.

10.255. Через точку A окружности с радиусом в 10 см проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC. Вычислить радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если $|AB|=16$ *см*.

10.256. Длины двух сторон остроугольного треугольника равны 13 см и 10 см. Найти длину третьей стороны, зная, что эта сторона конгруэнтна проведенной к ней высоте.

10.257. Через точку P диаметра данной окружности проведена хорда AB, образующая с диаметром угол величиной $60°$. Вычислить радиус окружности, если $|AP|=a$ и $|BP|=b$.

10.258. Расстояния точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до его сторон AC и BC соответственно равны 2 см и 4 см. Вычислить расстояние точки M до (AB), если $|AB|=10$ см, $|BC|=17$ см, $|AC|=21$ см.

10.259. На отрезке AC длины 12 см построена точка B так, что $|AB|=4$ см. На отрезках AB и AC, как на диаметрах, построены в одной полуплоскости с границей (AC) полуокружности. Вычислить радиус окружности, касающейся построенных окружностей и (AC).

10.260. Сторона треугольника равна 48 см, а высота, проведенная к этой стороне, равна 8,5 см. Найти расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник, до вершины, противолежащей данной стороне, если радиус вписанной окружности равен 4 см.

10.261. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=|BC|$) на стороне BC построена точка D так, что $|BD|:|DC|=1:4$. Вычислить $|BM|:|ME|$, где $[BE]$ — высота треугольника ABC и $M=[BE]\cap(AD)$.

10.262. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, равна h; радиус вписанной окружности равен r. Найти гипотенузу.

10.263. Медианы треугольника равны 5 см, $\sqrt{52}$ см и $\sqrt{73}$ см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

10.264. Показать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма полупериметра и радиуса вписанной окружности равна сумме катетов.

10.265. Показать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма диаметров описанной и вписанной окружностей равна сумме его катетов.

10.266. Найти третью сторону остроугольного треугольника, если две его стороны равны a и b и известно, что медианы этих сторон пересекаются под прямым углом.

10.267. На отрезке AB взята точка C и на частях AC и CB отрезка AB, как на диаметрах, построены полуокружности. Доказать, что сумма длин этих полуокружностей не зависит от положения точки C на отрезке AB.

10.268. Точка C перемещается по отрезку AB длины l. На отрезках AC и CB, как на основаниях, построены правильные треугольники по одну сторону от AB. Где нужно взять точку C, чтобы расстояние между вершинами треугольников было наименьшим?

10.269. Высоты треугольника равны 12 см, 15 см и 20 см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

10.270. Найти отношение суммы квадратов всех медиан треугольника к сумме квадратов всех его сторон.

10.271. Найти площадь треугольника, если его высоты равны 12 см, 15 см и 20 см.

10.272. Числа m_1, m_2 и m_3 выражают длины медиан некоторого треугольника. Показать, что если выполняется равенство

$$m_1^2+m_2^2=5m_3^2,$$

то треугольник является прямоугольным.

10.273. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями Q и q. Найти катеты.

10.274. Числа h_1, h_2 и h_3 выражают длины высот некоторого треугольника. Показать, что если выполняется равенство

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2+\left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2=1,$$

то треугольник является прямоугольным.

10.275. Длины медиан треугольника равны 5 см, $\sqrt{52}$ см и $\sqrt{73}$ см. Определить вид треугольника.

10.276. Прямоугольный треугольник разделен высотой, проведенной к гипотенузе, на два треугольника с площадями 384 см^2 и 216 см^2. Найти гипотенузу.

10.277. Найти биссектрису прямого угла треугольника, у которого катеты равны a и b.

10.278. Дан квадрат, сторона которого равна a. Определить стороны равновеликого ему равнобедренного треугольника, у которого сумма длин основания и высоты равна сумме длин двух боковых сторон.

10.279. Точки M, N, P, Q являются серединами сторон AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$. Вычислить площадь фигуры, являющуюся пересечением четырехугольников $ABCD$, $ANCQ$ и $BPDM$, если площадь ромба равна 100 см^2.

10.280. Определить углы равнобедренного треугольника, если его площадь относится к площади квадрата, построенного на его основании, как $\sqrt{3}:12$.

10.281. В окружность вписан четырехугольник с углами 120°, 90°, 60° и 90°. Площадь четырехугольника равна $9\sqrt{3}$ см^2. Найти радиус окружности, если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны.

10.282. В треугольнике ABC проведена прямая DE, параллельная основанию AC. Площадь треугольника ABC равна 8 кв. ед., а площадь треугольника DEC равна 2 кв. ед. Найти отношение длины отрезка DE к длине основания треугольника ABC.

10.283. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, а гипотенуза равна 10 см. Найти радиус вписанной окружности.

10.284. Около круга радиуса R описаны квадрат и равносторонний треугольник, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

10.285. В круге радиуса R проведены по разные стороны от центра две параллельные хорды, одна из которых стягивает дугу в 60°, другая — 120°. Найти площадь части круга, заключенной между хордами.

10.286. Две окружности радиусов r и $3r$ внешне касаются. Найти площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей внешней касательной.

10.287. Найти площадь треугольника, вписанного в круг радиуса 2 см, если два угла треугольника равны $\pi/3$ и $\pi/4$.

10.288. Найти площадь трапеции, диагонали которой равны 7 см и 8 см, а основания 3 см и 6 см.

10.289. В ромб со стороной a и острым углом 60° вписана окружность. Определить площадь четырехугольника, вершины которого лежат в точках касания окружности со сторонами ромба.

10.290. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. К этим окружностям проведена общая внешняя касательная, и в образовавшийся при этом криволинейный треугольник вписан круг. Найти его площадь.

10.291. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 1 см и 2 см. Найти площадь трапеции.

10.292. Окружность радиуса R разделена на шесть конгруэнтных дуг и через каждые две соседние точки деления проведены внутри круга, образованного этой окружностью конгруэнтные дуги такого радиуса, что на данной окружности они взаимно касаются. Вычислить площадь внутренней части данного круга, заключенного между проведенными дугами.

10.293. В некоторый угол вписана окружность радиуса R, а длина хорды, соединяющей точки касания, равна a. Параллельно этой хорде проведены две касательные, в результате чего получилась трапеция. Найти площадь образовавшейся трапеции.

10.294. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти площадь трапеции, ограниченной двумя общими касательными к этим окружностям и прямыми, соединяющими точки касания.

10.295. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

10.296. Найти площадь прямоугольного треугольника, если даны радиусы описанного и вписанного в него кругов R и r.

10.297. Длины сторон треугольника относятся, как $m:n:m$. Найти отношение площади этого треугольника к площади треугольника, вершины которого находятся в точках пересечения биссектрис данного треугольника с его сторонами.

10.298. Определить площадь сегмента, если периметр его равен p, а дуга содержит 120°.

10.299. На отрезке $[AB]$ и на каждой его половине построены как на диаметрах полукруги [по одну сторону от (AB)]. Считая радиус большого полукруга равным R, найти сумму площадей криволинейных треугольников, образовавшихся при построении круга, касательного ко всем трем данным полукругам.

10.300. Сторона правильного треугольника равна a. Определить площадь части треугольника, лежащей вне круга радиуса $a/3$, центр которого совпадает с центром треугольника.

10.301. Найти отношение площади квадрата, вписанного в сегмент с дугою в 180°, к площади квадрата, вписанного в сегмент того же самого круга с дугой в 90°.

10.302. Площадь четырехугольника равна S. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям четырехугольника.

10.303. В треугольнике ABC проведены медианы BD и CE; M — их точка пересечения. Доказать, что треугольник BCM равновелик четырехугольнику $ADME$.

10.304. Два круга концентричны, причем окружность меньшего круга делит большой круг на равновеликие части. Доказать, что часть кольца, заключенная между параллельными касательными к окружности меньшего радиуса, равновелика квадрату, вписанному в меньший круг.

10.305. Дан треугольник ABC. Найти множество точек M таких, что площади треугольников AMB и BMC равны.

10.306. Прямая пересекает окружность радиуса R в точках A и B таких, что $\smile{AB}=45°$, а прямую, перпендикулярную диаметру AM окружности и проходящую через ее центр, — в точке K. Прямая, проходящая через точку B перпендикулярно $[AM]$, пересекает его в точке C. Найти площадь трапеции $OCBK$.

10.307. Через две смежные вершины квадрата проведена окружность так, что длина касательной к ней, проведенной из третьей вершины, в три раза больше стороны квадрата. Найти площадь круга, если сторона квадрата равна a.

10.308. Дан квадрат со стороной a. На каждой стороне квадрата вне его построена трапеция так, что верхние основания этих трапеций и их боковые стороны образуют правильный двенадцатиугольник. Вычислить его площадь.

10.309. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна 32 см^2; острый угол трапеции равен 30°. Определить стороны трапеции.

10.310. Высота равнобочной трапеции равна 14 см, а основания равны 16 см и 12 см. Определить площадь описанного круга.

10.311. Длины диагоналей ромба относятся, как $3:4$. Во сколько раз площадь ромба больше площади вписанного в него круга?

10.312. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Высоты его продолжены до пересечения с окружностью. Эти точки пересечения соединены между собой, в результате чего образуется новый треугольник. Вычислить ту часть площади круга, которая находится вне этих треугольников.

10.313. Две окружности радиуса R пересекаются так, что каждая из них проходит через центр другой. Две другие окружности того же радиуса имеют центры в точках пересечения первых двух окружностей. Найти площадь, общую всем четырем кругам.

10.314. Дан ромб $ABCD$. Его диагонали равны 3 см и 4 см. Из вершины тупого угла B проведены две высоты BE и BF. Вычислить площадь четырехугольника $BFDE$.

10.315. Отношение величин двух углов треугольника равно 2, а разность длин противоположных им углов равна 2 см; длина третьей стороны треугольника равна 5 см. Вычислить площадь треугольника.

10.316. В прямоугольном треугольнике расстояние от середины гипотенузы до одного из катетов равно 5 см, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4 см. Вычислить площадь треугольника.

10.317. В треугольнике ABC с длинами сторон $a=15$ см, $b=14$ см, $c=13$ см вычислить площадь треугольника, заключенного между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B.

10.318. Основания трапеции равны a и b. Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части.

10.319. Диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны, а площадь ее равна a^2. Определить высоту трапеции.

10.320. Медианы одного треугольника конгруэнтны сторонам другого треугольника. Найти отношение площадей этих треугольников.

10.321. Медианы треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Найти площадь треугольника.

10.322. Доказать, что вписанная в прямоугольный треугольник окружность делит гипотенузу на отрезки, произведение длин которых равно площади этого треугольника.

10.323. Диагональ равнобочной трапеции равна 10 см, а площадь равна 48 см^2. Найти высоту трапеции.

10.324. В треугольник вписан круг. Прямые, соединяющие центр круга с вершинами, делят площадь треугольника на части с площадями 4 см^2, 13 см^2 и 15 см^2. Найти стороны треугольника.

10.325. Основание треугольника равно 20 см; медианы боковых сторон равны 18 см и 24 см. Найти площадь треугольника.

10.326. Медианы треугольника равны 5 м, 6 м и 5 м. Найти площадь этого треугольника.

10.327. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 1 см и $\sqrt{15}$ см, а медиана третьей стороны равна 2 см.

10.328. Стороны треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Определить площади треугольников, на которые разбивается данный треугольник высотой и медианой, проведенными к большей по величине стороне.

10.329. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Определить площади треугольника, на которые разбивается данный треугольник его медианами.

10.330. Доказать, что три медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих частей.

10.331. В прямоугольнике со сторонами a и b проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найти площадь четырехугольника, образованного биссектрисами.

10.332. Определить стороны прямоугольного треугольника, у которого периметр равен $2p$, а площадь равна m^2.

10.333. Параллелограмм $ABCD$, у которого $|AB| = 153$ см, $|AD| = 180$ см, $|BE| = 135$ см ($[BE]$ — высота), разделить на три равновеликие фигуры прямыми, перпендикулярными к (AD). На каком расстоянии от точки A находятся точки пересечения этих перпендикуляров с (AD)?

10.334. Внутри квадрата со стороной a на каждой его стороне, как на диаметре, построена полуокружность. Найти площадь розетки, ограниченной дугами полуокружностей.

10.335. Периметр сектора равен 28 см, а его площадь равна 49 см². Определить длину дуги сектора.

10.336. В равносторонний треугольник ABC со стороной $a=2$ см вписан круг; точка A является центром второго круга с радиусом в 1 см. Найти площадь пересечения этих кругов.

10.337. Внутри правильного треугольника со стороной a расположены три конгруэнтные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и двух других окружностей. Найти площадь части треугольника, расположенной вне этих окружностей.

10.338. Криволинейный треугольник составлен тремя равными попарно касающимися дугами окружностей радиуса R. Найти площадь этого треугольника.

10.339. Центр равностороннего треугольника со стороной, равной 6 см, совпадает с центром окружности радиуса 2 см. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

10.340. В ромб вписана окружность радиуса R. Найти площадь ромба, если его бóльшая диагональ в 4 раза больше радиуса вписанной окружности.

10.341. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Проекция вершины прямого угла на гипотенузу делит ее на два отрезка, из которых меньший относится к большему, как больший ко всей гипотенузе. Определить площадь треугольника.

[10.342.] Длины сторон и диагоналей параллелограмма равны соответственно a, b, c и f. Найти углы параллелограмма, если $a^4+b^4=c^2f^2$.

10.343. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 35 см и 14 см, а биссектриса угла между ними содержит 12 см.

10.344. Вычислить площадь пересечения двух ромбов, длины диагоналей первого из которых равны 4 см и 6 см, а второй есть образ первого при повороте вокруг его центра на 90°.

10.345. Радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 2 см. Точка касания этой окружности делит одну из сторон на отрезки длиной 4 см и 6 см. Определить вид треугольника и вычислить его площадь.

10.346. Круг разделен диаметром на два полукруга. В один из них вписаны два новых полукруга, опирающиеся на радиус данного круга, как на свой диаметр. В криволинейную фигуру, ограниченную контурами этих трех полукругов, вписан круг. Во сколько раз его площадь меньше площади данного круга?

[10.347.] Найти отношения, на которые точка M пересечения биссектрис треугольника ABC делит каждую из его биссектрис, если $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$.

10.348. Произвольный четырехугольник разделен диагоналями на четыре треугольника; наименьшие площади трех из них равны 10 см², 20 см² и 30 см². Найти площадь данного четырехугольника.

10.349. Вся дуга окружности радиуса R разделена на 4 больших и 4 малых части, которые чередуются одна за другой. Большая часть в два раза длиннее малой. Определить площадь восьмиугольника, вершины которого лежат в точках деления дуги окружности.

10.350. На медиане BD треугольника ABC, площадь которого равна S, построена точка E так, что $|DE|=$ $=\frac{1}{4}|BD|$. Найти площадь треугольника AFC.

10.351. Пусть $[BD]$ — высота треугольника ABC, точка E — середина $[BC]$. Вычислить радиус круга, описанного около треугольника BDE, если $|AB|=30$ см, $|BC|=26$ см и $|AC|=28$ см.

10.352. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе, вдвое больше площади самого треугольника. Найти отношение катетов.

10.353. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении $1:3$, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих точках меньше площади исходного треугольника?

10.354. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Вычислить площадь этого треугольника, если известно, что $|AM|=|BM|=2$ см, а $|CM|=1$ см.

10.355. Равнобедренный треугольник со сторонами 8, 5 и 5 разделен на три равновеликие части перпендикулярами, проведенными из некоторой точки на его стороны. Найти расстояние от этой точки до каждой стороны данного треугольника.

10.356. Из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет квадрат. Доказать.

10.357. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $|AD|=24$ см и $|BC|=8$ см и диагоналей $|AC|=13$ см, $|BD|=5\sqrt{17}$ см. Вычислить площадь трапеции.

10.358. В трапеции $ABCD$ даны основания $|AD|=a$, $|BC|=b$. На продолжении BC выбрана такая точка M, что прямая AM отсекает от площади трапеции $ABCD$ ее $1/4$ часть. Найти длину отрезка CM.

10.359. В трапеции $ABCD$ с длинами оснований $|AD|=12$ см, $|BC|=8$ см на луче BC построена такая точка M, что (AM) делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найти $|CM|$.

10.360. Центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции, делит ее высоту в отношении $3:4$. Найти основания трапеции, если радиус окружности равен 10 и ее средняя линия равна высоте.

Группа В

10.361. В треугольнике ABC величина угла A вдвое больше величины угла B, а длины сторон, противолежащих этим углам, соответственно равны 12 см и 8 см. Найти длину третьей стороны треугольника.

10.362. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна m, радиус вписанной окружности равен r. Определить катеты. При каком соотношении между r и m задача имеет решение?

10.363. В равнобедренный треугольник с основанием в 12 см вписана окружность и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметров малых треугольников равна 48 см. Найти боковую сторону данного треугольника.

10.364. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длины m см и n см, считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найти длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.

10.365. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно $\sqrt{3}+1$.

10.366. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Найти радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания одной из общих внешних касательных, равны 6 см и 8 см.

10.367. Сторону правильного десятиугольника выразить через радиус R описанной окружности.

10.368. Вычислить длину биссектрисы угла A треугольника ABC с длинами сторон $a=18$ см, $b=15$ см, $c=12$ см.

10.369. В треугольник с периметром, равным 20 см, вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, содержит 2,4 см. Найти основание треугольника.

[10.370.] Точка C_1 — основание высоты CC_1 треугольника ABC. Найти зависимость между углами A и B, если $|CC_1|^2=|C_1A|\cdot|C_1B|$.

10.371. Медианы треугольника равны m_1, m_2, m_3. Найти стороны треугольника.

10.372. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Найти длину хорды DC, если центр окружности, вписанной в данный треугольник, удален от точки D на расстояние n см.

10.373. В треугольник со сторонами 6 см, 10 см и 12 см вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две бóльшие стороны. Найти параметр отсеченного треугольника.

[10.374.] В окружность с центром O вписан треугольник ABC, $[CC_1]$ — его медиана. Доказать, что если $\widehat{C_1OC}=90°$, то $|\hat{A}-\hat{B}|=90°$. Верно ли обратное утверждение?

[10.375.] Дан треугольник ABC. Через точку $M\in[AB]$ проведены прямые p и q параллельно (BC) и (AC), причем $p\cap(AC)=P$, $q\cap(BC)=Q$. Выразить площадь треугольника ABC через площади треугольников AMP и BMQ.

[10.376.] Длины оснований AB и DC трапеции $ABCD$ равны a и b. Прямая, параллельная (AB), пересекает стороны (BC) и (AD) в точках M и N. Вычислить $|MN|$, если трапеции $ABMN$ и $NMCD$ равновелики.

10.377. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки длиной 4 см и 2 см, а высота, проведенная к той же стороне, равна $\sqrt{15}$ см. Каковы длины сторон треугольника, если известно, что они выражаются целыми числами?

10.378. Две окружности касаются друг друга внешним образом. Четыре точки касания их внешних общих касательных A, B, C, D соединены последовательно. Показать, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и найти ее радиус, если радиусы данных окружностей равны R и r.

10.379. Высота и медиана треугольника, проведенные внутри него из одной его вершины, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Определить радиус описанной окружности, если медиана равна m.

10.380. В треугольнике ABC построен отрезок $[DE]$, $[DE]\parallel[AC]$, где $D \in [AB]$, $E \in [BC]$. Доказать, что $[AE]$, $[CD]$ и медиана, проведенная через вершину B, пересекаются в одной точке.

10.381. Доказать, что радиус описанной около треугольника окружности, проведенный в вершину треугольника, перпендикулярен к прямой, соединяющей основания высот треугольника, проведенных из двух других его вершин.

10.382. Даны две концентрические окружности. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки одной окружности до концов диаметра другой окружности не зависит ни от выбранной точки, ни от выбранного диаметра.

10.383. В треугольнике ABC проведены медианы AL и BM, пересекающиеся в точке K. Вершина C лежит на окружности, проходящей через точки K, L, M. Показать, что медиана CN образует со стороны AC и BC такие же углы, что и медианы BM и AL со стороной AB.

10.384. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке F. Точки B, D, E, F лежат на одной окружности. Показать, что угол B равен 60°.

10.385. В треугольнике ABC проведены высоты AF и BK, пересекающиеся в точке O. Показать, что вершина C лежит на окружности, проходящей через точки F, O, K.

10.386. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны соответственно $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Найти катеты.

10.387. В треугольнике ABC каждая высота h_c и h_b не меньше стороны, на которую она опущена. Найти углы треугольника.

10.388. Сторона BC треугольника ABC равна a; известно также, что каждая из двух высот, опущенных на стороны AB и AC, не меньше стороны, на которую она опущена. Найти длины сторон AB и AC.

10.389. В равнобедренном треугольнике ABC $|AB|=|BC|=25$ см и $|AC|=14$ *см*. Вычислить радиус круга, касающегося $[BC]$ в точке D — основании высоты AD и проходящего через середину $[AC]$.

10.390. В треугольнике ABC со сторонами $a=14$ см, $b=15$ см, $c=13$ см найти расстояние от точки пересечения высот до вершины A.

10.391. Точка $B \in [AC]$, причем $|AB|=14$ см, $|BC|=28$ см. На отрезках AB, BC и AC, как на диаметрах, построены в одной полуплоскости с границей (AB) полуокружности. Найти радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей.

10.392. В круг радиуса R вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

10.393. В ромб вписана окружность, радиус которой равен R и в четыре раза меньше большей диагонали ромба. Определить площадь каждой из фигур, ограниченных отрезками двух смежных сторон ромба от вершины до точек касания и меньшей дугой окружности, лежащей между точками касания.

10.394. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка и через нее проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, из которых три части являются треугольниками. Площади этих треугольников равны S_1, S_2 и S_3. Доказать, что площадь треугольника ABC равна $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

10.395. Центры четырех кругов расположены в вершинах квадрата со стороной a. Радиусы этих кругов равны a. Определить площадь их общей части.

10.396. В окружность радиуса R вписаны три конгруэнтные окружности, касающиеся внешней окружности и попарно друг друга. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими тремя окружностями.

10.397. В окружность радиуса R вписаны шесть конгруэнтных окружностей, каждая из которых касается данной окружности и двух соседних ей конгруэнтных. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими шестью окружностями.

10.398. В окружность радиуса R вписаны четыре конгруэнтные окружности, каждая из которых касается данной и двух соседних ей конгруэнтных. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырьмя окружностями.

10.399. Сторона правильного треугольника равна a. Из его центра радиусом $a/3$ описана окружность. Определить площадь части треугольника, лежащей вне окружности.

10.400. Вычислить площадь треугольника по двум сторонам a и b и биссектрисе l угла между ними.

10.401. Найти радиус круга, если площадь круга на Q кв. ед. больше площади вписанного в него правильного двенадцатиугольника.

10.402. Окружность радиуса R с центром в точке O разделена точками A, B, C, D, E, F на шесть равных частей. Определить площадь фигуры COE, ограниченной дугой OC с центром в точке B, дугой OE с центром в точке F и дугой CE с центром в точке A.

10.403. Через две смежные вершины квадрата проведена окружность так, что касательная к ней, проведенная из третьей вершины, равна двойной стороне квадрата. Найти площадь этого квадрата, если радиус окружности равен R.

10.404. Площадь треугольника ABC равна S_1; площадь треугольника AOB, где O — точка пересечения высот, равна S_2. Точка K — такая точка на прямой CO, что треугольник ABK — прямоугольный. Доказать, что площадь треугольника ABK есть среднее геометрическое между S_1 и S_2.

10.405. В равносторонний треугольник со стороной a вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что отрезок ее внутри треугольника равен b. Найти площадь треугольника, отсеченного этой касательной от данного.

10.406. Основания высот остроугольного треугольника ABC служат вершинами другого треугольника, периметр которого равен $2p$. Найти площадь треугольника ABC, если радиус описанной около него окружности равен R.

10.407. Стороны треугольника ABC разделены точками M, N и P так, что $|AM|:|MB|=|BN|:|NC|=|CP|:|PA|=1:4$. Найти отношение площади треугольника, ограниченного прямыми AN, BP и CM, к площади треугольника ABC.

10.408. Около окружности радиуса 5 см описана равнобочная трапеция. Расстояние между точками касания боковых сторон равно 8 см. Найти площадь трапеции.

10.409. Через данную точку внутри угла провести прямую так, чтобы она отсекла от него треугольник наименьшей площади.

10.410. В трепецию, у которой меньшее основание равно a, вписана окружность. Одна из боковых сторон трапеции делится точкой касания на отрезки длины m и n, считая от большего основания. Определить площадь трапеции.

10.411. Даны два правильных треугольника площади S, из которых второй есть образ первого при повороте вокруг его центра на угол 30°. Вычислить площадь пересечения этих треугольников.

10.412. Площадь прямоугольного треугольника равна $2r^2/3$, где r — радиус окружности, касающейся одного катета и продолжений другого катета и гипотенузы. Найти стороны треугольника.

10.413. Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника. Доказать, что если площади двух из них, прилежащих к основаниям трапеции, равны соответственно p^2 и q^2, то площадь трапеции равна $(p+q)^2$.

10.414. В четырехугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная другой диагонали AC. Эта прямая пересекает сторону AD в точке E. Доказать, что отрезок CE делит четырехугольник $ABCD$ на равновеликие части.

10.415. Большая из параллельных сторон трапеции равна a, меньшая равна b, непараллельные стороны равны c и d. Найти площадь трапеции.

10.416. Определить площадь треугольника по его трем высотам h_1, h_2, h_3.

10.417. В прямоугольный треугольник ABC ($\hat{C}=90°$) вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Найти отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_1B_1C_1$, если $|AC|=4$ см, $|BC|=3$ см.

10.418. Треугольник повернут вокруг центра тяжести на угол 180°. Определить отношение площади общей части исходного и повернутого треугольника к площади исходного треугольника.

10.419. Круг с центром на стороне AB треугольника ABC касается двух других его сторон. Найти площадь круга, если $a=13$ см, $b=14$ см, $c=15$ см, где a, b и c — длины сторон данного треугольника.

10.420. В треугольник с основанием, равным a, вписан квадрат, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Площадь квадрата составляет шестую часть площади треугольника. Определить высоту тругольника и сторону квадрата.

10.421. Длины параллельных сторон трапеции равны 20 см и 30 см, а площадь ее равна 400 см^2. На каком расстоянии от меньшей из параллельных сторон проходит прямая линия, ей параллельная и делящая площадь трапеции на две части, относящиеся, как $2:3$ (считая от меньшего основания)?

10.422. Длины двух отрезков, соединяющих середины катетов с вершинами противоположных углов прямоугольного треугольника, равны a и b. Определить площадь треугольника.

10.423. Сформулировать какой-нибудь способ построения правильного треугольника, равновеликого данному квадрату.

10.424. Высота треугольника, равная 2 см, делит угол треугольника в отношении $2:1$, а основание треугольника на части, меньшая из которых равна 1 см. Определить площадь этого треугольника.

10.425. Площадь треугольника равна S. Каждая сторона треугольника разделена на три части в отношении $m:n:m$. Определить площадь шестиугольника, вершинами которого служат точки деления.

10.426. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла отсекает на гипотенузе отрезки длиной a и b. Найти площадь квадрата, стороной которого является эта биссектриса.

10.427. Около окружности радиуса $R=1$ см описана равнобочная трапеция, площадь которой равна 5 см^2. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

10.428. Из каждой вершины основания равностороннего треугольника со стороной a проведены два луча, образующие с этими основаниями углы величиной 15° и 30°. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения построенных лучей.

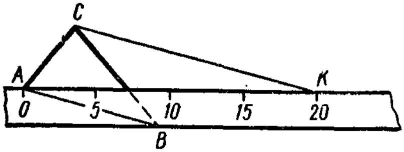

Рис. 10.1

10.429. Нулевое деление прозрачной линейки совмещено с вершиной A треугольника ABC, а его вершина B лежит на ребре линейки, противоположном шкале. Найти площадь треугольника ABC, если ширина линейки 5 см, а прямая CK, параллельная стороне AB, отсекает на линейке 20 см (рис. 10.1).

10.430. Через точку M, расположенную на диаметре окружности радиуса 4 см, проведена хорда AB, образующая с диаметром угол 30°. Через точку B проведена хорда BC, перпендикулярная данному диаметру. Найти площадь треугольника ABC, если $|AM|:|MB|=$ $=2:3$.

10.431. Основания высот некоторого остроугольного треугольника соединены прямыми. Доказать, что биссектрисы углов нового треугольника содержат высоты исходного.

10.432. Площади двух треугольников, прилегающих к основаниям трапеции и ограниченных ее диагоналями, равны m^2 и n^2. Найти площадь трапеции, если $m+n=p$.

10.433. Треугольник со сторонами 13, 14, 15 разделен на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными к большей стороне. Найти расстояния до этих прямых от ближайших к ним вершин треугольника, находящихся на большей стороне.

[10.434.] В окружность вписан четырехугольник, длины сторон которого равны a, b, c и d. Вычислить отношение длин диагоналей этого четырехугольника.

10.435. Основания равнобочной трапеции 4 см и 8 см; ее площадь 21 см^2. Какую сторону пересекает биссектриса угла при большем основании: меньшее основание или боковую сторону трапеции?

ГЛАВА 11

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Группа А

11.001. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом 30°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти объем пирамиды.

11.002. Вычислить объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен R.

11.003. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен 45°. Определить объем и полную поверхность пирамиды.

11.004. Определить объем наклонной треугольной призмы, у которой площадь одной из боковых граней равна S, а расстояние от плоскости этой грани до противолежащего ребра равно d.

11.005. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90°. Найти отношение боковой поверхности этой пирамиды к площади ее основания.

11.006. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13 см, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ см и $3\sqrt{17}$ см. Определить объем параллелепипеда.

11.007. Найти отношение объема куба к объему правильного тетраэдра, ребро которого конгруэнтно диагонали грани куба.

11.008. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b, острый угол между ними содержит 60°. Большая диагональ основания конгруэнтна меньшей диагонали параллелепипеда. Найти объем параллелепипеда.

11.009. Центр верхнего основания правильной четырехугольной призмы и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в призму пирамиды, объем которой равен V. Найти объем призмы.

11.010. В кубе, ребро которого равно a, центр верхней грани соединен с вершинами основания. Найти полную поверхность образовавшейся пирамиды.

11.011. Основанием правильной пирамиды служит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна 720°. Определить объем этой пирамиды, зная, что боковое ребро ее, равное l, составляет с высотой пирамиды угол 30°.

11.012. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, конгруэнтна ее боковому ребру и равна a. Найти полную поверхность этой пирамиды и ее объем.

11.013. Центр верхнего основания куба с ребром, равным a, соединен с серединами сторон нижнего основания, которые также соединены в последовательном порядке. Вычислить поверхность образовавшейся пирамиды.

11.014. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна h. Двугранный угол при основании равен 60°. Найти полную поверхность пирамиды.

11.015. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании равен 60°.

11.016. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной b, и углом 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

11.017. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1 см, а ее боковая поверхность составляет 3 см^2. Найти объем пирамиды.

11.018. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами, равными a, a и b. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определить объем пирамиды.

11.019. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l, а высота равна h. Определить объем пирамиды.

11.020. В основании наклонной призмы лежит параллелограмм со сторонами 3 дм и 6 дм и острым углом 45°. Боковое ребро призмы равно 4 дм и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найти объем призмы.

11.021. Каждое из боковых ребер пирамиды равно 269/32 см. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Найти объем пирамиды.

11.022. Определить объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол 30°, а сторона основания равна a.

11.023. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания 6 дм, а высота 4 дм. Найти боковую поверхность усеченной пирамиды, отсекаемой от данной плоскостью, параллельной ее основанию и отстоящей от нее на 1 дм.

11.024. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами a и b $(a>b)$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Определить объем усеченной пирамиды.

11.025. Боковые ребра правильной усеченной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Стороны нижнего и верхнего оснований соответственно равны a и b $(a>b)$. Найти объем усеченной пирамиды.

11.026. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проведенная через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол 45°. Полученное сечение имеет площадь, равную Q. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

11.027. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°, а площадь диагонального сечения равна S.

11.028. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом 30°. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определить объем и полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен r.

11.029. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найти объем и полную поверхность пирамиды.

11.030. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 см и 4 см и острым углом 60°. Большая диагональ параллелепипеда равна 5 см. Определить его объем.

11.031. Центр куба, ребро которого равно a, соединен со всеми его вершинами. Определить объем и поверхность каждой из образовавшихся пирамид.

11.032. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, основание которого равно 6 см, а высота равна 9 см. Каждое боковое ребро равно 13 см. Вычислить объем пирамиды.

11.033. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и имеют длины $\sqrt{70}$ см, $\sqrt{99}$ см и $\sqrt{126}$ см. Найти объем и площадь основания пирамиды.

11.034. Определить объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна d, а боковые грани — квадраты.

11.035. Найти объем куба, если расстояние от его диагонали до непересекающегося с ней ребра равно d.

11.036. Определить объем октаэдра (правильного восьмигранника), ребро которого равно a.

11.037. Основание призмы — квадрат со стороной, равной a. Одна из боковых граней — тоже квадрат, другая — ромб с углом 60°. Определить полную поверхность призмы.

11.038. Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания и удалена от плоскости этого основания на расстояние, равное b. Сторона основания равна a. Определить полную поверхность этого параллелепипеда.

11.039. В кубе центры оснований соединены с центрами боковых граней. Вычислить поверхность получившегося октаэдра, если ребро куба равно a.

11.040. Основанием пирамиды служит треугольник с длинами сторон 6 см, 5 см и 5 см. Боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Определить объем этой пирамиды.

11.041. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна l и составляет с одной гранью угол 30°, а с другой 45°.

11.042. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18 см, а длины сторон оснований 14 см и 10 см.

11.043. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна Q. Площади диагональных сечений равны S_1 и S_2. Определить объем параллелепипеда.

11.044. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно l и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найти объем пирамиды.

11.045. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна d и составляет с боковым ребром призмы угол 30°. Найти объем призмы.

11.046. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Диагональ параллелепипеда наклонена к боковой грани, содержащей сторону основания, равную b, под углом 30°. Найти объем параллелепипеда.

11.047. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом 60°. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

11.048. Найти объем наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной, равной a, если боковое ребро призмы конгруэнтно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60°.

11.049. Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна a и боковая поверхность равновелика сумме площадей оснований.

11.050. Найти боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, высота которой равна h, а боковое ребро равно l.

11.051. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно d. Определить объем куба.

11.052. В правильной треугольной призме площадь сечения, проходящего через боковое ребро призмы перпендикулярно к противолежащей боковой грани, равна Q. Сторона основания призмы равна a. Найти полную поверхность призмы.

11.053. Высота правильного тетраэдра равна h. Вычислить его полную поверхность.

11.054. Каждое из боковых ребер пирамиды равно b. Ее основанием служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся, как $m:n$, а гипотенуза равна c. Вычислить объем пирамиды.

11.055. Центр верхнего основания куба соединен с серединами сторон нижнего основания. Определить боковую поверхность полученной пирамиды, если ребро куба равно a.

11.056. Основанием прямой призмы служит ромб. Площади диагональных сечений этой призмы равны P и Q. Найти боковую поверхность призмы.

11.057. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна d, а длины ребер относятся, как $m:n:p$.

11.058. Определить объем правильной треугольной пирамиды, зная, что высота треугольника, служащего ее основанием, равна h и что апофема пирамиды равна m.

11.059. Площади боковых граней прямой треугольной призмы равны M, N и P. Боковое ребро ее равно l. Определить объем призмы.

11.060. По площади основания P и объему V правильной четырехугольной призмы вычислить ее полную поверхность.

11.061. Найти боковую поверхность правильной треугольной призмы с высотой h, если прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости под углом 60°.

11.062. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани ее перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 45°. Среднее по величине боковое ребро равно l. Найти объем и полную поверхность пирамиды.

11.063. Найти объем и полную поверхность правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a и угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°.

11.064. Найти объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна h, а все плоские углы при вершине прямые.

11.065. Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен 90°, а площадь основания равна S.

11.066. Найти объем правильного тетраэдра с ребром, равным a.

11.067. Правильная шестиугольная призма, боковые ребра которой равны 3 см, рассечена диагональной плоскостью на две равные четырехугольные призмы. Определить объем шестиугольной призмы, если боковая поверхность четырехугольной призмы равна 30 см^2.

11.068. По стороне основания, равной a, определить боковую поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой диагональное сечение равновелико основанию.

11.069. Боковое ребро правильной треугольной призмы конгруэнтно высоте основания, а площадь сечения, проведенного через это боковое ребро и высоту основания, равна Q. Определить объем призмы.

11.070. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b и образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S. Определить объем параллелепипеда.

11.071. Найти отношение объема правильной шестиугольной пирамиды к объему правильной треугольной пирамиды при условии, что стороны оснований этих пирамид конгруэнтны, а их апофемы в два раза больше сторон основания.

11.072. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся, как $m:n$, а диагональное сечение представляет собой квадрат с площадью, равной Q. Определить объем параллелепипеда.

11.073. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 3 см и 6 см. Найти длину ребра такого куба, чтобы объемы этих тел относились, как их поверхности.

11.074. Высота пирамиды, в основании которой лежит правильный шестиугольник, равна 8 м. На расстоянии 3 м от вершины проведена плоскость, параллельная основанию. Площадь полученного сечения равна 4 м². Найти объем пирамиды.

11.075. Доказать, что объем конуса равен объему цилиндра с тем же основанием и той же высотой минус произведение боковой поверхности этого цилиндра на треть радиуса его основания.

11.076. Высота конуса конгруэнтна диаметру его основания. Найти отношение площади его основания к боковой поверхности.

11.077. Выразить объем конуса через его боковую поверхность S и расстояние r от центра основания до образующей.

11.078. Цилиндр можно образовать вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Выразить объем V цилиндра через площадь S этого прямоугольника и длину C окружности, описанной точкой пересечения его диагоналей.

11.079. Доказать, что если два конгруэнтных конуса имеют общую высоту и параллельные основания, то объем их общей части составляет четверть объема каждого из них.

11.080. На основаниях цилиндра с квадратным осевым сечением построены два конуса с вершинами в середине оси (цилиндра). Найти сумму полных поверхностей и сумму объемов конусов, если высота цилиндра равна $2a$.

11.081. Около конуса с радиусом основания R описана произвольная пирамида, у которой периметр основания равен $2\ p$. Определить отношение объемов и отношение боковых поверхностей конуса и пирамиды.

11.082. Высота конуса и его образующая соответственно равны 4 см и 5 см. Найти объем вписанного в конус полушара, основание которого лежит на основании конуса.

11.083. Определить объем шара, вписанного в правильную пирамиду, у которой высота равна h, а двугранный угол при основании равен 60°.

11.084. Конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен R. Найти боковую поверхность конуса, если его объем равен объему полушара.

11.085. В цилиндре площадь сечения, перпендикулярного образующей, равна M, а площадь осевого сечения равна N. Определить поверхность и объем этого цилиндра.

11.086. В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар. Найти объем конуса, если объем шара равен $32\pi/3$ см^3.

11.087. Доказать, что объем конуса равен $1/3$ произведения боковой поверхности на расстояние от центра основания до образующей.

11.088. Даны шар, цилиндр с квадратным осевым сечением и конус. Цилиндр и конус имеют одинаковые основания, а их высоты равны диаметру шара. Как относятся объемы цилиндра, шара и конуса?

11.089. Радиус основания конуса равен R, а угол при вершине в развертке его боковой поверхности равен 90°. Определить объем конуса.

11.090. Вычислить поверхность тела, полученного от вращения ромба с площадью Q вокруг одной из его сторон.

11.091. На отрезке AB, как на диаметре, построена полуокружность с центром в точке O, а на отрезках OA и OB построены две полуокружности, расположенные в той же полуплоскости с границей (AB), что и первая. Найти поверхность и объем фигуры, которая образована вращением вокруг (AB) фигуры, ограниченной этими тремя полуокружностями, если $|AB|=20$ см.

11.092. Треугольник со сторонами 10 см, 17 см и 21 см вращается вокруг большей стороны. Вычислить объем и поверхность полученной фигуры вращения.

11.093. Найти отношение поверхности и объема шара соответственно к поверхности и объему вписанного куба.

11.094. Найти отношение поверхности и объема шара соответственно к полной поверхности и объему описанного вокруг него конуса с равносторонним осевым сечением.

11.095. Около правильной треугольной призмы, высота которой вдвое больше стороны основания, описан шар. Как относится его объем к объему призмы?

11.096. Определить поверхность шара, описанного около конуса, у которого радиус основания равен R, а высота равна h.

11.097. В шар вписан конус, образующая которого конгруэнтна диаметру основания. Найти отношение полной поверхности этого конуса к поверхности шара.

11.098. Боковая поверхность конуса вдвое больше площади основания. Площадь его осевого сечения равна Q. Найти объем конуса.

11.099. Равнобочная трапеция с основаниями 2 см и 3 см и острым углом 60° вращается вокруг меньшего основания. Вычислить поверхность и объем полученной фигуры вращения.

11.100. Высота конуса разделена на три конгруэнтных отрезка и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости, разбивающие конус на три части. Найти объем среднего усеченного конуса, если объем данного конуса равен V.

11.101. Боковая поверхность конуса развернулась на плоскости в сектор, центральный угол которого содержит 120°, а площадь равна S. Найти объем этого конуса.

11.102. Из медной болванки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда размером 80 см$\times$20 см$\times$$\times$5 см, прокатывается лист толщиной 1 мм. Определить площадь этого листа.

11.103. Металлический шар радиуса R перелит в конус, боковая поверхность которого в три раза больше площади основания. Вычислить высоту конуса.

11.104. В правильном тетраэдре построено сечение его плоскостью, проходящей через ребро AC и точку K, $K \in [SB]$, причем $|BK|:|KS|=2:1$. Найти объем отсеченной пирамиды $KABC$, если ребро тетраэдра равно a.

11.105. Ромб вращается вокруг большей своей диагонали, а затем вокруг меньшей диагонали. Доказать, что отношение объемов полученных фигур вращения равно отношению площадей их поверхностей.

Группа Б

11.106. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a. Вычислить объем этой пирамиды, если известно, что ее боковая поверхность в десять раз больше площади основания.

11.107. Объем правильной восьмиугольной призмы равен 8 м^3, а ее высота равна 2,2 м. Найти боковую поверхность этой призмы.

11.108. Основаниями усеченной пирамиды служат два правильных восьмиугольника. Сторона нижнего основания равна 0,4 м, а верхнего 0,3 м; высота усеченной пирамиды равна 0,5 м. Усеченная пирамида достроена до полной. Определить объем полной пирамиды.

11.109. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и плоскими углами при вершине, конгруэнтными углам наклона боковых ребер к основанию.

11.110. В правильной треугольной призме сторона основания равна 4 см, боковое ребро равно $\sqrt{3}$ см. В призме проведено сечение через вершину основания параллельно противоположной стороне основания под углом в 45° к плоскости основания. Найти поверхность большей части призмы.

11.111. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120°. Найти боковую поверхность пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна S.

11.112. Основанием пирамиды служит параллелограмм $ABCD$ с площадью m^2 и $[BD]\perp[AD]$; двугранные углы при ребрах AD и BC равны 45°, а при ребрах AB и CD равны 60°. Найти боковую поверхность и объем пирамиды.

11.113. В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на плоскость основания равна 5 дм, а высота равна 12 дм. Сечение, перпендикулярное боковому ребру, есть ромб с площадью 24 дм^2 и диагональю, равной 8 дм. Найти боковую поверхность и объем параллелепипеда.

11.114. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 м, стороны одного основания равны 27 м, 29 м и 52 м, а периметр другого основания равен 72 м. Определить объем усеченной пирамиды.

11.115. В основании призмы лежит трапеция. Выразить объем этой призмы через площади S_1 и S_2 параллельных боковых граней и расстояние h между ними.

11.116. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, площади боковых граней равны 9 см^2, 10 см^2 и 17 см^2. Определить объем призмы.

11.117. Основанием прямой призмы служит равнобочная трапеция $ABCD$. $|AB|=|CD|=13$ см, $|BC|=$ $=11$ см, $|AD|=21$ см. Площадь ее диагонального сечения равна 180 см^2. Вычислить полную поверхность призмы.

11.118. Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом 30°. Диагональ одной боковой грани перпендикулярна к плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти полную поверхность и объем параллелепипеда.

11.119. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а высота, опущенная из какой-нибудь вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна b. Определить объем пирамиды.

11.120. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в три раза больше площади основания. Площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга. Найти объем пирамиды.

11.121. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна к одной из боковых граней. (Указать, к какой именно.)

11.122. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 см и 1 см, а высота равна 3 см. Через точку пересечения диагоналей пирамиды проведена параллельно основаниям пирамиды плоскость, делящая пирамиду на две части. Найти объем каждой из полученных частей.

11.123. Площадь того сечения куба, которое представляет собой правильный шестиугольник, равна Q. Найти полную поверхность куба.

11.124. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при нем равен 45°. Определить объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.

11.125. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC со стороной a. Вершина A_1 проектируется в центр нижнего основания, а ребро AA_1 наклонено к плоскости основания под углом в 60°. Определить боковую поверхность призмы.

11.126. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна a. Все диагональные сечения ее равновелики. Найти объем и боковую поверхность этой пирамиды.

11.127. Куб, ребро которого равно a, срезан по углам плоскостями так, что от каждой грани остался правильный восьмиугольник. Определить объем полученного многогранника.

11.128. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на апофемах пирамиды и четыре — в плоскости основания. Все ребра пирамиды конгруэнтны и каждое из них равно a. Вычислить полную поверхность и объем куба.

11.129. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна 3 см, объем ее 38 см^3, а площади оснований относятся, как 4:9. Определить боковую поверхность усеченной пирамиды.

11.130. Найти отношения объемов правильных тетраэдра и октаэдра, у которых полные поверхности равны.

11.131. В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной, равной a. Одна из боковых граней призмы перпендикулярна к плоскости основания и представляет собой ромб, диагональ которого равна b. Найти объем призмы.

11.132. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна S; боковые ребра пирамиды конгруэнтны и образуют с плоскостью основания угол 45°. Угол между диагоналями основания равен 60°. Найти объем пирамиды.

11.133. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной, равной a. Одна из боковых граней также равносторонний треугольник и перпендикулярна к плоскости основания. Определить полную поверхность этой пирамиды.

11.134. Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной к основанию и делящей две стороны основания пополам. Определить объем отсеченной пирамиды, если сторона основания первоначальной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании содержит 45°.

11.135. Определить объем правильной усеченной четырехугольной пирамиды, если сторона большего основания равна a, сторона меньшего основания равна b, а острый угол боковой грани равен 60°.

11.136. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Через одно из ребер основания проведена плоскость, перпендикулярная к противоположному боковому ребру и делящая это ребро в отношении $m:n$, считая от вершины основания. Определить полную поверхность пирамиды.

11.137. Через вершины A, C и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол 60°. Стороны основания равны 4 см и 3 см. Найти объем параллелепипеда.

11.138. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 см и 18 см, а площадь равна 90 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 6 см. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

11.139. В правильный октаэдр вписан куб так, что его вершины находятся на ребрах октаэдра. Во сколько раз поверхность октаэдра больше поверхности вписанного куба?

11.140. Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 90°, а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d.

11.141. Площадь того сечения правильного тетраэдра, которое имеет форму квадрата, равна m^2. Найти поверхность тетраэдра.

11.142. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость. Она составляет с плоскостью нижнего основания угол 45°. Площадь сечения равна S. Найти объем призмы.

11.143. В тетраэдр помещена правильная треугольная призма так, что вершины одного ее основания находятся на боковых ребрах тетраэдра, а другого в плоскости его основания. Ребро тетраэдра равно a. Определить объем призмы, если все ее ребра конгруэнтны.

11.144. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом 30°. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45°. Определить объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

11.145. Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а площади их равны a^2, b^2 и c^2. Определить объем пирамиды.

11.146. Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной, равной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и конгруэнтно стороне основания. Определить полную поверхность этой пирамиды.

11.147. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 м и 8 м, а одна из диагоналей равна 6 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 м. Определить полную поверхность этой пирамиды.

11.148. Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2 $(S_1<S_2)$, а ее объем равен V. Определить объем полной пирамиды.

11.149. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, один из углов которого равен 30°. Площадь основания равна 4 дм². Площади боковых граней параллелепипеда равны 6 дм² и 12 дм². Найти объем параллелепипеда.

11.150. Определить объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований равны 3 м и 2 м, а боковая поверхность равновелика сумме площадей оснований.

11.151. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной, равной a, и острым углом 60°. Ребро AA_1 также равно a и образует с ребрами AB и AD углы 45°. Определить объем параллелепипеда.

11.152. Центры граней правильного тетраэдра служат вершинами нового тетраэдра. Найти отношение их поверхностей и отношение их объемов.

11.153. В треугольной усеченной пирамиде через сторону верхнего основания проведена плоскость параллельно противоположному боковому ребру. В каком отношении разделился объем усеченной пирамиды, если соответственные стороны оснований относятся, как 1:2?

11.154. Расстояние между любыми двумя боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равно a. Боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Определить поверхность призмы.

11.155. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной, равной a. Длина бокового ребра равна b, а одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы 45°. Определить боковую поверхность этой призмы.

11.156. Объем прямой призмы, основанием которой служит трапеция, равен произведению среднего арифметического между площадями параллельных боковых граней на расстояние между ними. Доказать.

11.157. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны a и b, а боковая поверхность равна половине полной поверхности. Найти объем пирамиды.

11.158. В треугольной пирамиде, каждое из боковых ребер которой равно a, один плоский угол при вершине пирамиды прямой, а каждый из остальных равен 60°. Вычислить объем пирамиды.

11.159. Основанием пирамиды служит параллелограмм, смежные стороны которого равны 9 см и 10 см, а одна из диагоналей содержит 11 см. Противоположные боковые ребра конгруэнтны и каждое из бо́льших ребер равно 10,5 см. Вычислить объем пирамиды.

11.160. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями d_1 и d_2. Высота пирамиды проходит через вершину острого угла ромба. Площадь диагонального сечения, проведенного через меньшую диагональ, равна Q. Вычислить объем пирамиды при условии, что $d_1 > d_2$.

11.161. В треугольной пирамиде две боковые грани взаимно перпендикулярны. Площади этих граней равны P и Q, а длина их общего ребра равна a. Определить объем пирамиды.

11.162. В треугольной пирамиде все четыре грани — конгруэнтные равнобедренные треугольники с основанием, равным a, и боковой стороной, равной b. Вычислить объем пирамиды. При всяких ли a и b задача имеет решение?

11.163. У наклонной треугольной призмы расстояния боковых ребер друг от друга равны a, b и c. Боковое ребро равно l, высота призмы равна h. Определить полную поверхность призмы.

11.164. Сторона основания правильной треугольной призмы меньше бокового ребра и равна a. Через сторону верхнего основания проведена плоскость, которая составляет с плоскостью основания угол 45° и делит призму на две части. Определить объем и полную поверхность верхней части призмы.

11.165. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Определить его полную поверхность.

11.166. Длины ребер параллелепипеда равны a, b и c. Ребра, длины которых равны a и b, взаимно перпендикулярны, а ребро длиной c образует с каждым из них угол 60°. Определить объем параллелепипеда.

11.167. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм с углом 120° и сторонами, равными 3 см и 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда конгруэнтна большей диагонали основания. Найти объем параллелепипеда.

11.168. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна S. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами 30° и 60°. Найти объем пирамиды.

11.169. Через вершину основания и середины двух боковых ребер правильной треугольной пирамиды проведена плоскость. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади ее основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна к боковой грани.

11.170. Из середины высоты правильной треугольной пирамиды опущены перпендикуляры на боковое ребро и на боковую грань. Длины этих перпендикуляров соответственно равны a и b. Найти объем пирамиды. При всяких ли a и b задача имеет решение?

11.171. В полушар радиуса R вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на его сферической поверхности. Вычислить объем куба.

11.172. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 30°. Боковая поверхность конуса равна $3\pi\sqrt{3}$ кв. ед. Определить объем правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в этот конус.

11.173. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная призма. Определить ее полную поверхность.

11.174. В шар радиуса R вписана правильная шестиугольная усеченная пирамида, у которой плоскость нижнего основания проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Определить объем пирамиды.

11.175. Около шара описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны a и b. Определить полную поверхность этого параллелепипеда.

11.176. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Определить объем этой пирамиды, если радиус окружности, описанной вокруг ее основания, равен r.

11.177. Конус образован вращением прямоугольного треугольника площади S вокруг одного из катетов. Найти объем конуса, если длина окружности, описанной при вращении этого треугольника точкой пересечения его медиан, равна L.

11.178. Треугольник со сторонами, равными a, b и c, вращается поочередно около каждой из своих сторон. Найти отношение объемов получающихся при этом фигур.

11.179. Доказать, что боковая поверхность конуса, вписанного в шаровой сегмент, есть средняя пропорциональная между площадью основания и боковой поверхностью сегмента.

11.180. Определить объем шарового сектора, если площадь ограничивающей его конической поверхности равна Q, а площадь поверхности сферического сегмента равна S.

11.181. Полная поверхность конуса равна πS кв ед. Развернутая на плоскости боковая поверхность конуса представляет собой сектор с углом 60°. Определить объем конуса.

11.182. Радиус основания конуса равен R, а боковая поверхность равна сумме площадей основания и осевого сечения. Определить объем конуса.

11.183. Около шара описана правильная треугольная призма, а около нее описан шар. Найти отношение поверхностей этих шаров.

11.184. Даны цилиндр и шар. Радиусы основания цилиндра и большого круга шара равны. Полная поверхность цилиндра относится к поверхности шара, как $m:n$. Найти отношение их объемов.

11.185. Найти площадь поверхности шара, вписанного в пирамиду, в основании которой лежит треугольник со сторонами, равными 13 см, 14 см и 15 см, если вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 5 см.

11.186. Высота конуса равна h. Разверткой боковой поверхности этого конуса является сектор с центральным углом 120°. Вычислить объем конуса.

11.187. Вычислить поверхность шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны a.

11.188. Определить боковую поверхность и объем усеченного конуса с образующей, равной l, описанного около шара радиуса r.

11.189. В цилиндрический сосуд, радиус основания которого $R=4$ см, помещен шар с радиусом $r=3$ см. В сосуд наливается вода так, что свободная поверхность ее касается поверхности шара (шар при этом не всплывает). Определить толщину того слоя воды, который получится, если шар из сосуда вынуть.

11.190. Радиус основания конуса равен R. Две взаимно перпендикулярные образующие делят площадь боковой поверхности конуса на части в отношении $1:2$. Найти объем конуса.

11.191. Около шара описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой стороны оснований относятся, как $m:n$. Определить отношение объемов пирамиды и шара.

11.192. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определить отношение объемов образовавшихся частей конуса.

11.193. Основание пирамиды есть прямоугольный треугольник. Боковые ребра пирамиды конгруэнтны, а боковые грани, проходящие через катеты, составляют с плоскостью основания углы 30° и 60°. Найти объем описанного около пирамиды конуса, если высота пирамиды h.

11.194. Параллелограмм, периметр которого равен $2p$, вращается вокруг оси, перпендикулярной диагонали длины d и проходящей через ее конец. Найти поверхность фигуры вращения.

11.195. Радиус основания конуса равен R, а угол развертки его боковой поверхности равен 90°. Определить объем конуса.

Группа В

11.196. Два конгруэнтных куба с ребром длины a имеют общий отрезок AB с концами в серединах двух противоположных ребер, не принадлежащих одной грани. Один из кубов есть образ другого при повороте вокруг (AB) на 90°. Найти объем пересечения этих кубов.

11.197. Найти объем пересечения двух кубов, если один из них есть образ другого при повороте на 90° вокруг оси, проходящей через среднюю линию одной из его граней. Ребро куба равно a.

11.198. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Некоторое плоское сечение этой призмы отсекает от боковых ребер, проходящих через вершину большего и среднего угла основания, отрезки, равные 12 см каждый, а от ребра, проходящего через вершину меньшего угла основания,— отрезок в 18 см. Найти объем и площадь полной поверхности фигуры, ограниченной плоскостью основания призмы, плоскостями боковых граней и плоскостью сечения.

11.199. Ребро наклонного параллелепипеда равно l. К нему примыкают две смежные грани, площади которых соответственно равны m^2 и n^2 и плоскости которых образуют угол 30°. Вычислить объем параллелепипеда.

11.200. Через точку, делящую ребро правильного тетраэдра в отношении 1 : 4, проведена плоскость, перпендикулярная к этому ребру. Найти отношение объемов полученных частей тетраэдра.

11.201. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину и равны a. Из трех плоских углов, образованных этими ребрами при вершине пирамиды, два содержат по 45°, а третий — 60°. Определить объем пирамиды.

11.202. Через каждое ребро правильного тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Найти отношение объема полученного параллелепипеда к объему тетраэдра.

11.203. Через каждые три вершины куба, расположенные на концах каждой тройки ребер, сходящихся в одной вершине, проведена плоскость. Найти объем тела, ограниченного этими плоскостями, если ребро куба равно a.

11.204. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды проведены перпендикуляр длины a к боковому ребру и перпендикуляр длины b к боковой грани. Найти объем пирамиды.

11.205. Два правильных тетраэдра соединены двумя гранями так, что образуют двойную пирамиду. Центры шести боковых граней этой двойной пирамиды приняты за вершины прямой треугольной призмы. Вычислить объем этой призмы, если ребро тетраэдра равно a.

11.206. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, площадь ее сечения, имеющего форму квадрата, равна m^2. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания.

11.207. Два куба с ребром, равным a, имеют общий отрезок, соединяющий середины двух противоположных граней, но один куб повернут на 45° по отношению к другому. Найти объем общей части этих кубов.

11.208. Через концы трех ребер, выходящих из вершин B, D, A_1 и C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a, проведены плоскости. Доказать, что полученная фигура есть правильный тетраэдр и вычислить его полную поверхность и объем.

11.209. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, которая отсекает от противоположной грани треугольник площадью 4 см². Найти боковую поверхность пирамиды, которая отсечена проведенной плоскостью от данной пирамиды, если боковая поверхность данной пирамиды равна 25 см².

11.210. Доказать, что объемы двух треугольных пирамид, имеющих по конгруэнтному трехгранному углу, относятся друг к другу, как произведения длин трех ребер конгруэнтных трехгранных углов.

11.211. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а боковое ребро составляет с высотой угол 30°. Через вершину основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему боковому ребру. Эта плоскость разбивает пирамиду на две части. Определить объем части пирамиды, прилегающей к вершине.

11.212. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно d. Определить полную поверхность куба.

11.213. Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой два противоположных ребра 4 м и 12 м, а каждое из остальных ребер равно 7 м.

11.214. Гранями параллелепипеда служат ромбы, диагонали которых равны 3 см и 4 см. В параллелепипеде имеются трехгранные углы, составленные тремя острыми углами ромбов. Найти объем параллелепипеда.

11.215. Найти объем треугольной пирамиды, стороны основания которой равны a, b и c, если каждая из этих сторон конгруэнтна боковому ребру, не пересекающемуся с ней.

11.216. Основание пирамиды $SABCD$ есть трапеция с параллельными сторонами AB и CD. Доказать, что объем пирамиды равен $^4/_3$ произведения площади треугольника MSN, где MN есть средняя линия трапеции, на расстояние ребра AB от плоскости MSN.

11.217. Многогранник имеет следующее строение: две его грани (основания) являются многоугольниками, расположенными в параллельных плоскостях; остальные грани (боковые) представляют собой трапеции, параллелограммы или треугольники, у которых каждая вершина является одновременно вершиной одного из оснований. Доказать, что объем такого многогранника равен $^1/_6\ H\ (S_1+S_2+$

$+4S_3$), где H — расстояние между плоскостями основания, S_1 и S_2 — площади оснований, а S_3 — площадь сечения, равноотстоящего от обоих оснований.

11.218. Фигура ограничена сверху и снизу двумя прямоугольниками со сторонами, равными a, b и a_1, b_1, а с боков — трапециями. Стороны прямоугольников параллельны; расстояние между параллельными плоскостями прямоугольных оснований равно h. Найти объем фигуры.

11.219. Диагонали двух одинаковых кубов с ребром, равным a, лежат на одной и той же прямой. Вершина второго куба совпадает с центром первого, и второй куб повернут вокруг диагонали на 60° по отношению к первому. Найти объем общей части этих кубов.

11.220. Около шара описан усеченный конус, площадь нижнего основания которого в a раз больше площади его верхнего основания. Во сколько раз объем усеченного конуса больше объема шара?

11.221. В конус вписан шар. Доказать, что отношение полной поверхности конуса к поверхности шара равно отношению их объемов.

11.222. Высота цилиндра равна радиусу его основания и имеет длину a. Через ось цилиндра проведена другая цилиндрическая поверхность, делящая окружность основания на две дуги, длины которых относятся, как $2:1$. Эта цилиндрическая поверхность делит данный цилиндр на две части. Найти боковую поверхность и объем большей части цилиндра.

11.223. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно q. Найти отношение объемов этих тел. При каких значениях q задача не имеет решения?

11.224. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, основание которой делит перпендикулярный к нему радиус пополам. Определить поверхность шара, вписанного в пирамиду.

11.225. Конус лежит на плоскости и катится по ней, вращаясь вокруг своей неподвижной вершины. Высота конуса и его образующая равны h и l. Вычислить площадь поверхности, описываемой высотой конуса.

11.226. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC такой, что $|AB|=|AC|=10$ см и $|BC|=12$ см. Грань SBC перпендикулярна к основанию и $|SB|=|SC|$. Вычислить радиус шара, вписанного в пирамиду, если высота пирамиды равна 1,4 см.

11.227. Известны основание равнобедренного треугольника a и биссектриса b угла при основании. Найти боковую сторону.

11.228. Доказать, что если в многогранник можно вписать сферу, то его объем равен одной трети произведения полной поверхности многогранника на радиус вписанной сферы.

11.229. Найти объем правильной пирамиды, в основании которой лежит правильный пятиугольник, а боковыми гранями являются правильные треугольники со стороной a.

11.230. Высота правильной треугольной пирамиды равна H. Найти ее полную поверхность, если плоскость, проведенная через вершину основания пирамиды перпендикулярно противоположной боковой грани, составляет с плоскостью основания угол, равный 30°.

Глава 12

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

Группа А

12.001. Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна l, угол при вершине равен α. Найти боковую сторону.

12.002. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

12.003. В ромбе через вершину острого угла, равного α, проведена прямая, делящая угол α в отношении $1:2$. В каком отношении эта прямая делит сторону ромба, которую она пересекает?

12.004. В квадрате $ABCD$ через середину M стороны AB проведена прямая, пересекающая противоположную сторону CD в точке N. В каком отношении прямая MN делит площадь квадрата, если острый угол AMN равен α $(\pi/4 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2)$?

12.005. Высота равнобочной трапеции равна h, а угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти среднюю линию трапеции.

12.006. В прямоугольном треугольнике даны его площадь S и острый угол α. Найти расстояние от точки пересечения медиан треугольника до гипотенузы.

12.007. В прямоугольник $ABCD$ $(AB \| CD)$ вписан треугольник AEF. Точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD. Найти тангенс угла EAF, если $\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|BE|}{|EC|}=\frac{|CF|}{|FD|}=k$.

12.008. В параллелограмме со сторонами a и b и острым углом α найти тангенсы углов, образуемых большей диагональю параллелограмма с его сторонами.

12.009. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине равен α. Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

12.010. Около круга радиуса R описана равнобочная трапеция с острым углом a при основании. Найти периметр этой трапеции.

12.011. Доказать, что во всяком треугольнике разность между суммой квадратов любых двух его сторон и произведением этих сторон, умноженным на косинус угла между ними, есть для данного треугольника величина постоянная.

12.012. Даны стороны a, b, c и d четырехугольника, вписанного в окружность. Найти угол, заключенный между сторонами a и b.

12.013. Отношение площади прямоугольного треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе, равно k. Найти сумму тангенсов острых углов треугольника.

12.014. Площадь прямоугольной трапеции равна S, острый угол равен α. Найти высоту трапеции, зная, что ее меньшая диагональ равна большему основанию.

12.015. Общая внешняя касательная двух внешне касающихся окружностей составляет с линией центров угол a. Найти отношение радиусов этих окружностей.

12.016. Две высоты параллелограмма, проведенные из вершины тупого угла, соответственно равны h_1 и h_2, а угол между ними равен α. Найти большую диагональ параллелограмма.

12.017. Диагональ прямоугольника равна d и делит угол прямоугольника в отношении $m:n$. Найти периметр прямоугольника.

12.018. В равнобочной трапеции, описанной около круга, отношение боковой стороны к меньшему основанию равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

12.019. Площадь равнобедренного треугольника равна S, а противолежащий основанию угол между медианами, проведенными к его боковым сторонам, равен α. Найти основание.

12.020. В сегмент, дуга которого содержит $\alpha°$, вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги, а две другие — лежат на хорде. Площадь треугольника равна S. Найти радиус дуги сегмента.

12.021. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α, радиус вписанного круга равен r. Через вершину угла при основании и центр вписанного круга проведена прямая. Найти отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника.

12.022. Найти угол треугольника, если известно, что стороны, заключающие этот угол, равны a и b, а биссектриса угла равна l.

12.023. В равнобедренном треугольнике даны основание a и угол при основании α. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне.

12.024. Найти отношение периметра трапеции, описанной около окружности, к длине этой окружности, если углы при большем основании трапеции соответственно равны α и β.

12.025. В прямоугольном треугольнике ABC острый угол A равен α радианам. Дуга окружности с центром в вершине прямого угла C касается гипотенузы в точке D и пересекает катеты AC и BC соответственно в точках E и F. Найти отношение площадей криволинейных треугольников ADE и BDF.

12.026. В параллелограмм со сторонами a и b $(a<b)$ и острым углом α вписан ромб; две его вершины совпадают с серединами бóльших сторон параллелограмма, две другие — лежат на меньших сторонах (или на их продолжениях). Найти углы ромба.

12.027. Около круга радиуса R описана трапеция с углами α и β при большем основании. Найти площадь этой трапеции.

12.028. В равнобедренный треугольник с углом α при основании вписана окружность радиуса r. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

12.029. Площадь равнобедренного треугольника равна S, угол между высотой, проведенной к боковой стороне, и основанием равен α. Найти радиус круга, вписанного в треугольник.

12.030. Равносторонний треугольник пересечен прямой, проходящей через середину одной из его сторон и составляющей с этой стороной острый угол α. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

12.031. В квадрат $ABCD$ вписан равнобедренный треугольник AEF: точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD и $|AE|=|AF|$. Тангенс угла AEF равен 3. Найти косинус угла FAD.

12.032. В равнобедренном треугольнике угол между боковыми сторонами равен α, радиус вписанной окружности равен r. Найти площадь треугольника.

12.033. Около круга описана прямоугольная трапеция с острым углом α. Найти высоту трапеции, если периметр ее равен P.

12.034. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Найти отношение площади треугольника к площади описанного около него круга.

12.035. В треугольнике даны длины двух сторон a и b и угол α между ними. Найти длину биссектрисы, проведенной к третьей стороне.

12.036. Показать, что если в треугольнике отношение тангенсов двух углов равно отношению квадратов синусов этих же углов, то треугольник равнобедренный или прямоугольный.

12.037. В ромб $ABCD$ и в треугольник ABC, содержащий его большую диагональ, вписаны окружности. Найти отношение радиусов этих окружностей, если острый угол ромба равен α.

12.038. На меньшем основании равнобочной трапеции построен правильный треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в пять раз меньше площади трапеции. Найти угол при большем основании трапеции.

12.039. Высота правильного треугольника продолжена вовне и на ее продолжении взят отрезок, равный стороне треугольника. Второй конец этого отрезка соединен прямой с вершиной основания треугольника. При помощи этого построения найти, что $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$.

12.040. Высота равнобочной трапеции равна h. Верхнее основание трапеции из середины нижнего основания видно под углом 2α, а нижнее основание из середины верхнего — под углом 2β. Найти площадь трапеции в этом общем случае и вычислить ее без таблиц, если $h=2$, $\alpha=15°$, $\beta=75°$.

12.041. Даны две стороны b и c треугольника и его площадь, равная $0{,}4\ bc$. Найти третью сторону.

12.042. Из точки, взятой на окружности радиуса R, проведены две равные хорды, составляющие вписанный угол, равный α радианам. Найти часть площади круга, заключенную внутри этого вписанного угла.

12.043. Через вершину A равнобедренного остроугольного треугольника ABC и центр описанной около этого треугольника окружности проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D. Найти длину AD, если $|AB| = |BC| = b$ и угол ABC равен α.

12.044. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания равна d и составляет со стороной основания угол, равный α. Через эту сторону и противоположную ей сторону верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол, равный β. Найти боковую поверхность параллелепипеда.

12.045. Разность между образующей конуса и его высотой равна d, а угол между ними равен α. Найти объем конуса.

12.046. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания и равно l, два других — образуют с плоскостью основания угол, равный α. В пирамиду вписана прямая призма: три ее вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, три другие — на основании пирамиды. Диагональ боковой грани призмы составляет с плоскостью основания угол, равный β. Найти высоту призмы.

12.047. Диагонали осевого сечения усеченного конуса точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от большего основания. Угол между диагоналями, обращенный к основаниям конуса, равен α. Длина диагонали равна l. Найти объем усеченного конуса.

12.048. Найти угол при вершине осевого сечения конуса, если центральный угол в развертке его боковой поверхности равен α радианам.

12.049. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти этот угол.

12.050. Через вершину C основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость перпендикулярно боковому ребру SA. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен $^2/_3$. Найти косинус угла между двумя боковыми гранями.

12.051. В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого $|AB|=|BC|=a$ и угол A равен α. Через сторону AC проведена плоскость под углом φ $(\varphi<\pi/2)$ к основанию. Найти площадь сечения, если известно, что в сечении получился треугольник.

12.052. Треугольник ABC вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, проходящей вне его через вершину A и одинаково наклоненной к сторонам AB и AC. Найти объем тела вращения, если $|AB|=a$, $|AC|=b$ и угол $BAC=\alpha$.

12.053. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в пять раз больше площади ее основания. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

12.054. Высота конуса равна H, угол между образующей и высотой равен α. В этот конус вписан другой конус так, что вершина второго конуса совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие обоих конусов взаимно перпендикулярны. Найти объем вписанного конуса.

12.055. Сторона большего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна a. Боковое ребро и диагональ пирамиды составляют с плоскостью основания углы, соответственно равные α и β. Найти площадь меньшего основания пирамиды.

12.056. Радиус круга, вписанного в прямоугольную трапецию, равен r, острый угол трапеции равен α. Эта трапеция вращается вокруг меньшей боковой стороны. Найти боковую поверхность тела вращения.

12.057. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом α. Диагональ большей боковой грани равна d и образует с боковым ребром угол β. Найти объем призмы.

12.058. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом, равным a, обращенным к основанию. Объем цилиндра равен V. Найти высоту цилиндра.

12.059. Найти острый угол ромба, зная, что объемы тел, полученных от вращения ромба вокруг его большей диагонали и вокруг его стороны, относятся соответственно, как $1:2\sqrt{5}$.

12.060. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

12.061. Основанием прямой призмы служит равнобочная трапеция, у которой основания соответственно равны a и b $(a>b)$, а острый угол равен α. Плоскость, проходящая через большее основание верхней трапеции и меньшее основание нижней трапеции, составляет с плоскостью нижнего основания угол, равный β. Найти объем призмы.

12.062. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен a. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Найти высоту параллелепипеда, если его объем равен V.

12.063. Каждое из боковых ребер четырехугольной пирамиды образует с высотой угол α. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом β между диагоналями. Найти объем пирамиды, если ее высота равна h.

12.064. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через одну из сторон этого квадрата и через вершину конуса, при пересечении с поверхностью конуса образует равнобедренный треугольник, у которого угол при вершине равен α. Найти объем конуса.

12.065. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l и составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти объем пирамиды.

12.066. Через диагональ нижнего основания правильной четырехугольной призмы и противоположную вершину ее верхнего основания проведена плоскость. Угол между равными сторонами сечения равен α. Найти отношение высоты призмы к стороне основания.

12.067. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Диагональ грани, противоположной данному углу, равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

12.068. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует со стороной основания угол α. Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды и допустимые значения α.

12.069. Плоскость, проведенная параллельно оси цилиндра, делит окружность основания в отношении $m:n$. Площадь сечения равна S. Найти боковую поверхность цилиндра.

12.070. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды попарно взаимно перпендикулярны. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

12.071. В полушар вписан конус: вершина конуса совпадает с центром окружности, являющейся основанием полушара, плоскость основания конуса параллельна плоскости основания полушара. Прямая, соединяющая центр основания конуса с произвольной точкой окружности большого круга полушара, составляет с плоскостью основания конуса угол, равный α. Найти отношение объема полушара к объему конуса.

12.072. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Высота пирамиды равна H. Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти объем пирамиды.

12.073. Образующая конуса равна a, расстояние от вершины конуса до центра вписанного в него шара равно b. Найти угол между образующей и плоскостью основания.

12.074. В конус вписан шар. Отношение радиуса окружности касания шаровой и конической поверхности к радиусу основания конуса равно k. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью основания.

12.075. Площадь основания цилиндра относится к площади его осевого сечения, как $m:n$. Найти острый угол между диагоналями осевого сечения.

12.076. В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом α. Отношение высоты призмы к стороне основания равно k. Через сторону основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

12.077. Стороны основания прямого параллелепипеда относятся, как $1:2$, острый угол в основании равен α. Найти угол между меньшей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания, если высота параллелепипеда равна большей диагонали основания.

12.078. Отношение одной из сторон основания треугольной пирамиды к каждому из остальных пяти ее ребер равно k. Найти двугранный угол между двумя равными боковыми гранями пирамиды и допустимые значения k.

12.079. Плоскость квадрата составляет угол, равный α, с плоскостью, проведенной через одну из его сторон. Какой угол составляет с той же плоскостью диагональ квадрата?

12.080. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно стороне основания. Найти угол между стороной основания и непересекающей ее диагональю боковой грани.

12.081. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда составляют с плоскостью основания углы, соответственно равные α и β. Найти угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

12.082. Найти угол между пересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной четырехугольной призмы, если плоскость, в которой они лежат, составляет с плоскостью основания угол, равный α.

12.083. Найти угол между апофемами двух смежных боковых граней правильной n-угольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен α.

12.084. Найти косинус угла между апофемой и диагональю основания правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

12.085. В конус вписана треугольная пирамида, у которой боковые ребра попарно взаимно перпендикулярны. Найти угол между образующей конуса и его высотой.

12.086. В грани двугранного угла, равного α, проведена прямая, составляющая угол β с ребром двугранного угла. Найти угол между этой прямой и другой гранью.

12.087. Найти угол между образующей и высотой конуса, у которого боковая поверхность есть среднее пропорциональное между площадью основания и полной поверхностью.

12.088. Все боковые ребра треугольной пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный одному из острых углов прямоугольного треугольника, лежащего в основании пирамиды. Найти этот угол, если гипотенуза этого треугольника равна c, а объем пирамиды равен V.

12.089. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с боковым ребром угол α. Найти объем параллелепипеда, если периметр его основания равен P.

12.090. Плоскость, проведенная через образующую цилиндра, составляет с плоскостью осевого сечения, содержащего ту же образующую, острый угол, равный α. Диагональ прямоугольника, полученного в сечении цилиндра этой плоскостью, равна l и образует угол, равный β, с плоскостью основания. Найти объем цилиндра.

12.091. Сторона ромба равна a, его острый угол равен α. Ромб вращается вокруг прямой, проходящей через его вершину параллельно большей диагонали. Найти объем тела вращения.

12.092*. Объем шара равен V. Найти объем его сектора, у которого центральный угол в осевом сечении равен α.

12.093. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и боковым ребром равен $\alpha(\alpha<\pi/4)$. В каком отношении делит высоту пирамиды центр описанного шара?

12.094. Основания двух конусов, имеющих общую вершину, лежат в одной плоскости. Разность их объемов равна V. Найти объем меньшего конуса, если касательные, проведенные к окружности его основания из произвольной точки окружности основания большего конуса, образуют угол, равный α.

12.095. Боковая грань правильной усеченной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания острый угол, равный α. Найти угол между высотой и боковым ребром пирамиды.

12.096. В конус вписан полушар: большой круг полушара лежит в плоскости основания конуса, а шаровая поверхность касается поверхности конуса. Найти объем полушара, если образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол, равный α.

12.097. Стороны оснований правильной n-угольной усеченной пирамиды соответственно равны a и b. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти боковую поверхность пирамиды.

12.098. В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна S, а угол между высотой и образующей равен α. Найти объем шара.

12.099. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, равным β. Найти полную поверхность пирамиды.

12.100. В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция, у которой диагональ равна a и угол между диагональю и большим основанием равен α. Диагональ призмы наклонена к основанию под углом β. Найти объем призмы.

12.101. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a. Угол между пересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней равен α. Найти объем призмы.

12.102. Объем конуса равен V. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом между боковыми сторонами, равным α. Найти объем пирамиды.

12.103. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Найти отношение площади сечения к полной поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол, равный β.

12.104. Отношение боковой поверхности правильной треугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды.

12.105. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость, составляющая с основанием угол β. Найти объем конуса, если его высота равна h.

12.106. Высота правильной треугольной пирамиды равна H, двугранный угол при основании равен α. Найти полную поверхность пирамиды.

12.107. Около шара описан усеченный конус, у которого площадь одного основания в четыре раза больше площади другого основания. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

12.108. Через сторону нижнего основания куба проведена плоскость, делящая объем куба в отношении $m:n$, считая от нижнего основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если $m \leqslant n$.

12.109. Высота правильной треугольной призмы равна H. Плоскость, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания острый двугранный угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью.

12.110. Найти боковую поверхность усеченного конуса, описанного около правильной треугольной усеченной пирамиды, зная, что острый угол трапеции, служащей боковой гранью пирамиды, равен α и что в эту трапецию можно вписать окружность радиуса r.

12.111. Сторона основания треугольной пирамиды равна a, прилежащие к ней углы основания соответственно равны α и β. Все боковые ребра составляют с высотой пирамиды один и тот же угол, равный φ. Найти объем пирамиды.

12.112. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно d. Угол между образующей и высотой равен α. Найти полную поверхность конуса.

12.113. Основанием пирамиды $ABCD$ служит прямоугольный треугольник ABC (угол C равен $90°$). Боковое ребро AD перпендикулярно к основанию. Найти острые углы треугольника ABC, если угол DBA равен α и угол DBC равен β $(\alpha<\beta)$.

12.114. В правильной шестиугольной призме плоскость, проведенная через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований, составляет с плоскостью основания острый угол, равный α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона основания призмы равна a.

12.115. В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найти косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

12.116. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a и угол между боковыми сторонами равен α. Найти объем призмы, если ее боковая поверхность равна S.

12.117. Основанием пирамиды, вписанной в конус, служит четырехугольник, у которого смежные стороны попарно равны, а угол между одной парой смежных сторон равен α. Найти отношение объема пирамиды к объему конуса.

12.118. Найти косинус угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

12.119. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r. Найти объем конуса, если угол между высотой и образующей конуса равен α.

12.120. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно m и наклонено к плоскости основания под углом, равным α. Найти объем пирамиды.

12.121. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а равные боковые ребра образуют между собой угол α. Найти высоту прямой треугольной призмы, равновеликой данной пирамиде и имеющей с ней общее основание.

12.122. Найти объем конуса, если в его основании хорда, равная a, стягивает дугу в $\alpha°$, а высота конуса составляет с образующей угол β.

12.123. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а сумма длин его высоты и образующей равна a. Найти объем конуса.

12.124. Найти полную поверхность прямого параллелепипеда, если в основании его лежит ромб с острым углом α и меньшей диагональю d, а высота параллелепипеда в 2 раза меньше стороны основания.

12.125. В правильной двенадцатиугольной пирамиде, ребра которой пронумерованы подряд, проведено сечение через первое и пятое ребра. Плоскость сечения образует с плоскостью основания пирамиды угол α, а площадь этого сечения равна S. Найти объем пирамиды.

12.126*. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α, а радиус основания равен R. Найти радиус сферы с центром в вершине конуса, делящей его объем на две равновеликие части.

12.127. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник, диагонали которого пересекаются под углом α. Длина диагонали равна d. Найти боковую поверхность цилиндра.

12.128. В конус, образующая которого равна l, вписана правильная шестиугольная призма с равными ребрами. Найти боковую поверхность призмы, если угол между образующей и высотой конуса равен α.

12.129. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a и двугранный угол при основании равен α.

12.130. Боковая поверхность цилиндра, будучи развернута, представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна a и составляет угол α с основанием. Найти объем цилиндра.

Группа Б

12.131. В остроугольном треугольнике ABC высота $|AD|=a$, высота $|CE|=b$, острый угол между AD и CE равен α. Найти $|AC|$.

12.132. Острый угол прямоугольного треугольника равен α. Найти отношение радиуса вписанной в треугольник окружности к радиусу описанной окружности. При каком значении α это отношение будет наибольшим?

12.133. Дуга AB сектора AOB содержит α радианов. Через точку B и середину C радиуса OA проведена прямая. В каком отношении эта прямая делит площадь сектора?

12.134. Основания равнобочной трапеции соответственно равны a и b ($a>b$), угол при большем основании равен α. Найти радиус окружности, описанной около трапеции.

12.135. Найти отношение площади сектора с данным центральным углом α радианов к площади вписанного в него круга.

12.136. Боковые стороны трапеции равны соответственно p и q ($p<q$), большее основание равно a. Углы при большем основании относятся, как $2:1$. Найти меньшее основание.

12.137. Площадь равнобочной трапеции равна S, угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти высоту трапеции.

12.138. Большее основание вписанной в круг трапеции равно диаметру круга, а угол при основании равен α. В каком отношении точка пересечения диагоналей трапеции делит ее высоту?

12.139. В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник $A'B'C'$: точка A' лежит на стороне BC, точка B' — на стороне AC и точка C' — на стороне AB. Угол $A'B'C$ равен α. Найти отношение $|AB|$ к $|A'B'|$.

12.140. В каком отношении делит высоту равнобедренного треугольника ABC точка O, из которой все три стороны видны под одним и тем же углом ($\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{COA}$), если угол при основании треугольника равен $\alpha (\alpha>\pi/6)$?

12.141. Высота равнобедренного треугольника равна h и составляет с боковой стороной угол $\alpha (\alpha \geqslant \pi/6)$. Найти расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около него окружностей.

12.142. В окружность радиуса R вписан треугольник, вершины которого делят окружность на три части в отношении $2:5:17$. Найти площадь треугольника.

12.143. Тангенс угла при основании равнобедренного треугольника равен $^3/_4$. Найти тангенс угла между медианой и биссектрисой, проведенными к боковой стороне.

12.144. Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медиана, проведенная к боковой стороне, составляет с основанием угол, синус которого равен $^3/_5$.

12.145. Через вершину угла α при основании равнобедренного треугольника проведена прямая, пересекающая противолежащую боковую сторону и составляющая с основанием угол β. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

12.146. Через вершины равностороннего треугольника ABC проведены параллельные прямые AD, BE и CF. Прямая BE лежит между прямыми AD и CF и делит расстояние между ними в отношении $m:n$, считая от прямой AD. Найти угол BCF.

12.147. Найти косинус острого угла ромба, если прямая, проведенная через его вершину, делит угол в отношении $1:3$, а противолежащую сторону — в отношении $3:5$.

12.148. Отношение площади прямоугольника $ABCD$ ($BC \parallel AD$) к квадрату его диагонали равно k. Найти угол EAF, где E и F — соответственно середины сторон BC и CD.

12.149. Около круга радиуса r описана равнобочная трапеция. Боковая сторона трапеции составляет с меньшим основанием угол α. Найти радиус круга, описанного около трапеции.

12.150. Высота треугольника делит угол треугольника в отношении $2:1$, а основание — на отрезки, отношение которых (большего к меньшему) равно k. Найти синус меньшего угла при основании и допустимые значения k.

12.151. Гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанного круга на отрезки, отношение которых равно k. Найти углы треугольника.

12.152. Отношение боковых сторон трапеции равно отношению ее периметра к длине вписанной окружности и равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

12.153. В сектор радиуса R вписана окружность радиуса r. Найти периметр сектора.

12.154. В остроугольном равнобедренном треугольнике радиус вписанной окружности в 4 раза меньше радиуса описанной около него окружности. Найти углы треугольника.

12.155. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ ($\alpha>\gamma$), прилежащие к стороне AC. Из вершины B проведены медиана BD и биссектриса BE. Найти отношение площади треугольника BDE к площади треугольника ABC.

12.156. Угол при вершине A трапеции $ABCD$ равен α. Боковая сторона AB вдвое больше меньшего основания BC. Найти угол BAC.

12.157. В прямоугольном треугольнике найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины острого угла, равного α.

12.158. Найти косинусы острых углов прямоугольного треугольника, зная, что произведение тангенсов половин этих углов равно $^1/_6$.

12.159. Стороны параллелограмма относятся, как $p:q$, а диагонали — как $m:n$. Найти углы параллелограмма.

12.160. Отношение периметра ромба к сумме его диагоналей равно k. Найти углы ромба и допустимые значения k.

12.161. Найти косинусы углов равнобедренного треугольника, у которого точка пересечения высот делит пополам высоту, проведенную к основанию.

12.162. Периметр сектора равен l. Найти расстояние от вершины центрального угла сектора до центра окружности, вписанной в этот сектор, если радиус дуги сектора равен R.

12.163. Показать, что если в треугольнике отношение суммы синусов двух углов к сумме их косинусов равно синусу третьего угла, то треугольник прямоугольный.

12.164. Найти синус угла ромба, если из середины его стороны противоположная сторона видна под углом, равным α.

12.165. Сторона треугольника равна a, разность углов, прилежащих к данной стороне, равна $\frac{\pi}{2}$. Найти углы треугольника, если его площадь равна S.

12.166. Тангенс острого угла между медианами прямоугольного треугольника, проведенными к его катетам, равен k. Найти углы треугольника и допустимые значения k.

12.167. Радиус дуги сектора равен R, центральный угол AOB равен α. Через середину C радиуса OA проведена прямая, параллельная радиусу OB и пересекающая дугу AB в точке D. Найти площадь треугольника OCD.

12.168. В треугольнике даны сторона a, противолежащий ей угол α и высота h, проведенная к данной стороне. Найти сумму двух других сторон.

12.169. В квадрат $ABCD$ вписан равнобедренный треугольник AEF: точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD и $|AE|=|EF|$. Тангенс угла AEF равен 2. Найти тангенс угла FEC.

12.170. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ ($\alpha>\gamma$) при основании AC. Из вершины B проведены высота BD и медиана BE. Найти площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ABC равна S.

12.171. В прямоугольном треугольнике ABC острый угол при вершине A равен α. Через середину D гипотенузы AB проведена прямая, пересекающая катет AC в точке E. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника ABC, если $\widehat{DEA}=\beta$ и $|AE|>\frac{1}{2}|AC|$?

12.172. В круг вписана трапеция. Большее основание трапеции составляет с боковой стороной угол α, а с диагональю — угол β. Найти отношение площади круга к площади трапеции.

12.173. В треугольнике ABC угол A равен α и сторона $|BC|=a$. Найти длину биссектрисы AD, если угол между биссектрисой AD и высотой AE равен β.

12.174. Равнобедренный треугольник с углом α при вершине пересечен прямой, проходящей через вершину угла при основании и составляющей с основанием угол β. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

12.175. Радиус дуги сектора AOB равен R, центральный угол AOB равен α. В этот сектор вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги AB, а две другие вершины лежат соответственно на радиусах OA и OB. Найти сторону треугольника.

12.176. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при основании вписана окружность. Найти радиус окружности, касающейся вписанной окружности и боковых сторон треугольника.

12.177. Внутри данного угла α расположена точка на расстоянии a от вершины и на расстоянии b от одной стороны. Найти расстояние этой точки от другой стороны.

12.178. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD острого угла A, равного α. Найти отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и ADC.

12.179. Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, зная, что периметр любого вписанного в него прямоугольника, две вершины которого лежат на основании, имеет постоянную величину.

12.180. Сторона треугольника равна 15, сумма двух других сторон равна 27. Найти косинус угла, противолежащего данной стороне, если радиус вписанной в треугольник окружности равен 4.

12.181. Меньшая дуга окружности, стягиваемая хордой AB, содержит α градусов. Через середину C хорды AB проведена хорда DE так, что $|DC|:|CE|=1:3$. Найти острый угол ACD и допустимые значения α.

12.182. Медиана BD треугольника ABC пересекается с биссектрисой CE в точке K. Найти отношение $|CK|$ к $|KE|$, если $\hat{A}=\alpha$ и $\hat{B}=\beta$.

12.183. Даны две стороны треугольника a и b и угол α между ними. Найти радиус окружности, проведенной через концы третьей стороны и центр вписанного в этот треугольник круга.

12.184. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Найти радиус описанного круга.

12.185. В треугольнике известны площадь S, сторона a и противолежащий ей угол α. Найти сумму двух других сторон.

12.186. OA — неподвижный радиус окружности с центром в точке O; точка B — середина радиуса OA; точка M — произвольная точка окружности. Найти наибольшее значение угла OMB.

12.187. В равнобедренном остроугольном треугольнике угол при основании равен α, а площадь равна S. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.

12.188. Пусть a, b, c — длины сторон остроугольного треугольника; A, B, C — углы, противолежащие сторонам; P_a, P_b, P_c — расстояния от центра описанной окружности до соответствующих сторон. В предположении, что $A<B<C$, расположить в возрастающем порядке P_a, P_b, P_c.

12.189. Луч, проведенный из вершины равностороннего треугольника, делит его основание в отношении $m:n$. Найти тупой угол между лучом и основанием.

12.190. Через вершину равностороннего треугольника проведена прямая, делящая основание в отношении $2:1$. Под какими углами она наклонена к боковым сторонам треугольника?

12.191. Основание треугольника равно a, а углы при основании равны α и β радианам. Из противоположной вершины треугольника радиусом, равным его высоте, проведена окружность. Найти длину дуги этой окружности, заключенной внутри треугольника.

12.192. Даны две стороны a и b треугольника и биссектриса l угла между ними. Найти этот угол.

12.193. Основание треугольника равно 4, а его медиана равна $\sqrt{6}-\sqrt{2}$. Один из углов при основании равен 15°. Показать, что острый угол между основанием треугольника и его медианой равен 45°.

12.194. В трапеции меньшее основание равно 2, прилежащие углы — по 135°. Угол между диагоналями, обращенный к основанию, равен 150°. Найти площадь трапеции.

12.195. Если биссектриса одного из углов треугольника равна произведению заключающих его сторон, деленному на их сумму, то этот угол равен 120°. Доказать.

12.196. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AZ и CN. Найти радиус окружности, проходящей через точки B, Z и N, если $|AC|=a$ и $\widehat{ABC}=\alpha$.

12.197. В треугольнике ABC проведена высота BM и на ней, как на диаметре, построена окружность, пересекающая сторону AB в точке K и сторону BC в точке Z. Найти отношение площади треугольника KZM к площади треугольника ABC, если $\hat{A}=\alpha$ и $\hat{C}=\beta$.

12.198. В ромб вписана окружность. В образовавшийся криволинейный треугольник (с острым углом) снова вписана окружность. Найти ее радиус, если высота ромба равна h, а острый угол равен α.

12.199. Основание треугольника равно a, а прилежащие к нему углы содержат 45° и 15°. Из вершины, противоположной основанию, проведена окружность радиусом, равным высоте опущенной на это основание. Найти площадь части соответствующего круга, заключенную внутри треугольника.

12.200. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол, равный α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на апофемах пирамиды, четыре — на основании пирамиды. Найти ребро куба.

12.201. Площадь боковой грани правильной двенадцатиугольной пирамиды равна S. Плоский угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды.

12.202. В конус помещен шар так, что их поверхности касаются. Радиус шара равен R, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α. Найти объем тела, ограниченного поверхностями шара и конуса.

12.203. Найти объем и боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, зная, что плоскость, проходящая через сторону основания a и середину ее высоты, наклонена к основанию под углом, равным φ.

12.204. Найти объем правильной четырехугольной призмы, если угол между диагональю призмы и боковой гранью равен α, а сторона основания равна a.

[12.205.] В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ $(AA' \| BB' \| CC')$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого бóльший катет $|AB|$ равен a и противолежащий ему угол C равен α. Гипотенуза BC является диаметром основания конуса, вершина которого лежит на ребре $A'B'$. Найти высоту конуса, если $|AA'| = a/2$.

12.206. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведено сечение. Найти площадь сечения и объем пирамиды, зная сторону a основания и угол α между сечением и основанием.

12.207. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен на боковое ребро перпендикуляр, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен α.

12.208. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен на боковое ребро перпендикуляр, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α.

12.209. Найти боковую поверхность и объем прямого параллелепипеда, зная, что высота его равна h, диагонали его составляют с основанием углы α и β и основанием его служит ромб.

12.210. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a и угол при основании равен α. Найти объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.

12.211. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Найти объем пирамиды, зная, что ее боковые грани образуют с основанием один и тот же двугранный угол β и радиус вписанного в нее шара равен r.

12.212. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b; соответствующие им боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол α. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания также равен α. Найти радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

12.213. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен на боковую грань перпендикуляр, равный a. Найти объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α.

12.214. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Из боковых граней две перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к нему, каждая под углом φ. Найти объем и боковую поверхность этой пирамиды.

12.215. В правильной треугольной пирамиде с углом α между боковым ребром и стороной основания проведено сечение через середину бокового ребра, параллельно боковой грани. Зная площадь S этого сечения, найти объем данной пирамиды.

12.216. Перпендикуляр, опущенный из центра основания конуса на образующую, вращается около оси конуса. Найти угол между его образующей и осью, если поверхность вращения делит объем конуса пополам.

12.217. Найти угол между образующей и основанием усеченного конуса, полная поверхность которого вдвое больше поверхности вписанного в него шара.

12.218. Основанием прямой призмы служит треугольник со стороной a и прилежащими к ней углами α и β. Через сторону a под углом φ к основанию проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро. Найти объем получившейся треугольной пирамиды.

12.219*. При вращении кругового сектора около одного из крайних радиусов получилось тело, площадь сферической поверхности которого равна площади коничесской поверхности. Найти синус центрального угла кругового сектора.

12.220. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, равный α. Через вершину основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость параллельно одной из диагоналей основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания пирамиды.

12.221. Основаниями усеченной пирамиды служат правильные треугольники. Прямая, соединяющая середину одной стороны верхнего основания с серединой параллельной ей стороны нижнего основания, перпендикулярна плоскостям оснований. Большее боковое ребро равно l и составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти длину отрезка, соединяющего центры верхнего и нижнего оснований.

12.222. В основании пирамиды лежит ромб, один из углов которого равен α. Боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Через середины двух смежных сторон основания и вершину пирамиды проведена плоскость. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, равный β. Площадь сечения, образованного этой плоскостью, равна S. Найти сторону ромба.

12.223. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом, равным α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Площадь сечения, проведенного через бо́льшую диагональ основания и вершину пирамиды, равна S. Найти объем пирамиды.

12.224. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Боковая поверхность равна S. Найти расстояние от центра основания до боковой грани.

12.225. Высота правильной треугольной пирамиды равна H. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол, равный α. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью.

12.226. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна S и угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды, если угол между каждым боковым ребром и высотой пирамиды равен β.

12.227. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой боковая сторона равна a, а острый угол равен α. Все боковые грани образуют с основанием пирамиды один и тот же угол, равный β. Найти полную поверхность пирамиды.

12.228. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α, боковая поверхность пирамиды равна S. Найти расстояние от центра основания до середины апофемы боковой грани.

12.229. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Отрезок прямой, соединяющей центр основания пирамиды с серединой бокового ребра, равен a. Найти полную поверхность пирамиды.

12.230. Два конуса имеют концентрические основания и один и тот же угол, равный α, между высотой и образующей. Радиус основания внешнего конуса равен R. Боковая поверхность внутреннего конуса в два раза меньше полной поверхности внешнего конуса. Найти объем внутреннего конуса.

12.231. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с прилежащими к ней сторонами основания углы, соответственно равные α и β. Найти отношение объема параллелепипеда к объему цилиндра.

12.232. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Этот треугольник вписан в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с серединой одной из образующих конуса. Найти отношение объема конуса к объему пирамиды.

12.233. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб: вершины его верхнего основания лежат на боковых ребрах пирамиды, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Найти отношение объема куба к объему пирамиды, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол, равный α.

12.234. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a; боковая грань составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти радиус описанного шара.

[12.235.] Величина угла между боковым ребром правильной четырехугольной пирамиды и плоскостью основания равна величине плоского угла при вершине пирамиды. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

12.236*. Найти отношение объема шарового сегмента к объему всего шара, если дуга в осевом сечении сегмента соответствует центральному углу, равному α.

12.237. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, его острый угол равен α. Треугольник вращается вокруг биссектрисы внешнего прямого угла. Найти объем тела вращения.

12.238. В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в пять раз больше длины радиуса шара. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

12.239. Отношение поверхности шара, вписанного в конус, к площади основания конуса равно k. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

12.240. Отношение объема шара, вписанного в конус, к объему описанного шара равно k. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

12.241. В шар, радиус которого равен R, вписан конус; в этот конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Найти полную поверхность цилиндра, если угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен α.

12.242. В полушар вписано тело, состоящее из цилиндра и поставленного на него конуса. Нижнее основание цилиндра лежит в плоскости большого круга полушара; верхнее основание цилиндра совпадает с основанием конуса и касается поверхности шара. Вершина конуса лежит на поверхности шара. Образующая конуса составляет с плоскостью его основания угол, равный α. Найти отношение объема тела к объему полушара.

12.243. Боковая грань правильной усеченной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти отношение полной поверхности пирамиды к поверхности вписанного в нее шара.

12.244. В конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен r. Прямая, соединяющая центр шара с произвольной точкой окружности основания конуса, составляет с высотой конуса угол, равный α. Найти объем конуса.

12.245. Отношение объема конуса к объему вписанного в него шара равно k. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса и допустимые значения k.

12.246. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания, если боковая поверхность конуса равна сумме площадей основания и осевого сечения.

12.247. Угол между высотой и образующей конуса равен α. В конус вписана правильная треугольная призма: нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса. Боковые грани призмы — квадраты. Найти отношение боковой поверхности призмы к боковой поверхности конуса.

12.248. Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб. Большая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти острый угол ромба.

12.249. Боковое ребро правильной усеченной четырехугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, равный α. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что верхнее его основание совпадает с верхним основанием пирамиды, а нижнее основание лежит в плоскости нижнего основания пирамиды. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к боковой поверхности параллелепипеда, если диагональ параллелепипеда составляет с его основанием угол, равный β.

12.250. В конус помещена пирамида: основание пирамиды вписано в основание конуса, а вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса. Все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным α $\left(\alpha > \frac{\pi}{3}\right)$. Найти отношение объема конуса к объему пирамиды.

12.251. Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, делит высоту пирамиды в отношении $m:n$, считая от вершины пирамиды. Найти угол между двумя смежными боковыми гранями.

12.252. Отношение стороны основания правильной n-угольной пирамиды к радиусу описанного шара равно k. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания и допустимые значения k.

12.253. В конус вписан цилиндр: нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса. Прямая, соединяющая центр верхнего основания цилиндра и точку на окружности основания конуса, составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти отношение объема конуса к объему цилиндра, если угол между образующей и высотой конуса равен β.

12.254. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, если объем пирамиды равен V.

12.255. Две грани треугольной пирамиды — равные между собой прямоугольные треугольники с общим катетом, равным l. Угол между этими гранями равен α. Две другие грани пирамиды образуют двугранный угол, равный β. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

12.256. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен α. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания, а наибольшее из боковых ребер составляет с плоскостью основания угол, равный β. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R. Найти объем пирамиды.

12.257. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, вписанный в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса. Боковые грани пирамиды, содержащие катеты основания, составляют с плоскостью основания углы, соответственно равные α и β. Найти отношение объема пирамиды к объему конуса.

12.258. Сторона квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна a. В пирамиду вписана правильная четырехугольная призма: вершины верхнего основания лежат на боковых ребрах, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол, равный φ. Найти объем призмы, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол, равный α.

12.259. Сторона нижнего основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна a, сторона верхнего основания равна b. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол, равный α. Через сторону нижнего основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований, проведена плоскость, пересекающая противоположную боковую грань по некоторой прямой. Найти расстояние от этой прямой до нижнего основания.

12.260. Две боковые грани усеченной треугольной пирамиды — равные между собой прямоугольные трапеции с острым углом α и общей меньшей боковой стороной. Двугранный угол между этими гранями равен β. Найти угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания.

12.261. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Площадь сечения относится к полной поверхности конуса, как $2:\pi$. Найти угол между образующей и высотой конуса.

12.262. Боковая грань правильной четырехугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, равный α. Плоскость, проведенная через сторону нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол, равный β. Боковая поверхность пирамиды равна S. Найти стороны верхнего и нижнего оснований.

12.263. Высота правильной треугольной усеченной пирамиды равна H и является средним пропорциональным между сторонами оснований. Боковое ребро составляет с основанием угол, равный α. Найти объем пирамиды.

12.264. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся, как $m:n$ $(m>n)$. Высота пирамиды равна H. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти боковую поверхность пирамиды.

12.265. Через вершину конуса проведена плоскость, делящая окружность основания в отношении $p:q$. Эта плоскость отстоит от центра основания конуса на расстоянии, равном a, и составляет с высотой конуса угол, равный α. Найти объем конуса.

12.266. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания. Сумма двух неравных между собой плоских углов при вершине равна $\pi/2$. Найти эти углы.

12.267. Отношение полной поверхности конуса к площади его осевого сечения равно k. Найти угол между высотой и образующей конуса и допустимые значения k.

12.268. Одна из граней треугольной призмы, вписанной в цилиндр, проходит через ось цилиндра. Диагональ этой грани составляет с прилежащими к ней сторонами основания призмы углы, соответственно равные α и β. Найти объем призмы, если высота цилиндра равна H.

12.269. Две вершины равностороннего треугольника со стороной, равной a, лежат на окружности верхнего основания цилиндра, а третья вершина — на окружности нижнего основания. Плоскость треугольника составляет с образующей цилиндра угол, равный α. Найти боковую поверхность цилиндра.

12.270. Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если этот угол равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

12.271. Отрезок прямой, соединяющий точку окружности верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен l и составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти расстояние от этой прямой до оси цилиндра, если осевое сечение цилиндра есть квадрат.

12.272. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Каждое из боковых ребер равно l и составляет с прилежащими сторонами основания углы, соответственно равные α и β. Найти объем пирамиды.

12.273. Точка A лежит на окружности верхнего основания цилиндра, точка B — на окружности нижнего основания. Прямая AB составляет с плоскостью основания угол, равный α, а с плоскостью осевого сечения, проведенного через точку B, угол, равный β. Найти объем цилиндра, если длина отрезка $|AB|$ равна l.

12.274. В конус вписан куб (одна из граней куба лежит в плоскости основания конуса). Отношение высоты конуса к ребру куба равно k. Найти угол между образующей и высотой конуса.

12.275. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, две другие — составляют с ней углы, соответственно равные α и β. Найти боковую поверхность пирамиды, если высота пирамиды равна H.

12.276. Одна из сторон основания прямой треугольной призмы равна a, а прилежащие к ней углы соответственно равны α и β. Найти боковую поверхность призмы, зная, что ее объем равен V.

12.277. Одно боковое ребро треугольной пирамиды перпендикулярно к плоскости основания и равно l; два других образуют между собой угол α, а с плоскостью основания — один и тот же угол, равный β. Найти объем пирамиды.

12.278. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой острый угол равен α, а площадь равна S. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти объем пирамиды.

12.279. Косинус угла между двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен k. Найти косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания и допустимые значения k.

12.280. Основанием пирамиды является прямоугольник $ABCD$ ($AB \| CD$). Боковое ребро OA перпендикулярно основанию. Ребра OB и OC составляют с основанием углы, соответственно равные α и β. Найти угол между ребром OD и основанием.

12.281. Через диагональ основания и высоту правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость. Отношение площади сечения к боковой поверхности пирамиды равно k. Найти косинус угла между апофемами противоположных боковых граней.

12.282. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды в два раза больше стороны основания. Найти угол между апофемой боковой грани и непересекающей ее высотой треугольника, лежащего в основании пирамиды.

12.283. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Угол между смежными боковыми гранями равен α. Найти боковую поверхность пирамиды.

12.284. В правильной треугольной пирамиде проведена плоскость через боковое ребро и высоту. Отношение площади сечения к полной поверхности пирамиды равно k. Найти двугранный угол при основании.

12.285. Угол между высотой и образующей конуса равен α. Через вершину конуса проведена плоскость, составляющая угол β с высотой ($\beta<\alpha$). В каком отношении эта плоскость делит окружность основания?

12.286. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого острый угол между равными сторонами равен α. Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Через сторону основания, противолежащую данному углу α, и середину высоты пирамиды проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

12.287. Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся, как $3:4:12$. Через большее ребро проведено диагональное сечение. Найти синус угла между плоскостью этого сечения и не лежащей в нем диагональю параллелепипеда.

12.288. Боковая грань правильной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен k. Найти тангенс угла между боковым ребром и апофемой противолежащей грани.

12.289. Все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания один и тот же угол. Найти этот угол, если отношение полной поверхности пирамиды к площади основания равно k. При каких значениях k задача имеет решение?

12.290. Отношение полной поверхности правильной n-угольной пирамиды к площади основания равно t. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

12.291. Косинус угла между боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды, не лежащими в одной грани, равен k. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

12.292. Через сторону ромба проведена плоскость, образующая с диагоналями углы, соответственно равные α и 2α. Найти острый угол ромба.

12.293. Основанием наклонной призмы $ABCA'B'C'$ ($AA' \| BB' \| CC'$) служит равнобедренный треугольник, у которого $|AB| = |AC| = a$ и угол $CAB = \alpha$. Вершина B' верхнего основания равноудалена от всех сторон нижнего основания, а ребро $B'B$ составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

12.294. Основанием наклонной призмы служит равнобочная трапеция, у которой боковая сторона равна меньшему основанию и равна a, а острый угол равен β. Одна из вершин верхнего основания призмы равноудалена от всех вершин нижнего основания. Найти объем призмы, если боковое ребро составляет с плоскостью основания угол, равный α.

12.295. Основанием прямой призмы, описанной около шара радиуса r, служит прямоугольный треугольник с острым углом, равным α. Найти объем призмы.

12.296. Диагонали AB' и CB' двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ составляют с диагональю AC основания $ABCD$ углы, соответственно равные α и β. Найти угол между плоскостью треугольника $AB'C$ и плоскостью основания.

12.297. В правильной треугольной призме сторона основания равна a, угол между непересекающимися диагоналями двух боковых граней равен α. Найти высоту призмы.

12.298. В прямоугольном треугольнике через его гипотенузу проведена плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол α, а с одним из катетов — угол β. Найти угол между этой плоскостью и вторым катетом.

12.299. В прямоугольном треугольнике с острым углом α через наименьшую медиану проведена плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол β. Найти углы между этой плоскостью и катетами треугольника.

12.300. Найти косинус угла между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной треугольной призмы, у которой боковое ребро равно стороне основания.

12.301. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной a, и углом между боковыми сторонами, равным α. Диагональ боковой грани, противолежащей данному углу, составляет со смежной боковой гранью угол, равный φ. Найти объем призмы.

12.302. В основании прямой призмы лежит треугольник. Два его угла соответственно равны α и β, а площадь равна S. Прямая, соединяющая вершину верхнего основания с центром круга, описанного около нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол, равный φ. Найти объем призмы.

12.303. Основанием наклонной призмы служит прямоугольник со сторонами a и b. Две смежные боковые грани составляют с плоскостью основания углы, соответственно равные α и β. Найти объем призмы, если боковое ребро равно c.

12.304. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с двумя смежными гранями углы, соответственно равные α и β. Найти объем параллелепипеда.

12.305. В правильной треугольной призме плоскость, проведенная через центр основания и центры симметрии двух боковых граней, составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона основания равна a.

12.306. В прямой призме $ABCA'B'C'$ $(AA' \| BB' \| CC')$ стороны основания $|AB|$ и $|BC|$ соответственно равны a и b, а угол между ними равен α. Через биссектрису данного угла и вершину A' проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания острый угол β. Найти площадь сечения.

12.307. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ $(|AA'|=|BB'|=|CC'|)$ лежит равнобедренный треугольник ABC с углом α между равными сторонами AB и AC. Отрезок прямой, соединяющий вершину A' верхнего основания с центром круга, описанного около нижнего основания, равен l и составляет с плоскостью основания угол, равный β. Найти объем призмы.

12.308. Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной, равной a. Боковое ребро равно b и составляет с пересекающими его сторонами основания равные углы, каждый из которых равен α. Найти объем пирамиды и допустимые значения α.

12.309. Основанием призмы служит прямоугольник. Боковое ребро составляет равные углы со сторонами основания и наклонено к плоскости основания под углом α. Найти угол между боковым ребром и стороной основания.

12.310. На шаровой поверхности радиуса R лежат все вершины равнобочной трапеции, у которой меньшее основание равно боковой стороне, а острый угол равен α. Найти расстояние от центра шара до плоскости трапеции, если большее основание трапеции равно радиусу шара.

12.311. Высота конуса равна H, угол между образующей и плоскостью основания равен α. В этот конус вписан шар. К окружности касания шаровой и конической поверхностей проведена касательная прямая, а через эту прямую проведена плоскость параллельно высоте конуса. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.

12.312. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Площадь сечения равна боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды. Найти расстояние от секущей плоскости до основания пирамиды.

12.313. Высота конуса равна H, угол между образующей и плоскостью основания равен α. Полная поверхность этого конуса делится пополам плоскостью, перпендикулярной его высоте. Найти расстояние от этой плоскости до основания конуса.

12.314. Найти угол между апофемой боковой грани правильной треугольной пирамиды и плоскостью ее основания, зная, что разность между этим углом и углом, который составляет боковое ребро пирамиды с плоскостью основания, равна α.

12.315. Катет прямоугольного треугольника равен a, противолежащий ему угол равен α. Этот треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через вершину данного угла и перпендикулярной его биссектрисе. Найти объем тела вращения.

12.316. Отношение объема прямого параллелепипеда к объему вписанного в него шара равно k. Найти углы в основании параллелепипеда и допустимые значения k.

12.317. Образующая усеченного конуса, описанного около шара, равна a, угол между образующей и плоскостью основания равен α. Найти объем конуса, основанием которого служит круг касания шаровой поверхности с боковой поверхностью усеченного конуса, а вершина совпадает с центром большего основания усеченного конуса.

12.318*. В шар радиуса R вписаны два конуса с общим основанием; вершины конусов совпадают с противоположными концами диаметра шара. Шаровой сегмент, вмещающий меньший конус, имеет в осевом сечении дугу, равную $\alpha°$. Найти расстояние между центрами шаров, вписанных в эти конусы.

12.319. Найти отношение объема правильной n-угольной пирамиды к объему описанного шара, если угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды равен α.

[12.320.] Боковые грани правильной треугольной призмы — квадраты. Найти угол между диагональю боковой грани и непересекающей ее стороной основания призмы.

12.321. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и составляет с плоскостью основания угол, равный α. В эту пирамиду вписан цилиндр с квадратным осевым сечением (основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды). Найти объем цилиндра.

[12.322.] В треугольнике ABC угол A равен α, угол C равен β и биссектриса $|BD|$ равна l. Треугольник ABD

вращается вокруг прямой BD. Найти объем тела вращения.

12.323. Основанием прямой призмы служит равносторонний треугольник. Через одну из его сторон проведена плоскость, отсекающая от призмы пирамиду, объем которой равен V. Найти площадь сечения, если угол между секущей плоскостью и плоскостью основания равен α.

12.324. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение, параллельное основанию. Прямая, соединяющая вершину основания с противолежащей (т. е. не принадлежащей той же грани) вершиной сечения, составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти площадь сечения, если боковое ребро пирамиды равно диагонали основания и равно a.

12.325. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого боковая сторона равна b, а угол при основании равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину данного угла α, и высоту пирамиды.

12.326. Плоская ломаная линия состоит из n равных отрезков, соединенных в виде зигзага под углом друг к другу, равным α. Длина каждого отрезка ломаной равна a. Эта линия вращается вокруг прямой, проходящей через один из ее концов параллельно биссектрисе угла α. Найти поверхность тела вращения.

12.327. Два конуса имеют общую высоту; вершины их лежат на противоположных концах этой высоты. Образующая одного конуса равна l и составляет с высотой угол, равный α. Образующая другого конуса составляет с высотой угол, равный β. Найти объем общей части обоих конусов.

12.328. Тупоугольный равнобедренный треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через точку пересечения его высот параллельно большей стороне. Найти объем тела вращения, если тупой угол равен α, а противолежащая ему сторона треугольника равна a.

12.329. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, угол при основании равен α. Этот треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину, противолежащую основанию, параллельно биссектрисе угла α. Найти поверхность тела вращения.

12.330. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого радиус вписанной окружности равен r, а острый угол равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти объем пирамиды.

12.331. В конус вписан шар и к шару проведена касательная плоскость параллельно плоскости основания конуса. В каком отношении эта плоскость делит боковую поверхность конуса, если угол между образующей и плоскостью основания равен α?

12.332 *. В основание шарового сегмента вписан прямоугольный треугольник, у которого площадь равна S, а острый угол равен α. Найти высоту сегмента, если его дуге в осевом сечении соответствует центральный угол, равный β.

12.333. Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC'$) служит равнобедренный треугольник ABC ($|AB|=|AC|$), у которого периметр равен $2p$, а угол при вершине A равен α. Через сторону BC и вершину A' проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол, равный β. Найти объем призмы.

12.334. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен α. Найти полную поверхность пирамиды.

12.335. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен α. Около этой пирамиды описан шар данного радиуса R. Найти объем пирамиды, зная, что все ее боковые ребра образуют с основанием один и тот же угол, равный β.

12.336. Образующая конуса равна l и составляет с высотой угол, равный α. Через две образующие конуса, угол между которыми равен β, проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра шара, вписанного в конус.

12.337. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого площадь равна S, а угол между боковыми сторонами равен α. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол. Найти этот угол, если объем пирамиды равен V.

12.338. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a, ее объем равен V. Найти косинус угла между диагоналями двух смежных боковых граней.

12.339. Острый угол ромба, лежащего в основании четырехугольной пирамиды, равен α. Отношение полной поверхности пирамиды к квадрату стороны основания равно k. Найти синус угла между апофемой и высотой пирамиды, если все ее боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания.

12.340. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти расстояние от центра основания пирамиды до ее бокового ребра.

12.341. Отношение площади диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

12.342. Расстояние от стороны основания правильной треугольной пирамиды до не пересекающего ее ребра в два раза меньше стороны основания. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

12.343. Линейный угол двугранного угла, составленного двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, в два раза больше плоского угла при вершине пирамиды. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

12.344. В правильной треугольной пирамиде сумма углов, образованных апофемой пирамиды с плоскостью основания и боковым ребром с той же плоскостью, равна $\pi/4$. Найти эти углы.

12.345. Объем правильной пирамиды равен V. Найти объем пирамиды, отсекаемой от данной плоскостью, проходящей через центр шара, вписанного в данную пирамиду, параллельно ее основанию, если двугранный угол при основании равен α.

12.346. Найти углы прямоугольного треугольника, зная, что объем тела, полученного от вращения треугольника вокруг меньшего катета, равен сумме объемов тел, полученных от вращения треугольника вокруг его гипотенузы и вокруг большего катета.

12.347. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, ее боковая поверхность равна S. Найти угол между смежными боковыми гранями.

12.348. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

12.349. Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, в четыре раза меньше стороны основания пирамиды. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

12.350. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды имеют одну и ту же длину a, а угол между равными сторонами основания равен α. Найти радиус описанного шара.

12.351. В конус вписан цилиндр, высота которого равна диаметру основания конуса. Полная поверхность цилиндра равна площади основания конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

12.352. Около шара описана прямая призма, основанием которой служит ромб с острым углом, равным α. Найти угол между большей диагональю призмы и плоскостью основания.

12.353. В усеченный конус вписан шар, объем которого в два раза меньше объема конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

12.354. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого основание равно a, а противолежащий угол равен α. Боковое ребро пирамиды, проходящее через вершину данного угла, составляет с плоскостью основания угол, равный β. Найти объем пирамиды, если высота пирамиды проходит через точку пересечения высот основания.

12.355. Площадь сегмента равна S, а дуга сегмента равна α радианам. Этот сегмент вращается вокруг своей оси симметрии. Найти поверхность тела вращения.

12.356. В конус вписан шар. Окружность касания шаровой и конической поверхностей делит поверхность шара в отношении $1:4$. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

12.357. Боковая поверхность треугольной пирамиды равна S, а каждое из боковых ребер равно l. Найти плоские углы при вершине, зная, что они образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной $\pi/3$.

12.358. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найти боковую поверхность пирамиды, если радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен R.

12.359. Радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, равен апофеме пирамиды. Найти угол между апофемой и плоскостью основания пирамиды.

12.360. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол, равный α. В этот конус вписан шар, а в шар вписана правильная треугольная призма, у которой все ребра равны между собой. Найти объем призмы.

12.361. Около шара радиуса R описана правильная n-угольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти боковую поверхность пирамиды.

12.362. Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол, равный β. Две другие боковые грани составляют с плоскостью основания угол, равный α. Найти боковую поверхность пирамиды.

12.363. Расстояние от середины высоты правильной четырехугольной пирамиды до ее боковой грани равно d. Найти полную поверхность вписанного в пирамиду конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол, равный α.

12.364. Основанием пирамиды $SABC$ служит равносторонний треугольник ABC. Ребро SA перпендикулярно к плоскости основания. Найти угол между боковой гранью SBC и плоскостью основания, если боковая поверхность пирамиды относится к площади основания, как $11:4$.

12.365. Радиус основания конуса равен R, угол между образующей и плоскостью основания равен α. В этот конус вписан шар. Через точку P, лежащую на окружности касания шаровой и конической поверхностей, проведена касательная прямая к этой окружности, а через эту прямую проведена плоскость параллельно образующей конуса, проходящей через точку, диаметрально противоположную точке P. Найти площадь сечения шара этой плоскостью.

12.366. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны и длина каждой из них равна a. Угол между образующей и плоскостью основания равен α. Найти полную поверхность усеченного конуса.

12.367. Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до противоположной боковой грани равно l. Угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен α. Найти полную поверхность конуса, вписанного в эту пирамиду.

12.368. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно стороне меньшего основания и равно a. Угол между боковым ребром и стороной большего основания равен α. Найти площадь диагонального сечения усеченной пирамиды.

12.369. Высота конуса составляет с образующей угол α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом $\beta(\beta>\pi/2-\alpha)$ к плоскости основания. Найти площадь сечения, если высота конуса равна h.

12.370. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен α. Все боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. Найти двугранные углы при основании, если высота пирамиды равна гипотенузе треугольника, лежащего в ее основании.

12.371. В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ $(AA'\|BB\|CC')$ лежит равнобедренный треугольник, у которого $|AB|=|BC|=a$ и угол $ABC=\alpha$. Высота призмы равна H. Найти расстояние от точки A до плоскости, проведенной через точки B, C и A'.

12.372. В пирамиде, у которой все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, проведена плоскость через центр вписанного шара параллельно основанию. Отношение площади сечения пирамиды этой плоскостью к площади основания равно k. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

12.373. Высота правильной треугольной пирамиды равна H и составляет с боковым ребром угол, равный α. Через сторону основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под углом, равным $\beta(\beta<\pi/2-\alpha)$. Найти объем той части пирамиды, которая заключена между этой плоскостью и плоскостью основания.

12.374. Отрезок прямой, соединяющей центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найти косинус угла между смежными боковыми гранями.

12.375. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a; две боковые грани пирамиды перпендикулярны к основанию, а большее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом, равным β. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед: одно его основание лежит в плоскости основания пирамиды, вершины другого основания лежат на боковых ребрах пирамиды.

Найти объем параллелепипеда, зная, что диагональ его составляет с плоскостью основания угол, равный α.

12.376. Основанием пирамиды служит равнобедренный остроугольный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол между боковыми сторонами равен α. Боковая грань пирамиды, проходящая через сторону основания, противолежащую данному углу α, составляет с плоскостью основания угол, равный β. Найти объем конуса, описанного около этой пирамиды, если все ее боковые ребра равны между собой.

12.377. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. В эту пирамиду вписан шар. Найти объем пирамиды, вершинами которой служат точки касания шаровой поверхности с боковыми гранями данной пирамиды и произвольная точка, лежащая в плоскости основания данной пирамиды.

12.378. В шар радиуса R вписана правильная усеченная четырехугольная пирамида, у которой большее основание проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол, равный β. Найти объем усеченной пирамиды.

12.379. На отрезке AB, равном $2R$, построена как на диаметре полуокружность и проведена хорда CD параллельно AB. Найти объем тела, образованного вращением треугольника ACD вокруг диаметра AB, если вписанный угол, опирающийся на дугу AC, равен α ($AC < AD$).

12.380. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен α. Наибольшая по площади боковая грань призмы — квадрат. Найти угол между пересекающимися диагоналями двух других боковых граней.

12.381. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α ($\alpha > \pi/4$). Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру (т. е. ребру, не лежащему с этой вершиной в одной боковой грани).

12.382. Высота правильной четырехугольной пирамиды образует с боковым ребром угол, равный α. Через вершину пирамиды параллельно диагонали основания проведена плоскость, составляющая угол, равный β, со второй диагональю. Площадь полученного сечения равна S. Найти высоту пирамиды.

12.383. Вершина конуса находится в центре шара, а основание конуса касается поверхности шара Полная поверхность конуса равна поверхности шара. Найти угол между образующей и высотой конуса.

12.384. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна c, а меньший из острых углов равен α. Наибольшее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол, равный β. Найти объем пирамиды, зная, что ее высота проходит через точку пересечения медиан основания.

12.385. Сторона правильного треугольника равна a. Треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника вне его, проходящей через вершину треугольника и составляющей со стороной угол, равный α. Найти объем тела вращения и выяснить, при каком значении α этот объем будет наибольшим.

12.386. Боковая грань правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет с плоскостью основания угол α. Через сторону BC основания и точку D на боковом ребре AS проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если $|AD| : |DS| = k$.

12.387. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом между боковыми сторонами, равным α. Пирамида помещена в некоторый цилиндр так, что ее основание оказалось вписанным в основание этого цилиндра, а вершина совпала с серединой одной из образующих цилиндра. Объем цилиндра равен V. Найти объем пирамиды.

12.388. Через вершину квадрата, лежащего в основании правильной призмы, проведена плоскость параллельно противолежащей диагонали квадрата под углом, равным α, к плоскости основания. Найти углы многоугольника в сечении призмы этой плоскостью (предполагается, что высота призмы достаточно велика для того, чтобы этим сечением оказался четырехугольник).

12.389. Большее основание равнобочной трапеции равно a, острый угол равен α. Диагональ трапеции перпендикулярна к ее боковой стороне. Трапеция вращается вокруг ее большего основания. Найти объем тела вращения.

12.390. В шаровой сектор радиуса R вписан шар. Найти радиус окружности касания поверхностей шара и сектора, если центральный угол в осевом сечении шарового сектора равен α.

Группа В

12.391. Стороны параллелограмма соответственно равны a и b ($a<b$). Меньшая диагональ составляет с меньшей стороной тупой угол, а с большей стороной — угол, равный α. Найти бо́льшую диагональ параллелограмма.

12.392. В сектор POQ радиуса R с центральным углом α вписан прямоугольник: две его вершины лежат на дуге сектора, две другие — на радиусах PO и PQ. Найти площадь прямоугольника, если острый угол между его диагоналями равен β.

12.393. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ ($\alpha>\gamma$) при основании AC. Из вершины B проведены высота BD и биссектриса BE. Найти площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ABC равна S.

12.394. В сегмент окружности радиуса R вписаны две равные окружности, касающиеся друг друга, дуги сегмента и его хорды. Найти радиусы этих окружностей, если центральный угол, опирающийся на дугу сегмента, равен α ($\alpha<\pi$).

12.395. Отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, к радиусу окружности, описанной около него, равно m. Найти углы треугольника и допустимые значения m.

12.396. В параллелограмме даны две стороны a и b ($a>b$) и острый угол α между диагоналями. Найти углы параллелограмма.

12.397. В сегмент с централным углом α вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой хорды сегмента, а две другие лежат на дуге сегмента. Высота треугольника равна h. Найти радиус дуги сегмента.

12.398. Расстояние между центрами двух внешне касающихся окружностей равно d. Угол между их общими внешними касательными равен α радианам. Найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного отрезком одной касательной и двумя соответствующими дугами окружностей.

12.399. В параллелограмме даны две стороны a и b ($a>b$) и высота h, проведенная к большей стороне. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма.

12.400. Углы треугольника равны A, B и C. Высота треугольника, проходящая через вершину угла B, равна H. На этой высоте, как на диаметре, построена окружность. Точки пересечения окружности со сторонами AB и BC треугольника соединены с концами высоты. Найти площадь построенного таким образом четырехугольника.

12.401. Стороны параллелограмма соответственно равны a и b ($a<b$). Из середины большей стороны параллельная сторона видна под углом α. Найти площадь параллелограмма.

12.402. В треугольнике даны две стороны a и b ($a>b$) и площадь S. Найти угол между высотой и медианой, проведенными к третьей стороне.

12.403. Отношение радиуса круга, описанного около трапеции, к радиусу круга вписанного в нее, равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

12.404. Отношение периметра параллелограмма к его большей диагонали равно k. Найти углы параллелограмма, если известно, что большая диагональ делит угол параллелограмма в отношении $1:2$.

12.405. В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник DEF: точка D лежит на стороне BC, точка E — на стороне AC и точка F — на стороне AB. Сторона $|AB|$ относится к стороне $|DE|$, как $8:5$. Найти синус угла DEC.

12.406. Тангенс угла между медианой и высотой, проведенными к боковой стороне равнобедренного треугольника, равен $^1/_2$. Найти синус угла при вершине.

12.407. Прямая, перпендикулярная к хорде сегмента, делит хорду в отношении $1:4$, а дугу — в отношении $1:2$. Найти косинус центрального угла, опирающегося на эту дугу.

12.408. В остроугольном треугольнике ABC $\hat{A}=\alpha$ радиан и $\hat{B}=\beta$ радиан. Через ортоцентр (точку пересечения высот) и основания высот, опущенных на стороны AB и BC, проведена окружность. Найти площадь общей части треугольника и круга.

12.409. Доказать, что во всяком треугольнике сумма отношений косинусов его полууглов к соответствующим биссектрисам равна сумме обратных величин всех сторон треугольника.

12.410. В остроугольном треугольнике ABC известны углы. Найти отношение, в котором ортоцентр (точка пересечения высот) делит высоту, проведенную из вершины угла A.

12.411. Показать, что отношение площади любого треугольника к площади описанного вокруг него круга меньше $^2/_3$.

12.412. Для остроугольного треугольника образованы три числа, выражающие отношение его сторон к соответствующим расстояниям от них центра описанной окружности. Доказать, что сумма этих чисел в 4 раза меньше их произведения.

12.413. Длины четырех дуг, на которые разбита вся окружность радиуса R, составляют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным 3. Точки деления служат вершинами четырехугольника, вписанного в эту окружность. Найти его площадь.

12.414. Один из плоских углов трехгранного угла равен α. Двугранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны соответственно β и γ. Найти два других плоских угла.

12.415. В основании пирамиды лежит квадрат. Углы, которые образуют боковые грани с основанием, относятся, как $1:2:4:2$. Найти эти углы.

12.416.* В конус вложен шар так, что их поверхности касаются. Объем тела, заключенного между ними, в 8 раз меньше объема шара. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

12.417. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. К шару проведена параллельно основанию пирамиды касательная плоскость, которая разделила объем пирамиды в отношении $m:n$, считая от вершины. Найти угол между высотой пирамиды и ее боковой гранью.

12.418. Через вершину основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость перпендикулярно противоположной боковой грани и параллельно противоположной стороне основания. Эта плоскость составляет с плоскостью основания пирамиды угол, равный α. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

12.419. Прямоугольник вращается около оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Найти поверхность тела вращения, если площадь прямоугольника равна S, а угол между диагоналями равен α.

12.420. Найти радиус шара, касающегося основания и боковых ребер правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а двугранный угол при основании равен α.

12.421. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. Найти расстояние от центра шара, вписанного в эту пирамиду, до бокового ребра.

12.422. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через ее боковое ребро и высоту. В сечении образовался треугольник с углом $\pi/4$ при вершине пирамиды. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

12.423. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине равен α. В пирамиду вписан шар. Найти площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр основания пирамиды перпендикулярно ее боковому ребру.

12.424. Основанием пирамиды, вписанной в конус, служит четырехугольник, у которого одна сторона равна a, а каждая из остальных трех сторон равна b. Вершина пирамиды лежит на середине одной из образующих. Найти объем пирамиды, если угол между образующей и высотой конуса равен α.

12.425. Отношение объема усеченного конуса к объему вписанного в него шара равно k. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

12.426. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Отрезок AB, соединяющий точку A окружности верхнего основания с точкой B окружности нижнего основания цилиндра, равен a и отстоит от оси цилиндра на расстоянии, равном b. Найти угол между прямой AB и плоскостью основания цилиндра.

12.427. Через вершину основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро под прямым углом. Площадь сечения в два раза меньше площади основания пирамиды. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

12.428. OM, ON и OP — три попарно взаимно перпендикулярных луча. На луче OM взята точка A на расстоянии OA, равном a; на лучах ON и OP взяты соответственно точки B и C так, что угол ABC равен α, а угол ACB равен β. Найти $|OB|$ и $|OC|$.

12.429. В конус вписан шар. Окружность касания шаровой и конической поверхностей делит объем шара в отношении $5:27$. Найти угол между образующей и плоскостью основания.

12.430. Поверхность шара, вписанного в правильную усеченную треугольную пирамиду, относится к полной поверхности пирамиды, как $\pi : 6\sqrt{3}$. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

12.431. Угол между плоскостями двух равных прямоугольных треугольников ABC и ADC с общей гипотенузой AC равен α. Угол между равными катетами AB и AD равен β. Найти угол между катетами BC и CD.

12.432. Сторона нижнего основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды в пять раз больше стороны верхнего основания. Боковая поверхность пирамиды равна квадрату ее высоты. Найти угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания.

12.433. В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция, диагонали которой перпендикулярны к соответствующим боковым сторонам. Угол между диагоналями трапеции, противолежащий ее боковой стороне, равен a. Отрезок прямой, соединяющий вершину верхнего основания с центром окружности, описанной около нижнего основания, равен l и образует с плоскостью основания угол, равный β. Найти объем призмы.

12.434. В основании прямой призмы лежит параллелограмм с острым углом α. Диагонали призмы составляют с плоскостью основания углы, соответственно равные β и γ ($\beta<\gamma$). Найти объем призмы, если ее высота равна H.

12.435. Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной, равной a. Боковое ребро равно b и составляет с пересекающими его сторонами основания углы, соответственно равные α и β. Найти объем призмы.

12.436. Основанием призмы служит параллелограмм с острым углом, равным α. Боковое ребро, проходящее через вершину данного угла α, равно b и составляет с прилежащими сторонами основания равные углы, каждый из которых равен β. Найти высоту призмы.

12.437. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с диагоналями, равными a и b ($a>b$), и острым углом между ними, равным α. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с большей диагональю основания острый угол, равный β. Найти объем параллелепипеда.

12.438. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. В эту пирамиду вписана прямая треугольная призма: три ее вершины лежат на апофемах пирамиды, а три другие вершины — в плоскости основания пирамиды. Найти объем призмы, зная, что центр вписанного в пирамиду шара лежит в плоскости верхнего основания призмы.

12.439. Основание прямой призмы — ромб. Одна из диагоналей призмы равна a и составляет с плоскостью основания угол, равный α, а с одной из боковых граней — угол, равный β. Найти объем призмы.

12.440. Отношение двух отрезков, заключенных между параллельными плоскостями, равно k, а углы, которые каждый из этих отрезков составляет с одной из плоскостей, относятся соответственно, как $2:3$. Найти эти углы и допустимые значения k.

12.441. Угол между плоскостью квадрата $ABCD$ ($AB \parallel CD$) и некоторой плоскостью P равен α, а угол между стороной AB и той же плоскостью равен β. Найти угол между стороной AD и плоскостью P.

12.442. В правильной четырехугольной призме $ABCDA'B'C'D'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) через середины двух смежных сторон основания DC и AD и вершину B' верхнего основания проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если периметр сечения в три раза больше диагонали основания.

12.443. Расстояния от центра основания правильной четырехугольной пирамиды до боковой грани и до бокового ребра соответственно равны a и b. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

12.444. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна к плоскости основания. Найти косинус угла между двумя другими боковыми гранями, если обе они составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный α.

12.445. Основанием наклонной призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом, равным α. Боковая грань, содержащая гипотенузу, перпендикулярна к основанию, а боковая грань, содержащая катет, прилежащий к данному углу, составляет с основанием острый угол, равный β. Найти острый угол между третьей боковой гранью и основанием.

12.446. Сторона BC треугольника ABC, лежащего в основании наклонной призмы $ABCA'B'C'$ $(AA' \parallel BB' \parallel CC')$, равна a, прилежащие к ней углы равны соответственно β и γ. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания, если объем призмы равен V и $A'A=A'B=A'C$.

12.447. В правильную усеченную треугольную пирамиду вписаны два шара: один касается всех ее граней, другой — всех ребер. Найти синус угла между боковым ребром и плоскостью основания.

12.448. В основании четырехугольной пирамиды лежит равнобочная трапеция с основаниями a и b $(a>2b)$ и угол φ между неравными отрезками ее диагоналей. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей основания. Углы, которые составляют с плоскостью основания боковые грани, проходящие через основания трапеции, относятся, как $1:2$. Найти объем пирамиды.

12.449. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти расстояние между боковым ребром и непересекающей его стороной основания.

12.450. В треугольной пирамиде все грани — правильные треугольники. Через сторону основания проведена плоскость, делящая объем пирамиды в отношении $1:3$, считая от основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

12.451. В правильной четырехугольной пирамиде через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, проведена плоскость. Отношение площади сечения к боковой поверхности пирамиды равно k. Найти угол между двумя смежными боковыми гранями и допустимые значения k.

12.452. В основании прямой призмы лежит параллелограмм с острым углом между диагоналями, равным φ. Диагонали каждой из смежных боковых граней пересекаются соответственно под углами α и β $(\alpha>\beta)$, обращенными к соответствующим сторонам основания. Найти объем призмы, если ее высота равна h.

12.453. Основанием пирамиды $ABCDE$ служит ромб $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Высота пирамиды проходит через середину стороны AB. Боковые ребра EC и ED составляют с плоскостью основания углы, соответственно равные α и β. Найти косинус острого угла ромба, если $\cos\alpha=1/\sqrt{3}$ и $\cos\beta=1/\sqrt{5}$.

12.454. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна α. Угол между высотой пирамиды и боковым ребром равен α $\left(\alpha \leqslant \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной через середину высоты перпендикулярно одному из ее боковых ребер.

12.455. AB — диаметр нижнего основания цилиндра, $A'B'$ — хорда верхнего основания, параллельная AB. Плоскость, проведенная через прямые AB и $A'B'$, составляет с плоскостью нижнего основания цилиндра острый угол, равный α, а прямая AB' составляет с той же плоскостью угол, равный β. Найти высоту цилиндра, если радиус основания цилиндра равен R. (Точки A и A' лежат по одну сторону от прямой, соединяющей середины отрезков AB и $A'B'$.)

12.456. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна H. Через вершину A основания ABC проведена плоскость перпендикулярно к противоположному боковому ребру SC. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти объем той части пирамиды, которая заключена между плоскостью основания и плоскостью сечения.

12.457. Высота правильной четырехугольной усечённой пирамиды равна H. Боковое ребро составляет с основанием угол, равный α, а диагональ пирамиды составляет с основанием угол, равный β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ пирамиды параллельно непересекающей ее диагонали основания.

12.458. Стороны нижнего и верхнего оснований правильной треугольной усеченной пирамиды соответственно равны a и b $(a > b)$. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через среднюю линию боковой грани и центр нижнего основания.

12.459. Найти радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, у которой высота равна H, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α.

12.460. Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, относится к стороне основания, как $3:4$. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

12.461. В конус, осевое сечение которого — прямоугольный треугольник, вписан цилиндр: нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса. Отношение боковой поверхности конуса к боковой поверхности цилиндра равно $4\sqrt{2}$. Найти угол между плоскостью основания конуса и прямой, соединяющей центр верхнего основания цилиндра с произвольной точкой окружности основания конуса.

12.462. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция с острым углом, равным α. Эта трапеция описана около окружности основания конуса. Вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса и ее проекция на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции. Найти объем пирамиды, если образующая конуса равна l и составляет с его высотой угол, равный β.

12.463. Основанием пирамиды $ABCF$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого угол между равными сторонами AB и AC равен α $(\alpha < \pi/2)$. В пирамиду вписана треугольная призма $AEDA'E'D'$: точки A', E', D' лежат соответственно на боковых ребрах AF, CF и BF пирамиды, а сторона ED основания AED проходит через центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найти отношение объема призмы к объему пирамиды.

12.464. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ $(AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD')$ проведена плоскость через середины ребер DD' и $D'C'$ и вершину A. Найти угол между этой плоскостью и гранью $ABCD$.

12.465. Отношение объема правильной треугольной усеченной пирамиды к объему вписанного в нее шара равно k. Найти угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания и допустимые значения k.

ГЛАВА 13

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Группа А

13.001. Из данных четырех чисел первые три относятся между собой, как $^1/_5 : {}^1/_3 : {}^1/_{20}$, а четвертое составляет 15% второго числа. Найти эти числа, если известно, что второе число больше суммы остальных на 8 единиц.

13.002. Сколько килограммов воды нужно выпарить из 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды?

13.003. В двух бидонах находится 70 литров молока. Если из первого бидона перелить во второй 12,5% молока, находящегося в первом бидоне, то в обоих бидонах будет поровну. Сколько литров молока в каждом бидоне?

13.004. Две бригады, работая одновременно, обработали участок земли за 12 ч. За какое время могла бы обработать этот участок каждая из бригад в отдельности, если скорости выполнения работы бригадами относятся, как 3 : 2?

13.005. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

13.006. Тракторист вспахал три участка земли. Площадь первого равна $^2/_5$ площади всех трех участков, а площадь второго относится к площади третьего, как $^3/_2 : {}^4/_3$. Сколько гектаров было во всех трех участках, если в третьем было на 16 гектаров меньше, чем в первом?

13.007. Цену товара сперва снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

13.008. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%?

13.009. В библиотеке имеются иностранные книги на английском, французском и немецком языках. Английские книги составляют 36% всех иностранных книг, французские составляют 75% английских, а остальные 185 книг немецкие. Сколько иностранных книг в библиотеке?

13.010. Насос может выкачать из бассейна $^2/_3$ воды за 7,5 мин. Проработав 0,15 ч, насос остановился. Найти емкость бассейна, если после остановки насоса в бассейне еще осталось 25 м^3 воды.

13.011. Вследствие реконструкции оборудования производительность труда рабочего повышалась дважды в течение года на одно и то же число процентов. На сколько процентов возрастала каждый раз производительность труда, если за одно и то же время рабочий раньше вырабатывал изделий на 25 руб., а теперь на 28 руб. 09 коп.?

13.012. Рабочий день уменьшился с 8 часов до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата выросла на 5%?

13.013. В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска готовой продукции, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

13.014. Найти три числа, если первое составляет 80% второго, второе относится к третьему, как $0{,}5 : {}^9/_{20}$, а сумма первого и третьего на 70 больше второго числа.

13.015. Турист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал $^1/_5$ всего пути и еще 60 км, во второй $^1/_4$ всего пути и еще 20 км и в третий день $^{23}/_{80}$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найти расстояние между городами.

13.016. Числители трех данных дробей пропорциональны числам 1, 2 и 3, а обратные величины соответствующих знаменателей пропорциональны числам 1, $^1/_3$ и 0,2. Найти эти дроби, если их среднее арифметическое равно $^{136}/_{315}$.

13.017. Найти сумму трех чисел, зная, что третье относится к первому, как $4{,}5 : {}^{15}/_4$, и составляет 40% второго, а сумма первого и второго равна 400.

13.018. Вкладчик взял из сберкассы сначала $^1/_4$ своих денег, потом $^4/_9$ оставшихся и еще 64 рубля. После этого у него осталось на сберкнижке $^3/_{20}$ всех его денег. Как велик был вклад?

13.019. На уборке снега работают две снегоочистительные машины. Одна из них может убрать всю улицу за один час, а другая за 75% этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины проработали вместе 20 мин, после чего первая машина прекратила работу. Сколько нужно времени, чтобы одна вторая машина закончила работу?

13.020. Сумма первых трех членов пропорции равна 58. Третий член составляет $^2/_3$, а второй $^3/_4$ первого члена. Найти четвертый член пропорции и записать ее.

13.021. Одна бригада может убрать все поле за 12 дней. Другой бригаде для выполнения той же работы нужно 75% этого времени. После того как в течение 5 дней работала одна первая бригада, к ней присоединилась вторая, и обе вместе закончили работу. Сколько дней работали бригады вместе?

13.022. На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число верно решивших все задачи относится к числу не решивших вовсе, как 5 : 3. Сколько человек экзаменовались по математике в этот день?

13.023. В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой. Затем снова отлили столько же и опять долили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-ный раствор кислоты?

13.024. Тракторная бригада может вспахать $^5/_6$ участка земли за 4 ч 15 мин. До обеденного перерыва бригада работала 4,5 ч, после чего остались не вспаханными еще 8 гектаров. Как велик был участок?

13.025. От пристани в город отправилась лодка со скоростью 12 км/ч, а через полчаса после нее в том же направлении вышел пароход со скоростью 20 км/ч. Каково расстояние от пристани до города, если пароход пришел туда на 1,5 ч раньше лодки?

13.026. Турист проплыл по реке на лодке 90 км и прошел пешком 10 км. При этом на пеший путь было затрачено на 4 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы турист шел пешком столько времени, сколько он плыл по реке, а плыл по реке столько времени, сколько шел пешком, то эти расстояния были бы равны. Сколько времени он шел пешком и сколько времени плыл по реке?

13.027. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

13.028. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели соответственно пропорциональны числам 1, 3, 7. Среднее арифметическое этих дробей равно $^{200}/_{441}$. Найти эти дроби.

13.029. В штате гаража числится 54 шофера. Сколько свободных дней может иметь каждый шофер в месяц (30 дней), если ежедневно 25% автомашин из имеющихся 60 остаются в гараже для профилактического ремонта?

13.030. Три бригады рабочих сделали насыпь. Вся работа оценена в 3255 руб. Какую зарплату получит каждая бригада, если первая состояла из 15 человек и работала 21 день, вторая — из 14 человек и работала 25 дней, а число рабочих третьей бригады, работавшей 20 дней, на 40% превышало число рабочих первой бригады?

13.031. Группа студентов во время каникул совершила поход по Подмосковью. Первые 30 км они прошли пешком, 20% оставшейся части маршрута проплыли на плоту по реке, а затем опять шли пешком, пройдя расстояние в 1,5 раза больше того, которое проплыли по реке. Остальной путь проехали за 1 ч 30 мин на попутном грузовике, который шел со скоростью 40 км/ч. Какова длина всего маршрута?

13.032. За 3,5 ч работы один штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Второй пресс за 9 ч работы может изготовить 60% всех деталей, а скорость выполнения работы на третьем прессе относится к скорости выполнения работы на втором, как 6 : 5. За какое время будет выполнен весь заказ, если все три пресса будут работать одновременно?

13.033. Каждая из двух машинисток перепечатывала рукопись в 72 страницы. Первая машинистка перепечатывала 6 страниц за то же время, за которое вторая перепечатывала 5 страниц. Сколько страниц перепечатывала каждая машинистка в час, если первая закончила работу на 1,5 ч быстрее второй?

13.034. В магазин для продажи поступили учебники по физике и математике. Когда продали 50% учебников по математике и 20% учебников по физике, что составило в общей сложности 390 книг, то тогда учебников по математике осталось в 3 раза больше, чем по физике. Сколько учебников по математике и сколько по физике поступило в продажу?

13.035. Обувная фабрика за первую неделю выполнила 20% месячного плана, за вторую — 120% количества продукции, выработанной за первую неделю, а за третью неделю — 60% продукции, выработанной за первые две недели вместе. Каков месячный план выпуска обуви, если известно, что для его выполнения необходимо за последнюю неделю месяца изготовить 1480 пар обуви?

13.036. Свежие грибы содержат по весу 90% воды, а сухие 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих грибов?

13.037. Одна мельница может смолоть 19 ц пшеницы за 3 ч, другая 32 ц за 5 ч, а третья 10 ц за 2 ч. Как распределить 133 т пшеницы между этими мельницами, чтобы, одновременно начав работу, они окончили ее также одновременно?

13.038. В трех секциях спортивной школы было 96 спортсменов. Число членов конькобежной секции составляло 0,8 числа членов лыжной, а число членов хоккейной секции составляло $33^1/_3$% суммарного числа членов двух первых секций. Сколько спортсменов было в каждой секции?

13.039. За первый квартал автозавод выполнил 25% годового плана выпуска автомашин. Число машин, выпущенных за второй, третий и четвертый кварталы, оказалось пропорционально числам 11,25, 12 и 13,5. Определить перевыполнение годового плана в процентах, если во втором квартале автозавод дал продукции в 1,08 раза больше, чем в первом.

13.040. Трое изобретателей получили за свое изобретение премию в размере 1410 рублей, причем второй получил $^1/_3$ того, что получил первый, и еще 60 рублей, а третий получил $^1/_3$ денег второго и еще 30 рублей. Какую премию получил каждый?

13.041. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

13.042. Площади трех участков земли находятся в отношении $2^3/_4 : 1^5/_6 : 1^3/_8$. Известно, что с первого участка собрано зерна на 72 ц больше, чем со второго.

Найти площадь всех трех участков, если средняя урожайность составляет 18 ц с 1 га.

13.043. Расстояние между Москвой и Смоленском по железной дороге равно 415 км. На этом пути расположены города Можайск и Вязьма. Расстояние между Москвой и Можайском относится к расстоянию между Можайском и Вязьмой, как 7 : 9, а расстояние между Можайском и Вязьмой составляет $^{27}/_{35}$ расстояния между Вязьмой и Смоленском. Найти расстояния между каждыми двумя соседними городами.

13.044. В магазин привезли сахар и сахарный песок в 63 мешках, всего 4,8 т, причем мешков с сахарным песком было на 25% больше, чем с сахаром. Масса каждого мешка с сахаром составляла $^3/_4$ массы мешка с сахарным песком. Сколько привезли сахара и сколько сахарного песка?

13.045. Кусок сплава меди и цинка массой в 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

13.046. Охотничий порох состоит из селитры, серы и угля. Масса серы должна относиться к массе селитры, как 0,2 : 1,3, а масса угля должна составлять $11^1/_9$% массы серы и селитры вместе. Сколько пойдет каждого из веществ на приготовление 25 кг пороха?

13.047. Музыкальный театр объявил конкурс для поступления в оркестр театра. Первоначально предполагалось, что число мест для скрипачей, виолончелистов и трубачей распределится в отношении 1,6 : 1 : 0,4. Однако затем было решено увеличить прием и в результате скрипачей было принято на 25% больше, а виолончелистов на 20% меньше, чем ранее намечалось. Сколько музыкантов каждого жанра было принято в оркестр, если всего приняли 32 человека?

13.048. Длина Дуная относится к длине Днепра, как $6^1/_3$: 5, а длина Дона относится к длине Дуная, как 6,5 : 9,5. Найти протяженность каждой из рек, если Днепр длиннее Дона на 300 км.

13.049. Первое из неизвестных чисел составляет 140% второго, а отношение первого к третьему равно $^{14}/_{11}$. Найти эти числа, если разность между третьим и вторым на 40 единиц меньше числа, составляющего 12,5% суммы первого и второго чисел.

13.050. Заработные платы рабочего за октябрь и ноябрь относились, как $1^1/_2 : 1^1/_3$, а за ноябрь и декабрь, как $2 : 2^2/_3$. За декабрь он получил на 15 руб. больше, чем за октябрь, и за перевыполнение квартального плана рабочему начислили премию в размере 20% его трехмесячного заработка. Найти размер премии.

13.051. По наклонной плоскости длиной 6 м катятся два цилиндра, у одного из которых длина окружности равна 3 дм, а у другого 2 дм. Можно ли увеличить длины окружностей обоих цилиндров на одну и ту же величину так, чтобы на том же пути один из них сделал на 3 оборота больше другого?

13.052. Искусственный водоем имеет форму прямоугольника с разностью сторон в 1 км. Два рыбака, находящиеся в одной вершине этого прямоугольника, одновременно отправились в пункт, расположенный в противоположной вершине. При этом один рыбак поплыл напрямик на лодке, а второй пошел пешком вдоль берега. Определить размеры водоема, если каждый рыбак передвигался со скоростью 4 км/ч и один из них прибыл к месту назначения на 30 мин раньше второго.

13.053. Кристалл, находясь в стадии формирования, равномерно наращивает свою массу. Наблюдая формирование двух кристаллов, заметили, что за год первый кристалл увеличил свою первоначальную массу на 4%, а второй — на 5%, в то время как прирост массы первого кристалла за 3 месяца равнялся приросту массы второго кристалла за 4 месяца. Каковы были первоначальные массы этих кристаллов, если известно, что после того как каждая из них увеличилась на 20 г, отношение массы первого кристалла к массе второго кристалла достигло числа 1,5?

13.054. Один совхоз получил средний урожай гречихи 21 ц с 1 га, а другой, у которого под гречихою было на 12 га меньше, добился среднего урожая в 25 ц с 1 га. В результате во втором совхозе было собрано на 300 ц гречихи больше, чем в первом. Сколько центнеров гречихи было собрано в каждом совхозе?

13.055. На вагоноремонтном заводе в определенный срок должно быть отремонтировано 330 вагонов. Перевыполняя план ремонта в среднем на 3 вагона в неделю, на заводе уже за две недели до срока отремонтировали 297 вагонов. Сколько вагонов в неделю ремонтировали на заводе?

13.056. На расстоянии s км грузовой автомобиль расходует бензина на a л больше, чем легковой. Расходуя один литр бензина, грузовой автомобиль проходит по той же дороге на b км меньше, чем легковой. Каков расход бензина каждого из этих автомобилей на расстоянии s км?

13.057. Две силы приложены к одной точке и направлены под прямым углом. Величина одной из них на 4 Н больше величины другой, а величина равнодействующей на 8 Н меньше суммы величин данных сил. Найти величины данных сил и их равнодействующей.

13.058. В лаборатории измеряется скорость, с которой распространяется звук вдоль стержней, сделанных из разных материалов. В первом опыте оказалось, что весь путь, состоящий из трех последовательно соединенных стержней, звук проходит за время a с, а путь, состоящий из второго и третьего стержней, звук проходит в два раза быстрее, чем один первый стержень. В другом опыте второй стержень заменили новым, и тогда последовательное соединение из трех стержней звук прошел за время b с, а соединение из первого и второго стержней вдвое медленнее, чем он проходит один третий стержень. Найти скорость распространения звука в новом стержне, если его длина l м.

13.059. По обе стороны улицы, длиной в 1200 м, во вновь разбиваемом поселке лежат прямоугольные полосы земли, отведенные на участки, одна — шириной в 50 м, а другая — в 60 м. На сколько участков разбит весь поселок, если более узкая полоса содержит на 5 участков больше, чем широкая, при условии, что на узкой полосе каждый участок на 1200 м^2 меньше, чем каждый участок на широкой полосе?

13.060. Груз массой в 60 кг производит давление на опору. Если массу груза уменьшить на 10 кг, а площадь опоры уменьшить на 5 дм^2, то масса, приходящаяся на каждый квадратный дециметр опоры, увеличится на 1 кг. Определить площадь опоры.

13.061. Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму в 2 руб. 80 коп. Определить стоимости марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

13.062. Ученик токаря вытачивает шахматные пешки для определенного числа комплектов шахмат. Он хочет научиться изготовлять ежедневно на две пешки больше, чем теперь; тогда такое же задание он выполнит на 10 дней быстрее. Если бы ему удалось научиться изготовлять ежедневно на 4 пешки больше, чем теперь, то срок выполнения такого же задания уменьшился бы на 16 дней. Сколько комплектов шахмат обеспечивает пешками этот токарь, если для каждого комплекта нужно 16 пешек?

13.063. В зрительном зале клуба было 320 мест, расположенных одинаковыми рядами. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале?

13.064. Запас сена таков, что можно ежедневно выдавать на всех лошадей 96 кг. В действительности ежедневную порцию каждой лошади смогли увеличить на 4 кг, так как две лошади были переданы соседнему колхозу. Сколько лошадей было первоначально?

13.065. Сочинение писали 108 экзаменующихся. Им было роздано 480 листов бумаги, причем каждая девушка получила на один лист больше каждого юноши, а все девушки получили столько же листов, сколько получили все юноши среди экзаменующихся. Сколько было девушек и сколько юношей?

13.066. На машиностроительном заводе разработали новый тип деталей для генераторов. Из 875 кг металла делают теперь на 3 штуки больше деталей нового типа, чем деталей старого типа делали из 900 кг. Какова масса детали нового и старого типов, если две детали нового типа по массе меньше одной детали старого типа на 0,1 т?

13.067. В первый день спортивных соревнований не выполнили зачетные нормы и выбыли из дальнейшей борьбы $^1/_6$ часть состава команды юношей и $^1/_7$ часть состава команды девушек. В течение остального периода соревнований из обеих команд выбыло по причине невыполнения норм одинаковое количество спортсменов. Всего к концу испытаний оказалось невыполнивших зачетные нормы 48 человек из команды юношей и 50 человек из команды девушек, но из общего количества спортсменов, выполнивших зачетные нормы, девушек оказалось вдвое больше, чем юношей. Какова была первоначальная численность команд?

13.068. Рабочий день мастерицы A и рабочий день мастерицы B оплачиваются не одинаково, но работали обе мастерицы одинаковое число дней. Если бы A работала на один день меньше, а B — на 5 дней меньше, то A заработала бы 72 руб., а B — 80 руб. Если бы, наоборот, A работала на пять дней меньше, а B — на один день меньше, то B заработала бы на 36 руб. больше, чем A. Сколько заработала каждая мастерица в действительности?

13.069. В одном бассейне имеется 200 м^3 воды, а в другом — 112 м^3. Открывают краны, через которые наполняются бассейны. Через сколько часов количество воды в бассейнах будет одинаковым, если во второй бассейн вливается в час на 22 м^3 больше воды, чем в первый?

13.070. Через час после начала равномерного спуска воды в бассейне ее осталось 400 м^3, а еще через три часа — 250 м^3. Сколько воды было в бассейне?

13.071. Для перевозки 60 т груза из одного места в другое затребовали некоторое количество машин. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому было дополнительно затребовано 4 машины. Какое количество автомашин было затребовано первоначально?

13.072. Город C, расположенный между пунктами A и B, снабжается газом из этих пунктов, расстояние между которыми 500 км. Из резервуара A в каждую минуту откачивается 10 000 м^3 газа, а из резервуара B — на 12% больше. При этом утечка газа в каждой магистрали составляет 4 м^3 на километр трубы. Зная, что в город C газ поступает из резервуаров A и B поровну, найти расстояние между городом C и пунктом A.

13.073. Имеются два куска кабеля разных сортов. Первый кусок массой 65 кг; другой, длина которого на 3 м больше длины первого и масса каждого метра которого на 2 кг больше массы каждого метра первого куска, имеет массу 120 кг. Вычислить длину этих кусков.

13.074. В швейный цех поступило три кипы бельевого материала, всего 5000 м. В первой кипе количество материала было в 3 раза меньше, чем во второй, а в третьей — 22% всего количества. Из материала первой кипы сшили 150 простыней и 240 наволочек. Для изготовления одной простыни требовалось на 3,25 м больше материала, чем для изготовления одной наволочки. Из скольких метров материала шьется одна наволочка?

13.075. Двое рабочих за смену вместе изготовили 72 детали. После того как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй на 25%, вместе за смену они стали изготовлять 86 деталей. Сколько деталей изготовляет каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

13.076. Сбор кукурузы с полей животноводческой фермы составлял 4340 ц. На следующий год запланировано получить 5520 ц кукурузы за счет увеличения площади на 14 га и увеличения урожайности на 5 ц с 1 га. Определить площадь, занятую посевом кукурузы, и урожайность в центнерах с 1 га (урожай был меньше 40 ц с 1 га).

13.077. Старший брат на мотоцикле, а младший на велосипеде совершили двухчасовую безостановочную поездку в лес и обратно. При этом мотоциклист проезжал каждый километр на 4 мин быстрее, чем велосипедист. Сколько километров проехал каждый из братьев за два часа, если известно, что путь, проделанный старшим братом за это время, на 40 км больше?

13.078. Турист ехал на автомобиле $^5/_8$ всего пути, а остальную часть — на катере. Скорость катера на 20 км/ч меньше скорости автомобиля. На автомобиле турист ехал на 15 мин дольше, чем на катере. Чему равны скорость автомобиля и скорость катера, если весь путь туриста равен 160 км?

13.079. Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Четыре часа спустя после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

13.080. Из поселка, расположенного в 60 км от города, сегодня должен приехать отец студентки A. Он хотел посетить воскресную лекцию. Но лекция перенесена на другой день. Чтобы предупредить отца об этом, дочь поехала по шоссе ему навстречу. При встрече выяснилось, что отец и дочь выехали на мопедах одновременно, но средняя скорость дочери была вдвое большей. Возвращаясь после встречи, каждый из них увеличил первоначальную скорость на 2 км/ч, и дочь прибыла в город на 5 мин позже, чем отец в поселок. С какой средней скоростью отец и дочь ехали первоначально?

13.081. Мотоциклист отправился из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 120 км. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда должен был остановиться на 10 мин. После этой остановки он продолжал путь до A, увеличив скорость на 6 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он употребил столько же времени, сколько на путь от A до B?

13.082. Две группы юных туристов должны идти навстречу друг другу из турбаз A и B, расстояние между которыми 30 км. Если первая группа туристов выйдет на 2 ч раньше второй, то они встретятся через 2,5 ч после выхода второй группы туристов. Если же вторая группа выйдет на 2 ч раньше, чем первая, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первой группы туристов. С какой средней скоростью идет каждая группа туристов?

13.083. Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найти первоначальную скорость поезда.

13.084. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 120 км, вышли одновременно навстречу друг другу два автобуса. В пути первый сделал остановку на 10 мин, второй —на 5 мин. Первый автобус прибыл в пункт B на 25 мин раньше, чем второй прибыл в пункт A. Можно считать, что скорости движения автобусов были постоянными, причем скорость первого автобуса превышала скорость второго автобуса на 20 км/ч. Сколько времени продолжалась поездка пассажиров каждого из этих автобусов между пунктами A и B?

13.085. Два брата взяли свои велосипеды и одновременно тронулись в путь с намерением проехать 42 км. Старший брат на всем пути сохранял одну и ту же скорость, а младший брат каждый час отставал от старшего на 4 км. Но так как старший брат отдыхал в пути целый час, а младший — только 20 мин, то к финишу они прибыли одновременно. Сколько времени продолжалась поездка?

13.086. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 7 и из получившегося нового числа вычли квадрат задуманного числа.

Остаток уменьшили на 75% этого остатка и еще вычли задуманное число. В результате всего пришли к нулю. Какое число задумано?

13.087. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 5 и из получившегося нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на задуманное число, а затем вычли задуманное число. Осталась единица. Какое число задумано?

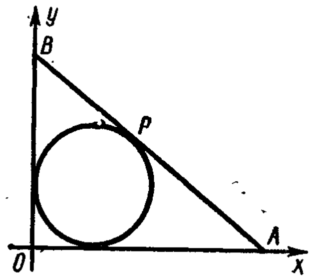

Рис. 13.1

13.088. На рис. 13.1 изображена окружность, касающаяся двух взаимно перпендикулярных осей Ox и Oy, и прямая AB, касающаяся окружности в точке P. Радиус окружности $R=10$ см, а площадь треугольника OAB равна 600 см^2. Найти координаты точек A, B, P, учитывая, что на рисунке $|OA|>|OB|$.

13.089. Некоторое расстояние поезд прошел со скоростью 120 км/ч. После этого расстояние, на 75 км большее, он прошел со скоростью 150 км/ч, а остальное расстояние, на 135 км меньшее пройденного, — со скоростью 96 км/ч. Как велик весь путь, если средняя скорость поезда оказалась равной 120 км/ч?

13.090. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал бы 40% меди?

13.091. Имеющиеся на складе 300 кг товара проданы в неравных количествах двум организациям по цене 1,25 руб. за кг. Первая организация перевозит купленный товар на расстояние 20 км, а вторая — на расстояние 30 км. Перевозка 10 кг товара обходится в 5 коп. за километр пути. Зная, что вторая организация заплатила за покупку и перевозку товара на 90 руб. больше первой, определить, сколько килограммов товара купила каждая организация и какую сумму она заплатила за товар и его перевозку?

13.092. Денежная премия была распределена между тремя изобретателями: первый получил половину всей премии без $^3/_{22}$ части того, что получили двое других вместе. Второй получил $^1/_4$ часть всей премии и $^1/_{56}$ часть денег, полученных вместе остальными двумя. Третий получил 300 руб. Как велика была премия и сколько денег получил каждый изобретатель?

13.093. Сплав меди с серебром содержит серебра на 1845 г больше, чем меди. Если бы к нему добавить некоторое количество чистого серебра, по массе равное $^1/_3$ массы чистого серебра, первоначально содержавшегося в сплаве, то получился бы новый сплав, содержащий 83,5% серебра. Какова масса сплава и каково первоначальное процентное содержание в нем серебра?

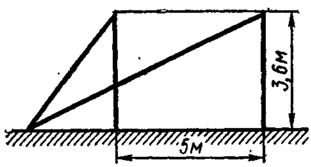

Рис. 13.2

13.094. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20%. Определить, какое количество железа осталось еще в руде.

13.095. На ровной горизонтальной площадке стоят две мачты на расстоянии 5 м друг от друга. На высоте 3,6 м от площадки к каждой мачте прикреплено по одному концу куска проволоки длиной 13 м. Проволока натянута в плоскости расположения мачт и прикреплена к площадке, как показано на рис. 13.2. На каком расстоянии от ближайшей мачты находится точка прикрепления проволоки к площадке?

13.096. Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 120 км он затрачивает времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Вычислить скорость каждого из них.

13.097. По железной дороге расстояние от A до B равно 88 км. Водным путем оно увеличивается до 108 км. Поезд из A выходит на 1 ч позже теплохода и прибывает в B на 15 мин раньше. Найти среднюю скорость поезда, если известно, что она на 40 км больше средней скорости теплохода.

13.098. Пешеход и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми 40 км, и встречаются спустя 2 ч после отправления. Затем они продолжают путь, причем велосипедист прибывает в A на 7 ч 30 мин раньше, чем пешеход в B. Найти скорости пешехода и велосипедиста, полагая, что оба все время двигались с неизменными скоростями.

13.099. Расстояние между поселками A и B равно s км. Из A отправились в B одновременно и по одной и той же дороге два автотуриста, которые должны были прибыть в B в одно и то же время. В действительности первый турист прибыл в B на n ч раньше срока, а второй на $3n$ ч опоздал, так как последний проезжал за каждый час в среднем на r км меньше первого. Определить часовую скорость этих автотуристов.

13.100. Определить целое положительное число по следующим данным: если его записать цифрами и присоединить справа цифру 4, то получим число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 4, а в частном получится число, меньшее делителя на 27.

13.101. В один и тот же час навстречу друг другу должны были выйти: A из поселка M и B из поселка N. Но A задержался и вышел позже на 6 ч. При встрече выяснилось, что A прошел на 12 км меньше, чем B. Отдохнув, они одновременно покинули место встречи и продолжили путь с прежней скоростью. В результате A пришел в N через 8 ч, а B пришел в M через 9 ч после встречи. Определить расстояние MN и скорости пешеходов.

13.102. Даны два двузначных числа, из которых второе обозначено теми же цифрами, что и первое, но написанными в обратном порядке. Частное от деления первого числа на второе равно 1,75. Произведение первого числа на цифру его десятков в 3,5 раза больше второго числа. Найти эти числа.

13.103. От станции железной дороги до турбазы можно пройти по шоссе или тропинкой, причем тропинкой ближе на 5 км. Два товарища условились, что один пойдет по шоссе, строго выдерживая намеченную скорость v км/ч, а второй — тропинкой со скоростью 3 км/ч. Второй пришел на турбазу раньше первого на 1 ч. Найти расстояние от станции до турбазы по шоссе и скорость v первого товарища, если известно, что v — число целое.

13.104. Длина автобусного маршрута 16 км. В часы «пик» автобус переходит на режим экспресса, т. е. значительно уменьшает число остановок, вследствие чего продолжительность поездки от начала до конца маршрута сокращается на 4 мин, а средняя скорость автобуса увеличивается на 8 км/ч. С какой скоростью идет автобус в режиме экспресса?

13.105. По одной из трамвайных линий начали курсировать трамваи новой конструкции. Рейс протяженностью в 20 км продолжается теперь на 12 мин меньше, так как средняя скорость трамвая новой конструкции на 5 км/ч больше средней скорости трамвая устаревшей конструкции. Сколько времени затрачивает на рейс трамвай новой конструкции и какова его средняя скорость?

13.106. Длина рейса 2900 км. Пролетев 1700 км, летчик сделал вынужденную посадку на 1,5 ч, после чего полетел со скоростью, на 50 км/ч меньшей, чем раньше. Найти первоначальную скорость самолета, если известно, что он прибыл на место через 5 ч после вылета.

13.107. Две бригады, работая вместе, должны отремонтировать заданный участок шоссейной дороги за 18 дней. В действительности же получилось так, что сначала работала только одна первая бригада, а заканчивала ремонт участка дороги одна вторая бригада, производительность труда которой более высокая, чем у первой бригады. В результате ремонт заданного участка дороги продолжался 40 дней, причем первая бригада в свое рабочее время выполнила $^2/_3$ всей работы. За сколько дней был бы отремонтирован заданный участок дороги каждой бригадой отдельно?

13.108. На полях, выделенных агролаборатории для опытов, с двух земельных участков собрали 14,7 ц зерна. На следующий год после применения новых методов агротехники урожай на первом участке повысился на 80%, а на втором — на 24%, благодаря чему с этих же участков было собрано 21,42 ц зерна. Сколько центнеров зерна собирают с каждого участка после применения новых методов агротехники?

13.109. Два велосипедиста выехали одновременно из двух мест, отстоящих одно от другого на 270 км, и едут навстречу друг другу. Второй проезжает в час на 1,5 км меньше, чем первый, и встречается с ним через столько часов, сколько километров в час делает первый. Определить скорость каждого велосипедиста.

13.110. Два поезда отправляются из пунктов A и B навстречу друг другу. Они встретятся на половине пути, если поезд из A выйдет на 2 ч раньше, чем поезд из B. Если же оба поезда выйдут одновременно, то через два часа расстояние между ними составит $^1/_4$ расстояния между пунктами A и B. За какие промежутки времени каждый поезд проходит весь путь?

13.111. Поезд был задержан на t ч. Увеличив скорость на m км/ч, машинист на перегоне в s км ликвидировал опоздание. Определить, какую скорость должен был иметь поезд на этом перегоне, если бы не было задержки.

13.112. Два тела движутся навстречу друг другу из двух мест, расстояние между которыми 390 м. Первое тело прошло в первую секунду 6 м, а в каждую следующую проходило на 6 м больше, чем в предыдущую. Второе тело двигалось равномерно со скоростью 12 м/с и начало движение спустя 5 с после первого. Через сколько секунд после того, как начало двигаться первое тело, они встретятся?

13.113. В отверстие трубы вошла одна материальная частица, а спустя 6,8 мин в то же отверстие вошла вторая частица. Войдя в трубу, каждая частица немедленно начинает поступательное движение вдоль трубы: первая частица двигается равномерно со скоростью 5 м/мин, а вторая в первую минуту пробегает 3 м, а в каждую следующую минуту на 0,5 м больше, чем в предыдущую. Через сколько минут вторая частица догонит первую?

13.114. Расстояние между двумя городами равно a км. Два автомобилиста, выехав из этих городов навстречу друг другу, встретятся на полпути, если первый выедет на t ч раньше второго. Если же они выедут одновременно друг другу навстречу, то встреча произойдет через $2t$ ч. Определить скорость каждого автомобиля, если считать, что скорости постоянны на всем пути.

13.115. A отправился из города M в город N с постоянной скоростью 12 км/ч. B, находившийся в городе N, получив сигнал, что A уже проехал 7 км, тотчас выехал навстречу ему и проезжал каждый час 0,05 всего расстояния между M и N. С момента выезда B до его встречи с A прошло столько часов, на сколько километров в час продвигался B. Найти расстояние между городами M и N, если оно не меньше 100 км.

13.116. Выйдя со станции с опозданием в 20 мин, поезд покрыл перегон в 160 км со скоростью, превышающей скорость по расписанию на 16 км/ч, и пришел к концу перегона вовремя. Какова по расписанию скорость поезда на этом перегоне?

13.117. Велосипедист проехал 60 км из пункта A в пункт B. На обратном пути он первый час проехал с прежней скоростью, после чего сделал остановку на 20 мин. Начав движение снова, он увеличил скорость на 4 км/ч, и поэтому потратил на путь из B в A столько же времени, сколько и на путь из A в B. Определить скорость велосипедиста на пути из A в B.

13.118. Два автобуса с рабочими и служащими текстильной фабрики одновременно вышли из ворот предприятия и направились в зону отдыха, к озеру. Расстояние между фабрикой и озером 48 км. Первый автобус прибыл к озеру на 10 мин раньше второго, причем средняя скорость второго меньше средней скорости первого на 4 км/ч. Вычислить скорости автобусов.

13.119. Произведение цифр двузначного числа в три раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

13.120. Мотоциклист остановился для заправки горючим на 12 мин. После этого, увеличив скорость движения на 15 км/ч, он наверстал потерянное время на расстоянии 60 км. С какой скоростью он двигался после остановки?

13.121. При испытаниях на дальность самолет пролетел от заводского аэродрома до заранее намеченного пункта всего s км, затратив на это t_1 ч. Затем он повернул обратно и за время t_2 ч возвратился на заводской аэродром ($t_1 < t_2$). В полете туда и обратно истинная скорость самолета (скорость относительно неподвижной массы воздуха) сохранялась одной и той же, а неравенство $t_1 < t_2$ объясняется влиянием ветра, который был сначала попутным, а затем встречным. Найти истинную скорость v самолета, скорость ветра $v_в$ и путь $s_{ист}$, пройденный самолетом относительно неподвижной массы воздуха.

13.122. Два брата имели билеты на стадион, расположенный в 20 км от их дома. Чтобы добраться до стадиона, они решили воспользоваться своим велосипедом и договорились, что отправятся одновременно, один на велосипеде, а другой пешком; проехав часть пути, первый оставит велосипед, а второй, дойдя до места, где будет оставлен велосипед, дальше поедет на нем и догонит первого у входа на стадион. Где должен оставить велосипед первый брат и сколько времени уйдет на дорогу, если каждый из братьев будет идти равномерно со скоростью 4 км/ч, а ехать в 5 раз быстрее?

13.123. Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 мин. Увеличив после этого свою скорость на 10 км/ч, он наверстал опоздание на перегоне в 80 км. Определить скорость мотоциклиста до задержки.

13.124. Из порта одновременно вышли два теплохода, причем один из них пошел на юг, а другой на восток. Через два часа расстояние между ними составило 174 км. Найти среднюю скорость каждого теплохода, если известно, что один из них в среднем за каждый час проходил на 3 км больше, чем второй.

13.125. Скорости пассажирского и товарного поездов относятся, как $a:b$. Пассажирский поезд вышел со станции A на 0,5 ч позже товарного, а прибыл на станцию B на 0,5 ч раньше его. Найти скорости поездов, если расстояние между A и B равно s км.

13.126. По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать в 1 мин на два оборота больше. Сколько оборотов в минуту совершает каждая точка?

13.127. По сигналу дрессировщика два пони одновременно побежали равномерно вдоль внешней окружности арены цирка в противоположных направлениях. Первый пони бежал несколько быстрее второго и к моменту встречи пробежал на 5 м больше, чем второй. Продолжая пробег, первый пони подбежал к дрессировщику, оставшемуся на том месте, от которого начали бежать пони, через 9 с после встречи со вторым пони, а второй — через 16 с после их встречи. Каков диаметр арены?

13.128. Над пунктом A вертолет был в 8 ч 30 мин. Пролетев по прямой линии s км, вертолет оказался над пунктом B. Продержавшись в воздухе над пунктом B 5 мин, вертолет пошел обратным курсом по той же трассе. К пункту A он вернулся в 10 ч 35 мин. От A к B он летел по ветру, а обратно против ветра. Скорость ветра все время была постоянной. Найти скорость ветра, если собственная скорость вертолета тоже все время постоянна и при безветрии равна v км/ч. При каком соотношении между заданными величинами задача имеет решение?

13.129. В 9 ч самоходная баржа вышла из A вверх по реке и прибыла в пункт B; 2 ч спустя после прибытия в B эта баржа отправилась в обратный путь и прибыла в

A в 19 ч 20 мин того же дня. Предполагая, что средняя скорость течения реки 3 км/ч и собственная скорость баржи все время постоянна, определить, в каком часу баржа прибыла в пункт B. Расстояние между A и B равно 60 км.

13.130. Два приятеля в одной лодке прокатились по реке вдоль берега и вернулись по той же речной трассе через 5 ч с момента отплытия. Весь рейс составил 10 км. По их подсчетам получилось, что на каждые 2 км против течения в среднем требовалось им столько же времени, сколько требовалось на каждые 3 км по течению. Найти скорость течения и время проезда туда и обратно.

13.131. Бакенщик, инспектируя свой участок реки, в обыкновенной весельной лодке поднялся вверх по реке на 12,5 км, а затем по той же речной трассе вернулся на прежнее место. В этом рейсе он преодолевал каждые 3 км против течения и каждые 5 км по течению в среднем за одинаковые промежутки времени, а всего в пути находился ровно 8 ч. Найти скорость течения и время рейса бакенщика туда и обратно.

13.132. В лабораторной установке некоторая жидкость поступает в сосуд через три входных крана. Если открыть все краны одновременно, то сосуд наполнится за 6 мин. Если же наполнять сосуд только через второй кран, то на это потребуется 0,75 того времени, за которое может наполниться сосуд только через один первый кран. Через один третий кран этот сосуд наполняется на 10 мин дольше, чем через один второй кран. На какое время надо открывать каждый кран в отдельности для наполнения сосуда?

13.133. Бассейн для плавания имеет три трубы для отвода воды. Через первую и вторую трубы вместе при закрытой третьей трубе наполненный бассейн делается пустым за a мин. Через первую и третью вместе при закрытой второй трубе — за b мин, а через вторую и третью трубы при закрытой первой — за c мин. За какое время освобождается от воды наполненный бассейн через каждую трубу в отдельности?

13.134. По программе, составленной электронной управляющей машиной для поточной линии, два станка на этой линии должны за a ч обработать по одинаковому числу деталей. Первый станок выполнил задание. Второй станок оказался не вполне исправным, работал с перебоями, вследствие чего за то же время обработал на n деталей меньше, чем первый. На обработку одной детали на втором станке затрачивалось в среднем на b мин больше, чем на первом. Сколько деталей обработал каждый станок?

13.135. Бригада слесарей может выполнить некоторое задание по обработке деталей на 15 ч скорее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18 ч, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то и тогда будет выполнено только 0,6 всего задания. Сколько времени требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения данного задания?

13.136. От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Какова скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки больше скорости плота на 12 км/ч?

13.137. Три машины разных систем выполняют некоторую счетную работу. Если всю работу поручить только одной второй или одной первой машине, то одна вторая машина затратит на выполнение всей работы двумя минутами больше, чем одна первая. Одна третья машина может выполнить всю работу за срок, вдвое больший, чем одна первая. Так как части работы однотипны, то всю работу можно поделить между тремя машинами. Тогда, работая вместе и закончив работу одновременно, они выполнят ее за 2 мин 40 с. За какое время может выполнить эту работу каждая машина, действуя отдельно?

13.138. Два рабочих, из которых второй начал работать полутора днями позже первого, работая независимо один от другого, оклеили обоями несколько комнат за 7 дней, считая с момента выхода на работу первого рабочего. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то первому для ее выполнения понадобилось бы тремя днями более, чем второму. За сколько дней каждый из них отдельно выполнил бы эту же работу?

13.139. Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $^8/_3$, а разность между искомым числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 18.

13.140. На одном из двух станков обрабатывают партию деталей на три дня дольше, чем на другом. Сколько дней продолжалась бы обработка этой партии деталей каждым станком в отдельности, если известно, что при совместной работе на этих станках в 3 раза большая партия деталей была обработана за 20 дней?

13.141. Мне было задано целое число. Требовалось увеличить его на 200 000 и полученное число утроить. Вместо этого я приписал к цифровой записи заданного числа справа цифру 2 и получил правильный результат. Какое число было задано?

13.142. Чан наполняется двумя кранами A и B. Наполнение чана только через кран A длится на 22 мин дольше, чем через кран B. Если же открыть оба крана, то чан наполнится за 1 ч. За какой промежуток времени каждый кран отдельно может наполнить чан?

13.143. A выполняет некоторую работу в срок на a дней бо́льший, чем B, и на b дней бо́льший, чем C. A и B, работая вместе, выполняют эту работу за столько же дней, что и C. Определить время, в которое каждый выполняет эту работу отдельно. При каком соотношении между заданными величинами задача имеет решение?

13.144. Сумму всех четных двузначных чисел разделили на одно из них. Остатка не было. Получившееся частное только порядком цифр отличается от делителя, а сумма его цифр равна девяти. Какое двузначное число являлось делителем?

13.145. Сначала катер шел a км по течению реки, а затем вдвое большее расстояние — по озеру, в которое река впадает. Весь рейс продолжался 1 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки c км/ч.

13.146. Найти три числа, из которых первое больше второго во столько раз, во сколько второе больше третьего. Если из первого числа вычесть сумму двух других, то разность будет равна 2, а если к первому прибавить полуразность второго и третьего, то в сумме получится 9.

13.147. Имеется лист жести в форме прямоугольника, у которого отношение длины к ширине равно 2 : 1. Из этого листа изготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам листа вырезано по квадрату со стороной в 3 см и получившиеся края загнуты. Определить размеры листа жести, если объем коробки оказался равным 168 см^3.

13.148. Фотокарточка размерами 12 см на 18 см вставлена в рамку постоянной ширины. Определить ширину рамки, если ее площадь равна площади самой карточки.

13.149. Найти два числа, сумма которых равна 44, причем меньшее число отрицательное. Процентное отношение разности между большим и меньшим числами к меньшему числу совпадает с меньшим числом.

13.150. В рукописи задачника по арифметике был написан пример, в котором данное число надо умножить на 3 и из полученного результата отнять 4. В типографии допустили опечатку: вместо знака умножения поставили знак деления, а вместо минуса — плюс. Тем не менее конечный результат от этого не изменился. Какой пример предполагали поместить в задачнике?

13.151. Кошка, гнавшаяся за мышкой вдоль длинного коридора, догнала ее через a с после начала погони. Первоначальное расстояние между ними l м. Если при таком же начальном расстоянии мышка с перепугу побежала бы не от кошки, а навстречу ей, то была бы схвачена через b с. Полагая, что в том и другом случае кошка и мышка прилагали бы максимальные усилия, найти средние скорости каждой из них.

13.152. Земельный участок прямоугольной формы обнесен изгородью. Если от него отрезать по прямой некоторую часть так, что оставшаяся часть окажется квадратом, то при этом его площадь уменьшится на 400 м^2, а изгородь уменьшится на 20 м. Определить первоначальные размеры участка.

13.153. Для спортплощадки отвели участок земли в форме прямоугольника с диагональю, равной 185 м. При выполнении строительных работ выяснилась необходимость уменьшить длину каждой стороны на 4 м. При этом форма прямоугольника была сохранена, но площадь оказалась уменьшенной на 1012 м^2. Каковы действительные размеры спортплощадки?

13.154. За килограмм одного продукта и десять килограммов другого заплачено 2 рубля. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 1 руб. 82 коп. Сколько стоит килограмм каждого продукта?

13.155. В первую неделю отпускного путешествия друзья израсходовали на 6 рублей меньше, чем $^2/_5$ количества взятых с собой денег; во вторую неделю $^1/_3$ остатка и еще на билеты в театр 2 руб.; в третью неделю $^3/_5$ нового остатка и еще на морские прогулки 3 руб. 20 коп., после чего у них осталось 20 руб. Сколько денег было израсходовано за три недели путешествия?

13.156. Моторная лодка, обладающая скоростью движения 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно не останавливаясь за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами 60 км. Определить скорость течения реки.

13.157. Найти двузначное число, такое, что если его разделить на произведение цифр, из которых оно составлено, то в частном получится $^{16}/_3$, а если вычесть из него 9, то разность будет также двузначным числом, которое отличается от искомого числа только порядком следования цифр.

13.158. Для продажи через ларек привезли яблоки 1-го сорта на сумму 22 руб. 80 коп. и яблоки 2-го сорта на сумму 18 руб. При разгрузке привезенные яблоки случайно перемешались. Подсчет показал, что если теперь продавать все яблоки по одной цене — на 9 коп. ниже цены килограмма яблок 1-го сорта, то будет выручена ранее намеченная сумма. Сколько килограммов яблок привезено в ларек, если известно, что яблок 2-го сорта было на 5 кг больше, чем 1-го сорта?

13.159. От трех кафедр института поступили заявки на приобретение дополнительного оборудования лабораторий. Стоимость оборудования в заявке первой кафедры составляет 45% от заявки второй кафедры, а стоимость оборудования в заявке второй кафедры составляет 80% от заявки третьей. Стоимость оборудования в заявке третьей кафедры превышает заявку первой на 640 руб. Какова общая стоимость оборудования в заявках всех трех кафедр?

13.160. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найти это число.

13.161. Перевозка тонны груза от пункта M до пункта N по железной дороге обходится на b коп. дороже, чем водным путем. Сколько тонн груза можно перевезти от M до N по железной дороге на сумму a руб., если водным путем на эту же сумму можно перевезти на k тонн больше, чем по железной дороге?

13.162. Некоторый товар был куплен осенью и за него было уплачено 810 руб. Килограмм этого товара осенью на 10 коп. дешевле, чем весной, и поэтому на те же 810 руб. весной было куплено на 90 кг меньше. Сколько стоит 1 кг товара весной и сколько его было куплено осенью?

13.163. При уборке урожая с каждого из двух участков собрано по 210 ц пшеницы. Площадь первого участка была на 0,5 га меньше площади второго участка. Сколько центнеров пшеницы собрано с одного гектара на каждом участке, если урожай пшеницы на первом участке был на 1 ц с гектара больше, чем на втором?

13.164. Стоимость 60 экземпляров первого тома и 75 экземпляров второго тома составляет 270 руб. В действительности за все эти книги уплатили только 237 руб., так как была произведена скидка: на первый том в размере 15%, а на второй — в размере 10%. Найти первоначальную цену этих книг.

13.165. Приемщик посуды принял 140 банок двух емкостей. Объем банки большей емкости на 2,5 л больше объема банки меньшей емкости. Общий объем больших банок равен общему объему малых банок и равен 60 л. Определить количество больших и малых банок.

13.166. Ученику надо было найти произведение числа 136 на некоторое двузначное число, в котором цифра единиц вдвое больше цифры десятков. По рассеянности он поменял местами цифры двузначного числа, отчего и получил произведение на 1224 больше истинного. Чему равно истинное произведение?

13.167. Моторная лодка и парусник, находясь на озере на расстоянии 30 км друг от друга, двигаются навстречу друг другу и встречаются через час. Если бы моторная лодка находилась в 20 км от парусника и догоняла его, то на это потребовалось бы 3 ч 20 мин. Определить скорости лодки и парусника.

13.168. Однозначное число увеличили на 10 единиц. Если полученное число увеличить на столько же процентов, как в первый раз, то получится 72. Найти первоначальное число.

13.169. Кристалл, находясь в стадии формирования, равномерно наращивает свою массу. Наблюдая формирование двух кристаллов, заметили, что первый из них за 3 месяца дал такой же прирост массы, как второй за 7 месяцев. По истечении года оказалось, однако, что первый кристалл увеличил свою первоначальную массу на 4%, второй — на 5%. Найти отношение первоначальных масс этих кристаллов.

13.170. Деревянная балка весит 900 Н, а железная балка, длина которой на 2 м больше первой, весит 1600 Н, причем 1 м (погонный метр) железной балки весит на 50 Н больше, чем 1 м деревянной балки. Найти длину каждой балки.

13.171. В семье отец, мать и три дочери. Всем вместе 90 лет. Разница в возрасте у девочек — 2 года. Возраст матери на 10 лет больше суммы возрастов дочерей. Разность лет отца и матери равна возрасту средней дочери. Сколько лет каждому члену семьи?

13.172. Два сосуда с раствором соли поставлены для выпаривания. Ежедневно выпариваемые порции соли постоянны для каждого сосуда. Из первого сосуда получено 48 кг соли, а из второго, стоявшего на 6 дней меньше, — 27 кг. Если бы первый сосуд стоял столько же дней, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то из обоих растворов получилось бы одинаковое количество соли. Сколько дней стоял каждый раствор?

13.173. Если неизвестное двузначное число разделить на число, изображенное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же искомое число разделить на сумму его цифр, то в частном будет 8 и в остатке 7. Найти это число.

13.174. В четырех ящиках лежит чай. Когда из каждого ящика вынули по 9 кг, то во всех вместе осталось столько же, сколько было в каждом. Сколько чаю было в каждом ящике?

13.175. Катер отошел от причала одновременно с плотом и прошел вниз по реке $^{40}/_{3}$ км. Не делая остановки, он развернулся и пошел вверх по реке. Пройдя $^{28}/_{3}$ км, он встретился с плотом. Если скорость течения реки 4 км/ч, то какова собственная скорость катера?

13.176. Общая вместимость трех цистерн составляет 1620 л. Две из них наполнены керосином, а третья пустая. Чтобы наполнить ее, нужно использовать либо все содержимое первой цистерны плюс одну пятую содержимого второй, либо все содержимое второй плюс одну третью содержимого первой. Найти емкости цистерн.

13.177. Планом было предусмотрено, что предприятие на протяжении нескольких месяцев изготовит 6000 насосов. Увеличив производительность труда, предприятие стало изготовлять в месяц на 70 насосов больше, чем было предусмотрено, и на один месяц раньше установленного срока перевыполнило задание на 30 насосов. На протяжении скольких месяцев было предусмотрено выпустить 6000 насосов?

13.178. Два парка, общей площадью 110 га, разбиты на равное количество участков. Участки каждого парка по площади равны между собой, но отличаются от участков другого. Если бы первый парк был разбит на участки такой же площади, как второй, то он имел бы 75 участков, а если бы второй был разбит на такие же участки, как первый, то он содержал бы 108 участков. Определить площадь каждого парка.

13.179. Отец хочет разделить 36 яблок между пятью своими детьми. Половину всех яблок он отдает сыновьям, которые делят их поровну, а другую половину отдает дочерям, которые тоже делят их поровну. Оказалось, что каждая дочь получила на 3 яблока больше, чем каждый сын. Сколько у отца было сыновей и дочерей?

13.180. Беру две дроби, из которых одна вдвое больше другой. Каждую дробь возвожу в квадрат, результаты складываю, получаю некоторую сумму. Теперь каждую из первоначальных дробей возвожу в куб, результаты складываю и замечаю, что опять получилась та же самая сумма. Найдите эту пару дробей.

13.181. Бригада рабочих электролампового цеха должна была сделать за смену 7200 деталей, причем каждый рабочий делал одинаковое количество деталей. Однако в бригаде заболело трое рабочих и поэтому для выполнения всей нормы каждому из оставшихся рабочих пришлось сделать на 400 деталей больше. Сколько рабочих было в бригаде?

13.182. В два сосуда одинакового веса налита вода, причем вес сосуда A с водой составляет $^4/_5$ веса сосуда B с водой. Если воду из сосуда B перелить в сосуд A, то вес его вместе с водой станет в 8 раз больше веса сосуда B. Найти вес сосудов и количество воды в них, зная, что в сосуде B содержится воды на 50 г больше, чем в сосуде A.

13.183. В зале клуба имеется 500 стульев, расположенных рядами по одинаковому числу в каждом ряду. После реконструкции зала в каждом ряду оказалось на 5 стульев больше, чем было, но зато число рядов уменьшилось на 5. В результате общее число мест в зале уменьшилось на одну десятую прежнего количества стульев. Сколько было рядов в зале и сколько стульев было в каждом ряду?

13.184. Если бы ученик правильно перемножил два написанных на доске числа, то получил бы в произведении 4500. Но, переписывая с доски сомножители, в одном из них ученик вместо последней цифры 5 написал цифру 3 и после умножения в результате получил 4380. Какие числа должен был перемножить ученик?

13.185. При испытании двух двигателей было установлено, что первый израсходовал 300 г, а второй 192 г бензина, причем второй работал на 2 ч меньше, чем первый. Первый двигатель затрачивает в час на 6 г бензина больше, чем второй. Какое количество бензина в час расходует каждый из двигателей?

13.186. Бригада каменщиков взялась уложить 432 м^3 кладки, но в действительности на работу вышло на 4 человека меньше. Сколько всех каменщиков в бригаде, если известно, что каждому работавшему каменщику пришлось укладывать на 9 м^3 больше, чем первоначально предполагалось?

13.187. Бригада рабочих должна была изготовить 8000 одинаковых деталей в определенный срок. Фактически эта работа была окончена на 8 дней раньше срока, так как бригада делала ежедневно на 50 деталей больше, чем было намечено по плану. В какой срок должна была быть окончена работа и каков ежедневный процент перевыполнения плана?

13.188. На обработку одной детали рабочий A затрачивает на k мин меньше рабочего B. Сколько деталей обрабатывает каждый из них за t ч работы, если A обрабатывает за это время на n деталей больше, чем B?

13.189. Сумма квадратов корней уравнения x^2-3ax+ $+a^2=0$ равна 1,75. Найти a.

13.190. Кусок платины, плотность которой равна $2{,}15\cdot10^4$ кг/м^3, связан с куском пробкового дерева (плотность $24\cdot10^2$ кг/м^3). Плотность системы равна $48\cdot10^2$ кг/м^3. Какова масса куска дерева, если масса куска платины составляет 86,94 г?

13.191. К материальной точке приложены две силы, угол между которыми равен 30°. Величина одной из приложенных сил в $7\sqrt{3}$ раза больше величины другой, а величина равнодействующей силы на 24 Н больше, чем величина меньшей силы. Определить величину меньшей силы и равнодействующей силы.

13.192. Имеются три сосуда, содержащие неравные количества жидкости. Для выравнивания этих количеств сделано три переливания. Сначала третью часть жидкости перелили из первого сосуда во второй, затем четвертую часть жидкости, оказавшейся во втором сосуде, перелили в третий и, наконец, десятую часть жидкости, оказавшейся в третьем сосуде, перелили в первый. После этого в каждом сосуде оказалось 9 л жидкости. Сколько жидкости было первоначально в каждом сосуде?

13.193. Разведывательный катер подошел к головному кораблю эскадры и получил приказание произвести разведку впереди эскадры по направлению ее движения на расстоянии 70 км. Требуется определить, через сколько времени разведывательный катер вернется к головному кораблю эскадры, продолжающей идти вперед, если известно, что катеру дозволена скорость 28 км/ч, а эскадра должна двигаться со скоростью 14 км/ч.

13.194. Переднее колесо движущейся модели на протяжении 120 м делает на 6 оборотов больше, чем заднее. Если окружность переднего колеса увеличить на $^1/_4$ ее длины, а окружность заднего — на $^1/_5$ ее длины, то на том же расстоянии переднее колесо сделает на 4 оборота больше, чем заднее. Найти длины окружностей переднего и заднего колес.

13.195. Бригада монтеров могла окончить электропроводку в 4 ч дня, прокладывая в час по 8 м. После выполнения половины всего задания один рабочий выбыл из бригады; в связи с этим бригада стала прокладывать в час по 6 м и закончила запланированную на день работу в 6 ч вечера. Сколько метров провода было проложено и за сколько часов?

13.196. Через два часа после выезда с фабрики шофер посмотрел на спидометр и заметил, что проехал только 112 км. Он прикинул мысленно, что если и дальше поедет с той же скоростью, то на 30 мин опоздает с доставкой груза на станцию. Поэтому шофер увеличил скорость и прибыл на станцию даже на 30 мин раньше срока. Определить начальную и последующую скорости движения автомобиля, если расстояние от фабрики до станции по спидометру составляет 280 км.

13.197. В кинозале имеются две двери, широкая и узкая. Через обе двери после сеанса зрители выходят из зала в течение 3 мин 45 с. Если зрителей выпускать через одну широкую дверь, то выход из зала займет времени на 4 мин меньше, чем в том случае, если зрителей выпускать только через одну узкую дверь. Сколько времени требуется для выхода зрителей из кинозала через каждую дверь в отдельности?

13.198. Некоторое вещество впитывает влагу, увеличивая при этом свою массу. Нераздробленного вещества требуется взять на 300 кг больше, чем раздробленного, чтобы впитать 1400 кг влаги. Сколько процентов от массы вещества составляет масса впитанной влаги в случае раздробленного вещества и в случае нераздробленного, если во втором случае это число процентов на 105 меньше, чем в первом?

13.199. На пути от села до поля колесо грузовика делает на 100 оборотов меньше, чем колесо велосипеда, и на 150 оборотов больше, чем гусеница трактора. Найти расстояние между селом и полем, если известно, что длина окружности колеса грузовика составляет $4/3$ от длины окружности колеса велосипеда и на 2 м короче гусеницы трактора.

13.200. Две шкурки ценного меха общей стоимостью в 225 руб. были проданы на международном аукционе с прибылью в 40%. Какова стоимость каждой шкурки отдельно, если от первой было получено прибыли 25%, а от второй 50%?

13.201. Спортивная площадка имеет форму прямоугольника, длина которого на b м больше ширины. Площадка окаймлена дорожкой одинаковой ширины в a м. Каковы размеры спортивной площадки, если ее площадь равна площади окаймляющей ее дорожки?

13.202. Две машинистки должны перепечатать рукопись, состоящую из трех глав, из которых первая вдвое короче второй и втрое длиннее третьей. Работая вместе, машинистки перепечатали первую главу за 3 ч 36 мин. Вторая глава была перепечатана за 8 ч, из которых 2 ч работала только первая машинистка, а остальное время они работали вместе. Какое время потребуется второй машинистке для того, чтобы одной перепечатать третью главу?

13.203. Расстояние между двумя селами равно 10 км. Два человека выходят одновременно из одного села в другое, причем первый идет со скоростью, большей на 3 км/ч, чем второй, и приходит к месту назначения на 3 ч раньше. С какой скоростью идет каждый из них?

13.204. Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 8 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 12 ч скорее, чем второй рабочий, если этот последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая порознь, может выполнить работу?

13.205. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Если затем взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение тех же цифр, то получится первоначальное число. Найти это число.

13.206. Трехзначное число оканчивается цифрой 2. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Найти это число.

13.207. Экспресс проходит путь от Москвы до Ленинграда на 3 ч 30 мин быстрее пассажирского поезда, так как за 1 ч он проходит на 35 км больше. Сколько километров в час проходит каждый из них, если расстояние между Москвой и Ленинградом принять с округлением равным 650 км?

13.208. Некоторое двузначное число в 4 раза больше суммы и в 3 раза больше произведения своих цифр. Найти это число.

13.209. Два тела начали движение одновременно и движутся прямолинейно навстречу друг другу. Одно из них проходит в каждую минуту 7 м, другое в первую минуту прошло 24 м, а в каждую последующую проходит на 4 м меньше, чем в предыдущую. Через сколько минут оба тела встретятся, если первоначальное расстояние между ними было равно 100 м?

13.210. На сколько процентов следует увеличить длину радиуса круга, чтобы площадь стала больше на 96%?

Группа Б

13.211. Цифры некоторого трехзначного числа составляют геометрическую прогрессию. Если в этом числе поменять местами цифры сотен и единиц, то новое трехзначное число будет на 594 меньше искомого. Если же в искомом числе зачеркнуть цифру сотен и в полученном двузначном числе переставить его цифры, то новое двузначное число будет на 18 меньше числа, выраженного двумя последними цифрами искомого числа. Найти это число.

13.212. На покупку велосипедов спортивный клуб выделил n руб. Так как вследствие снижения цен стои-

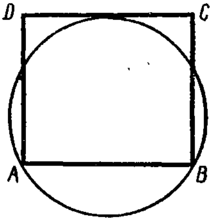

Рис. 13.3

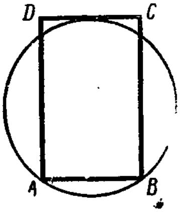

Рис. 13.4

мость каждого велосипеда уменьшилась на a руб., то велосипедов было куплено на b больше, чем предполагалось. Сколько купили велосипедов? Решение исследовать.

13.213. Обычно к выполнению некоторого задания привлекаются одновременно два механизма. Производительность этих механизмов не одинакова и при совместном действии задание выполняется ими за 30 ч. Но на этот раз совместная работа двух механизмов продолжалась только 6 ч, после чего первый механизм был остановлен и всю остальную часть задания выполнил второй механизм за 40 ч. За какое время такое же задание может выполнить каждый механизм, работая отдельно с присущей ему производительностью?

13.214. Согнутые из проволоки окружность и прямоугольник прилажены так, что окружность проходит через две вершины A и B и касается стороны CD (рис. 13.3). Найти отношение сторон прямоугольника, если известно, что его периметр в 4 раза больше радиуса окружности.

13.215. От пункта A вдоль шоссе удаляется гонщик, поддерживающий все время постоянную скорость a км/ч. Спустя 30 мин из того же пункта стартовал второй гонщик с постоянной скоростью 1,25 a км/ч. Через сколько минут после старта первого гонщика был отправлен из того же пункта третий гонщик, если известно, что он развил скорость 1,5 a км/ч и одновременно со вторым гонщиком догнал первого?

13.216. Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 600 км. В то время как первый проходит 250 км, второй проходит 200 км. Найти скорости движения мотоциклистов, считая их движения равномерными, если первый мотоциклист приходит в B на 3 ч раньше, чем второй в A.

13.217. Дорога между поселками A и B сначала имеет подъем, а потом спуск. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью, на a км/ч большей, чем на подъеме, затрачивает на путь от A до B ровно t ч, а на обратный путь от B до A — половину этого времени. Найти скорость велосипедиста на подъеме и на спуске, если расстояние между поселками b км.

13.218. Результат перемножения двух положительных чисел, полученный вычислителем, показался ему сомнительным. Для проверки он решил разделить результат на больший сомножитель. В частном получилось 17 и в остатке 8. Тогда вычислитель понял свою ошибку: оказалось, что число десятков, записанное им в произведении, больше истинного числа десятков на 6. Какие числа перемножал вычислитель, если известно, что их разность равна 36?

13.219. Согнутые из проволоки окружность и прямоугольник прилажены так, что окружность проходит через две вершины A и B и касается стороны CD (рис. 13.4). Диаметр окружности равен $2R$, а периметр прямоугольника в 3 раза больше диаметра. Найти стороны прямоугольника и изобразить заданную конструкцию в соответствии с полученными результатами.

13.220. Юноша пошел к железнодорожной станции, до которой от его дома было 10,5 км. Через полчаса из того же дома вслед за юношей по той же дороге вышел его брат, который, идя со скоростью 4 км/ч, догнал юношу, передал ему забытую им вещь, тут же повернул обратно и пошел с прежней скоростью. С какой скоростью шел юноша, если известно, что шел он всю дорогу равномерно, а его брат вернулся домой в тот момент, когда юноша подошел к станции?

13.221. Из пунктов A и C в пункт B выехали одновременно два всадника и несмотря на то, что пункт C отстоял от пункта B на 20 км дальше, чем пункт A от пункта B, прибыли в пункт B одновременно. Найти расстояние от пункта C до пункта B, если всадник, выехавший из C, проезжал каждый километр на 1 мин 15 с скорее, чем всадник, выехавший из пункта A, и всадник, выехавший из A, приехал в пункт B через 5 ч.

13.222. Расстояние между станциями A и B равно 103 км. Из A в B вышел поезд и, пройдя некоторое расстояние, был задержан, а потому оставшийся путь до B проходил со скоростью, на 4 км/ч большей прежней. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что оставшийся путь до B был на 23 км длиннее пути, пройденного до задержки, и на прохождение пути после задержки было затрачено на 15 мин больше, чем на прохождение пути до задержки.

13.223. Пункт C расположен в 12 км от пункта B вниз по течению. Рыбак отправился на лодке в пункт C из пункта A, расположенного выше пункта B. Через 4 ч он прибыл в C, а на обратный путь затратил 6 ч. В другой раз рыбак воспользовался моторной лодкой, увеличив тем самым собственную скорость передвижения относительно воды втрое, и дошел от A до B за 45 мин. Требуется определить скорость течения, считая ее постоянной.

13.224. Юноша, возвращаясь на велосипеде из отпуска, проехал 246 км и употребил на этот путь на один день больше половины числа дней, оставшихся после этого до конца отпуска. Теперь у юноши две возможности проехать остальные 276 км так, чтобы прибыть домой точно к сроку: проезжать ежедневно на h км больше, чем первоначально, или сохранить прежнюю норму ежедневного пути, превысив ее лишь один раз — в последний день пути — на $2h$ км. За сколько дней до конца отпуска отправился юноша домой, если известно, что искомое число дней — целое?

13.225. Некоторый заказ выполняют в мастерской № 1 на 3,6 ч дольше, чем в мастерской № 2, и на 10 ч дольше, чем в мастерской № 3. Если при тех же условиях работы мастерские № 1 и № 2 объединятся для выполнения заказа, то срок его выполнения будет таким же, как в одной мастерской № 3. На сколько часов больше или меньше одного рабочего дня длится выполнение указанного заказа в мастерской № 3? Рабочий день — 7 ч.

13.226. Рукопись в 60 листов отдана двум машинисткам. Если первая машинистка начнет переписывать рукопись через 2,5 ч после второй, то каждая из них перепишет по половине рукописи. Если же обе машинистки начнут работать одновременно, то через 5 ч останутся непереписанными 33 листа. За какое время может переписать рукопись каждая машинистка в отдельности?

13.227. Двум рабочим была поручена работа. Второй приступил к работе на час позже первого. Через 3 ч после того, как первый приступил к работе, им осталось выполнить $^9/_{20}$ всей работы. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить свою работу?

13.228. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того, как первый проработал 2 ч, а второй 5 ч, оказалось, что они выполнили половину всей работы. Проработав совместно еще 3 ч, они установили, что им осталось выполнить 0,05 всей работы. За какой промежуток времени каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

13.229. Найти четыре числа, образующих пропорцию, если известно, что сумма крайних членов равна 14, сумма средних членов равна 11, а сумма квадратов таких четырех чисел равна 221.

13.230. Есть только три положительных двузначных числа, обладающих следующим свойством: каждое число равно неполному квадрату суммы своих цифр. Требуется найти два из них, зная, что второе число на 50 единиц больше первого.

13.231. Сплавили два сорта чугуна с разным процентным содержанием хрома. Если одного сорта взять в 5 раз больше другого, то процентное содержание хрома в сплаве вдвое превысит процентное содержание хрома в меньшей из сплавляемых частей. Если же взять одинаковое количество обоих сортов, то сплав будет содержать 8% хрома. Определить процентное содержание хрома в каждом сорте чугуна.

[13.232.] От станции железной дороги до пляжа 4,5 км. Мальчик и рейсовый автобус одновременно отправились от станции к пляжу. Через 15 мин мальчик встретил автобус, возвращающийся от пляжа, и успел пройти еще 9/28 км от места первой встречи с автобусом, как его догнал тот же автобус, который дошел до станции и опять отправился к пляжу. Найти скорости мальчика и автобуса, считая, что они постоянны и ни мальчик, ни автобус в пути не останавливались, но у пляжа и на станции автобус делал остановки продолжительностью в 4 мин каждая.

13.233. Сержант возвращался из отпуска на велосипеде. На первом участке пути, составляющем 246 км, он проезжал в среднем за каждый день на 15 км меньше, чем проезжал за каждый день на последнем участке пути, составляющем 276 км. В часть он прибыл точно в срок — к концу последнего дня отпуска. Известно также, что на преодоление первого участка пути ему потребовалось одним днем больше половины числа дней, оставшихся после этого до конца отпуска. За сколько дней до конца отпуска отправился сержант к месту службы?

13.234. Имелось два сплава меди с разным процентным содержанием меди в каждом. Число, выражающее в процентах содержание меди в первом сплаве, на 40 меньше числа, выражающего в процентах содержание меди во втором сплаве. Затем оба эти сплава сплавили вместе, после чего содержание меди составило 36%. Определить процентное содержание меди в первом и во втором сплавах, если известно, что в первом сплаве меди было 6 кг, а во втором — 12 кг.

13.235. На рис. 13.5 изображены окружность, касающаяся двух взаимно перпендикулярных осей Ox и Oy, и прямая AB, касающаяся окружности в точке P. Если площадь образовавшегося треугольника OAB в $6/\pi$ раз превышает площадь круга, то во сколько раз каждый из отрезков OA и OB превышает радиус круга? (На рисунке $|OA|>|OB|$.) В каком отношении точка P делит отрезок AB?

13.236. Мастер дает сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. К концу первых двух часов он выиграл 10% от числа всех играемых партий, а 8 противников свели вничью свои партии с мастером. За следующие два часа мастер выиграл 10% партий у оставшихся противников, две партии проиграл, а остальные 7 партий закончились вничью. На скольких досках шла игра?

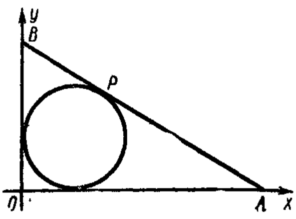

Рис. 13.5

13.237. Задумано целое положительное число. К его цифровой записи приписали справа какую-то цифру. Из получившегося нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность оказалась в 8 раз больше задуманного числа. Какое число задумано и какая цифра была приписана?

13.238. Стрелку в тире были предложены следующие условия: каждое попадание в цель вознаграждается пятью жетонами, но за каждый промах отбирается три жетона. Стрелок был не очень метким. После последнего (n-го) выстрела у него не осталось ни одного жетона. Из скольких выстрелов состояла серия и сколько было удачных выстрелов, если $10<n<20$?

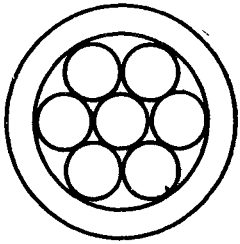
Рис. 13.6

13.239. К цифровой записи некоторого задуманного двузначного числа, оканчивающегося нулем, приписали справа это же число. Образовалось новое число. Из этого числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на 4% от квадрата задуманного числа; в частном получилась половина задуманного числа, а в остатке задуманное число. Какое число задумано?

13.240. В плоское кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями, вложено семь равных соприкасающихся дисков (рис. 13.6). Площадь кольца равна сумме площадей всех семи дисков. Доказать, что ширина кольца равна радиусу одного диска.

13.241. К цифровой записи некоторого задуманного положительного числа приписали справа еще какое-то положительное однозначное число. Из получившегося таким образом нового числа вычли квадрат задуманного числа. Эта разность оказалась больше задуманного числа во столько раз, сколько составляет дополнение приписанного числа до одиннадцати. Требуется доказать, что так будет получаться тогда и только тогда, когда приписанное число равно задуманному.

13.242. Два одинаковых бассейна одновременно начали наполняться водой. В первый бассейн поступает в час на 30 м^3 больше воды, чем во второй. В некоторый момент в двух бассейнах вместе оказалось столько воды, сколько составляет объем каждого из них. После этого через 2 ч 40 мин наполнился первый бассейн, а еще через 3 ч 20 мин — второй. Сколько воды поступало в час в каждый бассейн?

13.243. Одна из трех бочек наполнена водой, а остальные пустые. Если вторую бочку наполнить водой из первой бочки, то в первой останется $^1/_4$ часть бывшей в ней воды. Если затем наполнить третью бочку из второй, то во второй останется $^2/_9$ количества содержавшейся в ней воды. Если, наконец, из третьей бочки вылить воду в пустую первую, то для ее наполнения недостанет 50 ведер. Определить емкость каждой бочки.

13.244. Два шарика помещены в цилиндрическую банку, диаметр которой 22 см (рис. 13.7). Если влить в

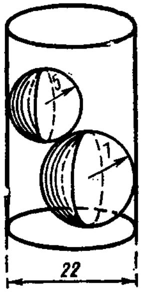

Рис. 13.7

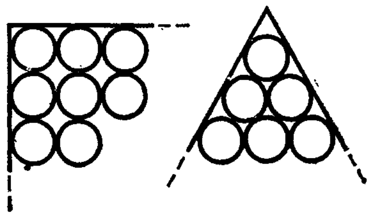

Рис. 13.8

банку 5 л воды, то покроются ли полностью водой оба шарика, диаметры которых 10 см и 14 см?

13.245. Цистерну в течение пяти часов наполнили водой. При этом в каждый следующий час поступление воды в цистерну уменьшалось в одно и то же число раз по сравнению с предыдущим. Оказалось, что в первые четыре часа было налито воды вдвое больше, чем в последние четыре часа. Каков объем цистерны, если известно еще, что за первые два часа в нее было налито 48 м^3 воды?

13.246. Квадрат и равносторонний треугольник заполнены одинаковым количеством равных кругов, касающихся друг друга и сторон этих фигур. Узнать, сколько кругов для этого потребовалось, если к стороне треугольника примыкает на 14 кругов больше, чем к стороне квадрата (рис. 13.8).

13.247. Предлагается решить задачу, имеющуюся в одном из сочинений Исаака Ньютона. Хозяйка налила в дырявый бидон керосин. Сколько керосина (в процентах) выливалось из бидона в час, если через два часа в нем осталось на 9% меньше того количества керосина, которое в нем было через час после наполнения?

13.248. Имеются два одинаковых куска разных тканей. Стоимость всего первого куска на 12,6 руб. больше стоимости второго. Стоимость четырех метров ткани из первого куска на 13,5 руб. превышает стоимость трех метров ткани из второго куска. Покупательница приобрела 3 м ткани из первого куска и 4 м ткани из второго куска и заплатила за все 38 руб. 25 коп. Сколько метров ткани было в каждом из этих кусков? Какова стоимость одного метра ткани каждого куска?

13.249. Было намечено разделить премию поровну между наиболее отличившимися сотрудниками предприятия. Выяснилось, однако, что сотрудников, достойных премии, на 3 человека больше, чем предполагалось. В таком случае каждому пришлось бы получить на 4 руб. меньше. Профсоюз и администрация нашли возможность увеличить общую сумму премии на 90 руб., в результате чего каждый премированный получил 25 руб. Сколько человек получили премию?

13.250. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые 3 дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 м^3 сверх плана, поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготовлять по плану?

13.251. Часовая и минутная стрелки совпадают в полночь, и начинается новый день. В котором часу этого нового дня впервые вновь совпадут часовая и минутная стрелки, если допустить, что стрелки часов движутся без скачков?

13.252. Дежурный монтер спустился по движущемуся вниз эскалатору метро. Весь его путь от верхней площадки до нижней продолжался 24 с. Затем он поднялся и в том же темпе снова спустился вниз, но теперь уже по неподвижному эскалатору. Известно, что спуск продолжался 42 с. За сколько секунд спустился бы человек по движущемуся вниз эскалатору, стоя на ступеньке?

13.253. Для гидродинамических исследований приготовлена небольшая модель канала. К этой модели подведено несколько труб одинакового сечения, вводящих воду и несколько труб другого, но тоже одинакового сечения, предназначенных для удаления воды. Если сразу открыть 4 вводящих и 3 выводящих трубы, то через 5 ч в модели прибавится 1000 м^3 воды. Если одновременно открыть на 2 ч две вводящих и две выводящих трубы, то увеличение объема воды составит 180 м^3. Сколько воды пропускает за час одна вводящая и сколько пропускает одна выводящая труба?

13.254. Первым проснулся на турбазе путешественник *А* и отправился по намеченному маршруту. Второй путешественник *Б* отправился следом за *А* только спустя 45 мин. Намереваясь догнать путешественника *А* и зная, что он всегда держит скорость v_1 км/ч, путешественник *Б* поехал со скоростью v_2 км/ч $(v_2>v_1)$. Через сколько минут после момента отправления путешественника *А* с турбазы должен выехать *В*, чтобы догнать *А* одновременно с *Б*, если известно что *В* поедет со скоростью v_3 км/ч $(v_3>v_2)$?

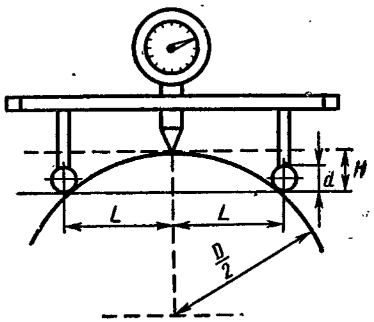

Рис. 13.9

13.255. Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку длиной 50 м, немедленно повернуть обратно и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый, через 5 с — второй, еще через 5 с — третий. В некоторый момент времени, еще не достигнув конца дорожки, пловцы оказались на одном расстоянии от старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в 4 м от конца дорожки, а первого в 7 м от конца дорожки. Найти скорость третьего пловца.

13.256. Прибор, применяемый для определения диаметра крупной детали $(D>2$ м), указывает высоту H сегмента при постоянном расстоянии 2 L между центрами опорных шариков прибора (рис. 13.9). Требуется выразить формулой соответствие между искомым диаметром D детали и измеряемой высотой H ее сегмента при постоянных L и d, где d — диаметр каждого из опорных шариков.

13.257. Из города *А* в город *В*, расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через один час после этого из *А* на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, в который первый достиг B. Какова скорость первого курьера, если скорость второго равна 50 км/ч?

13.258. Поезд идет от станции A к станции B. На некотором участке пути, примыкающем к станции B, производились ремонтные работы и на этом участке поезду разрешена скорость, составляющая только $1/n$ часть первоначальной скорости, вследствие чего поезд пришел на станцию B с опозданием на a ч. На другой день фронт ремонтных работ приблизился к станции B на b км и при тех же условиях поезд опоздал на c ч. Найти скорость поезда.

13.259. Пароход через 2 ч после отправления от пристани A, потерпев аварию, останавливается на час и затем продолжает путь с 0,8 первоначальной скорости, вследствие чего опаздывает прибытием к пристани B на 3,5 ч. Если бы авария произошла на 180 км далее, то при тех же остальных условиях пароход опоздал бы в B на 1,5 ч. Найти расстояние AB.

13.260. Две материальные частицы, находясь на расстоянии 295 м одна от другой, одновременно начали двигаться навстречу друг другу. Первая частица продвигается равномерно со скоростью 15 м/с, а вторая в первую секунду продвинулась на 1 м, а в каждую следующую на 3 м больше, чем в предыдущую. На какой угол переместится секундная стрелка часов за время, прошедшее от начала движения частиц до их встречи?

13.261. В полдень из пункта A в пункт B вышел пешеход и выехал велосипедист, и в полдень же из B в A выехал верховой. Все трое отправились в путь одновременно. Через 2 ч встретились велосипедист и верховой на расстоянии 3 км от середины AB, а еще через 48 мин встретились пешеход и верховой. Определить скорость каждого и расстояние AB, если известно, что пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

13.262. Известно, что свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Если два тела начали падать с одной высоты спустя 5 с одно после другого, то через какое время они будут друг от друга на расстоянии 220,5 м?

13.263. Путь от A до B пассажирский поезд проходит на 3 ч 12 мин быстрее товарного. За это время, что товарный поезд проходит путь от A до B, пассажирский проходит на 288 км больше. Если скорость каждого увеличить на 10 км/ч, то пассажирский пройдет от A до B на 2 ч 24 мин быстрее товарного. Определить расстояние от A до B.

13.264. Для того чтобы подняться на обычном лифте на последний этаж восьмиэтажного дома (высота 33 м) при двух шестисекундных промежуточных остановках, нужно затратить столько же времени, сколько его потребуется, чтобы подняться на лифте высотного здания при одной семисекундной промежуточной остановке на 20-й этаж (высота 81 м). Определить подъемную скорость лифта в м/с в высотном здании, зная, что она превышает скорость обычного лифта на 1,5 м/с, но не достигает 5 м/с.

13.265. По внутренней области угла 60° прямолинейно движется материальная точка. Выйдя из вершины этого угла, она через некоторый промежуток времени оказалась на расстоянии a от одной стороны угла и на расстоянии b от другой стороны. Далее она изменила направление движения и по кратчайшему пути просто упала на ту сторону, к которой она была ближе. Найти длину пути, пройденного точкой, если $a<b$.

13.266. Два спортсмена выбегают одновременно — первый из A в B, второй из B в A, бегут с неодинаковыми, но постоянными скоростями и встречаются на расстоянии 300 м от A. Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них тотчас поворачивает назад и встречает другого на расстоянии 400 м от B. Найти длину AB.

13.267. Одновременно начали гонки с одного старта в одном и том же направлении два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, другой со скоростью 60 км/ч. Через полчаса с того же старта и в том же направлении отправился третий гонщик. Найти скорость третьего гонщика если известно, что он догнал первого гонщика на 1 ч 15 мин позже, чем второго.

13.268. Солдат стреляет в мишень, отстоящую от него на d м. Наблюдатель, находящийся на расстоянии a м от стрелка и b м от мишени, слышит одновременно звук выстрела и звук удара пули в мишень. Найти скорость пули, если скорость звука равна v м/с.

13.269. На пристани с теплохода сошли два пассажира и направились в один и тот же поселок. Один из них первую половину пути шел со скоростью 5 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 4 км/ч. Другой шел первую половину времени со скоростью 5 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 4 км/ч и пришел в поселок на одну минуту раньше первого. За какое время каждый из них прошел весь путь и каково расстояние между пристанью и поселком?

13.270. В Одессу должны прибыть два теплохода с разрывом в один час. Оба теплохода идут с одинаковой скоростью, но обстоятельства сложились так, что первый теплоход опоздал бы на t_1 мин, а второй на t_2 мин. Получив по радио указание о необходимости прибыть без опоздания, оба капитана одновременно увеличили скорости теплоходов: первый — на v_1 км/ч, второй — на v_2 км/ч, в результате чего оба теплохода прибыли в Одессу точно по расписанию. С какой скоростью шли теплоходы до получения сигнала по радио?

13.271. Трасса соревнований по велосипеду представляет собой контур прямоугольного треугольника с разностью катетов в 2 км. При этом его гипотенуза пролегает по проселочной дороге, а оба катета — по шоссе. Один из участников прошел отрезок по проселочной дороге со скоростью 30 км/ч, а оба отрезка по шоссе за то же время со скоростью 42 км/ч. Определить протяженность трассы.

13.272. От почтамта A отправилась автомашина по направлению к почтовому отделению B. Через 20 мин за ней выезжает мотоциклист со скоростью 60 км/ч. Догнав автомашину, мотоциклист передал шоферу пакет и тотчас повернул обратно. Автомашина прибыла в почтовое отделение B в тот момент, когда мотоциклист оказался на половине пути от места встречи с автомашиной до почтамта. Определить скорость автомашины, если путь от почтамта A до почтового отделения B составляет 82,5 км.

13.273. Мяч катится перпендикулярно боковой линии футбольного поля. Предположим, что, двигаясь равномерно замедленно, мяч прокатился в первую секунду 4 м, а в следующую секунду на 0,75 м меньше. Футболист, находящийся первоначально в 10 м от мяча, побежал в направлении движения мяча, чтобы догнать его. Двигаясь равномерно ускоренно, футболист пробежал в первую секунду 3,5 м, а в следующую секунду на 0,5 м больше. За какое время футболист догонит мяч и успеет ли он догнать до выхода мяча за боковую линию, если к линии поля футболисту надо пробежать 23 м?

13.274. По графику поезд всегда проходит перегон в 120 км с одной и той же скоростью. Вчера поезд прошел половину перегона с этой скоростью и вынужден был остановиться на 5 мин. Чтобы вовремя прибыть в конечный пункт перегона, машинисту на второй половине перегона пришлось увеличить скорость поезда на 10 км/ч. Сегодня повторилась остановка поезда на середине того же перегона, только задержка продолжалась 9 мин. С какой скоростью машинист вел поезд сегодня на второй половине перегона, если опять в конечный пункт этого перегона поезд прибыл по расписанию?

13.275. Расстояние между городом A и станцией F по железной дороге равно 185 км. Пригородный электропоезд идет от A первые 40 км в гору, следующие 105 км по ровному месту и остальные 40 км снова в гору. В гору поезд идет на 10 км/ч медленнее, чем по ровному месту. На этом пути имеются станции B, C, D и E на расстоянии 20, 70, 100 . 161 км от A, и на каждой из них поезд стоит 3 мин. Найти время прихода поезда в B, C, D и E, если известно, что он вышел из A в 8 ч и пришел в F в 10 ч 22 мин того же дня.

13.276. По шоссе от завода C до станции B железной дороги на 28 км дальше, чем от станции A той же дороги. Расстояние от A до B через C на 2 км больше, чем длина участка AB железной дороги. Доставка тонны груза из C в A стоит 90 коп. и по железной дороге из A в B — 2 руб. Перевозка одной тонны груза на один километр автотранспортом стоит на 3,5 коп. дороже, чем по железной дороге. Определить расстояния AC, BC, AB.

13.277. Учебный самолет летел со скоростью 220 км/ч. Когда ему осталось пролететь на 385 км меньше, чем он пролетел, самолет увеличил скорость до 330 км/ч. Средняя скорость на всем пути оказалась равной 250 км/ч. Какое расстояние пролетел самолет?

13.278. Пассажир поезда знает, что на данном участке пути скорость этого поезда 40 км/ч. Как только мимо окна начал проходить встречный поезд, пассажир пустил секундомер и заметил, что встречный поезд проходил мимо окна в течение 3 с. Определить скорость встречного поезда, если известно, что его длина 75 м.

13.279. Два контрольных пункта делят лыжную трассу на три участка одинаковой длины. Известно, что путь, состоящий из первого и второго участков вместе, лыжник прошел со средней скоростью a м/мин; путь, состоящий из второго и третьего участков вместе, этот лыжник прошел со средней скоростью b м/мин. Средняя скорость лыжника на втором участке была такой же, как средняя скорость, подсчитанная для первого и третьего участков вместе. Какова средняя скорость лыжника на всей трассе в целом и на каждом участке этой трассы в отдельности? Провести анализ условий существования реального решения задачи.

13.280. Для контроля за движением лыжника тренер разделил трассу на три участка равной длины. Стало известно, что средние скорости лыжника на этих трех отдельных участках были различными. При этом на пробег первого и второго участков вместе лыжнику потребовалось 40,5 мин, а на пробег второго и третьего — 37,5 мин. Выяснилось также, что средняя скорость лыжника на втором участке была такой же, как средняя скорость, подсчитанная для первого и третьего участков вместе. За какое время лыжник достиг финиша?

13.281. На старте два велосипедиста. Раздался сигнал, и оба велосипедиста помчались в одном направлении. Следом за ними, через 10 мин с того же старта начал путь третий велосипедист. Сначала он обогнал первого велосипедиста, после чего находился в пути еще 20 мин, пока догнал второго. Начиная от самого старта и до конца пути каждый велосипедист шел с постоянной скоростью: a км/ч — первый велосипедист и b км/ч — второй. Найти скорость третьего велосипедиста.

13.282. Связист получил задание прибыть в пункт B из пункта A в назначенный срок. Расстояние между A и B равно s км. Когда связист добрался до пункта C, расположенного точно на полпути от A до B, то рассчитал, что опоздает на 2 ч, если будет продолжать движение с той же скоростью. Если же в пункте C он отдохнет 1 ч, а на оставшейся половине всего пути будет перемещаться со скоростью, на v км/ч большей, чем вначале, то прибудет в B в назначенный срок. Какой срок был назначен связисту?

13.283. Из двух пунктов, расстояние между которыми 28 км, выходят одновременно навстречу друг другу два пешехода. Если бы первый не задержался на 1 ч на расстоянии 9 км от места своего отправления, то встреча пешеходов произошла бы на полпути. После остановки первый пешеход увеличил скорость на 1 км/ч, и встреча произошла на расстоянии 4 км от того места, где задержался первый. Найти скорости пешеходов.

13.284. Найти скорость и длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

13.285. На участке шоссе, лишенном перекрестков, протяженностью в 10 км, автобус делает остановки только для входа и выхода пассажиров. Всего он делает 6 промежуточных остановок, затрачивая на каждую из них по одной минуте, а в движении он находится всегда с одной и той же скоростью. Если бы автобус двигался без остановок, то тот же путь он прошел бы со скоростью, превышающей среднюю скорость своего движения с остановками на 5 км/ч. Сколько минут автобус находится в движении на этом участке шоссе?

13.286. Шхуна идет от пункта A до пункта B по озеру, а от B до пункта C вверх по реке, и затем отправляется обратно. Скорость шхуны относительно неподвижной воды все время поддерживается равной c км/ч. От A до C шхуна идет α ч, а обратный путь занимает β ч, причем на путь от C до B шхуне нужно втрое меньше времени, чем на путь от B до A. Найти расстояния AB и BC.

13.287. Два цеха молокозавода пастеризуют и разливают молоко по бутылкам. Оба цеха совместно должны обработать определенное количество литров молока поровну. Второй цех приступил к выполнению задания на a рабочих дней позже, но обрабатывал ежедневно на m л молока больше, чем первый. Прошло еще $5a/9$ рабочих дней от начала совместной работы этих цехов и осталась невыполненной только $^1/_3$ часть всего задания. Сколько рабочих дней потребовалось для выполнения всего задания, если работа была окончена одновременно и каждый цех обработал половину заданного количества литров молока?

13.288. Мастеру и его ученику было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как мастер проработал 7 ч, а ученик 4 ч, оказалось, что они выполнили $^5/_9$ всей работы. Проработав совместно еще 4 ч, они установили, что остается выполнить $^1/_{18}$ всей работы. За какой промежуток времени выполнил бы всю работу ученик, работая один?

13.289. Из автоцистерны сливали бензин в подземное хранилище по двум шлангам разного сечения. Первоначально a мин бензин поступал через оба шланга, затем первый шланг был отключен, и весь оставшийся бензин прошел через второй шланг за b мин. Но, если бы после первоначальных a мин был отключен не первый, а второй шланг, то весь оставшийся бензин прошел бы через первый шланг за c мин. Сколько времени продолжалось бы переливание всего бензина из автоцистерны в хранилище только через один первый шланг?

13.290. Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба в течение $^1/_4$ времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем действовала вторая труба также в течение $^1/_4$ времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить $^{11}/_{24}$ полной вместимости бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

13.291. Если выполнение заказа по набору нескольких книг возложить на одного из трех наборщиков, то первый справится с работой на 10 ч быстрее, а третий на 6 ч быстрее, чем второй. Если же одну из заказанных книг будет набирать первый наборщик, а другую книгу одновременно будет набирать второй, то за 9 ч они наберут столько страниц, сколько за 10 ч наберут второй и третий, работая вместе при тех же условиях. Сколько времени потребуется каждому наборщику для набора всех заказанных книг при раздельной работе?

13.292. Два «механических крота» разной мощности при одновременной работе с разных концов тоннеля могли бы прорыть его за пять дней. В действительности оба «крота» были применены последовательно с одной стороны тоннеля, причем первый прорыл одну треть, а второй остальные две трети его длины. На выполнение всей работы ушло при этом десять дней. За сколько дней каждый «крот», работая самостоятельно, мог бы прорыть тоннель?

13.293. В бассейн проведены две трубы, подающая и отводящая, причем через первую бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $^1/_3$ бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

13.294. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей; после того как первый проработал a ч, а второй 0,6 a ч, оказалось, что они выполнили $5/n$ всей работы. Проработав совместно еще 0,6 a ч, они установили, что им осталось изготовить еще $1/n$ часть всей партии деталей. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, выполнит всю работу? Число n натуральное; найти его.

13.295. Водоем снабжен двумя каналами. Через первый вода выливается, через второй вливается. Узнать, за сколько часов через первый канал пройдет n л воды, если известно, что через второй вольется в два раза больше тогда, когда он будет открыт на a ч меньше того времени, за которое через первый канал пройдет n л. Если оба канала открыть одновременно, то в каждый час в водоеме прибывает a л воды.

13.296. Два экскаваторщика должны выполнить некоторую работу. После того как первый проработал 15 ч, начинает работать второй и заканчивает эту работу за 10 ч. Если бы при раздельной работе первый выполнил $^1/_6$ часть, а второй $^1/_4$ часть всей работы, то для ее окончания потребовалось бы еще 7 ч их совместной работы. За сколько часов может выполнить работу каждый экскаваторщик в отдельности?

13.297. Длина круговой дорожки ипподрома равна b км. Из двух наездников A и B, начавших скачки одновременно, наездник A прибыл к финишу на 2 мин раньше. В другой раз наезднику B удалось увеличить скорость на c км/ч, в то время как наездник A не достиг прежней скорости на c км/ч и потому B прибыл к финишу на 2 мин раньше, чем A. Найти скорости наездников в первом заезде.

13.298. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше, чем второй. Если начнут они пробег с общего старта в одном направлении, то еще раз сойдутся через 720 с, Какую часть длины всей дорожки пробегает в секунду каждый бегун?

13.299. По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Полный оборот одна из них совершает на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать в одну минуту на два оборота больше. Пусть в начале движения лучи, направленные из центра окружности к этим точкам, сливались. Вычислить, какова величина угла между лучами будет через 1 с.

13.300. Меньшая дуга между точками A и B, находящимися на окружности, равна 150 м. Если точки начнут двигаться друг к другу навстречу по меньшей дуге, то встретятся через 10 с, а если по большой дуге, то встреча произойдет через 14 с. Определить скорости движения точек и длину окружности, если известно, что точка A может обежать всю окружность в то время, как B пройдет только 90 м.

13.301. В некотором механизме три шестеренки разных диаметров связаны между собой так, что большая из них касается обеих меньших, причем все три шестеренки вместе имеют 60 зубцов. Когда большая шестеренка до полных четырех оборотов не доходит на 20 зубцов, вторая и третья делают соответственно 5 и 10 полных оборотов. Сколько зубцов имеет каждая шестеренка в отдельности?

13.302. По окружности длиной 60 м равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 5 с скорее другой. При этом совпадения точек происходят каждый раз через одну минуту. Определить скорости точек.

13.303. Два колеса соединены бесконечным ремнем; меньшее из них делает на 300 оборотов в минуту больше второго. Большое колесо делает 10 оборотов в промежуток времени, на одну секунду больший, чем время десяти оборотов меньшего колеса. Сколько оборотов в минуту делает каждое колесо?

13.304. Две сцепляющиеся шестерни A и B насажены плотно: первая на вал O_1, а вторая на вал O_2. Шестерня A имеет на 10 зубцов больше, чем B. При некоторой скорости вращения вала O_1 вал O_2 делает 63 оборота в минуту. Если шестерни поменять местами, то при той же скорости вала O_1 вал O_2 делает 28 оборотов. Определить число зубцов каждой шестерни.

13.305. Найти два двузначных числа A и B по следующим условиям. Если число A написать впереди записи числа B и полученное четырехзначное число разделить на число B, то в частном получится 121. Если же число B написать впереди числа A и полученное четырехзначное число разделить на A, то в частном получится 84 и в остатке 14.

13.306. Поезд через 2 ч после отправления остановился на 30 мин. На оставшемся до станции участке пути производились ремонтные работы и поезду разрешена была скорость, составляющая $1/3$ часть первоначальной скорости, вследствие чего поезд пришел на станцию с опозданием на 1 ч 10 мин. На другой день остановка поезда произошла на 14 км ближе к конечной станции и при тех же условиях опоздание сократилось до 50 мин. Определить расстояние между станциями и скорость поезда.

13.307. Найти трехзначное число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию, если известно, что после его уменьшения на 495 получается число, записанное такими же цифрами, какими записано искомое число, но расположенными в обратном порядке; если цифры числа, получившегося после вычитания, уменьшить (слева направо) соответственно на 1, на 1 и на 2, то получится арифметическая прогрессия.

13.308. Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

13.309. Имеются два сплава золота и серебра. В одном сплаве количества этих металлов находятся в отношении 1 : 2, в другом — 2 : 3. Сколько граммов нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 19 г сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 7 : 12?

13.310. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять металла каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с содержанием 30% никеля?

13.111. Для приготовления уксуса определенной крепости в сосуд, содержащий 12 л уксусной эссенции, долили 20 л воды. В другом сосуде содержалось 13 л более крепкого уксуса: на 9 л уксусной эссенции приходилось только 4 л воды. Сколько литров уксуса надо перелить из первого сосуда во второй, чтобы уравнять во втором сосуде содержание уксусной эссенции и воды?

13.312. При разгрузке баржи сначала 2 ч действовали 4 подъемных крана одинаковой мощности. Затем добавочно ввели в действие еще 2 крана меньшей, но одинаковой мощности. После этого для окончания разгрузки потребовалось еще 3 ч. Если бы все эти краны начали работать одновременно, то разгрузка была бы произведена за 4,5 ч. Если бы один кран большей и один кран меньшей мощности работали совместно, то за какое время они разгрузили бы баржу?

13.313. Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на 1. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше $^1/_4$; если от числителя и знаменателя первоначальной дроби отнять по 3, то значение дроби будет равно $^1/_{12}$. Найти эту дробь.

13.314. Два зубчатых колеса находятся в сцеплении. У колеса A — 12 зубьев, а у колеса B — 54. Сколько оборотов сделает каждое колесо до того, как оба они вернутся в исходное положение?

13.315. Первоначальная себестоимость единицы продукции равнялась 50 руб. В течение первого года производства она повысилась на некоторое число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной себестоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равна 48 руб. Определить проценты повышения и снижения себестоимости единицы продукции.

13.316. Предприятие увеличивало объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции возрос в два раза.

13.317. Один турист вышел в 6 ч, а второй навстречу ему в 7 ч. Они встретились в 8 ч и, не останавливаясь, продолжили путь. Сколько времени затратил каждый из них на весь путь, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 28 мин позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый? Считается, что каждый шел без остановок с постоянной скоростью.

13.318. На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз на 15%. На другой продукт, бывший до снижения в одной цене с первым, снизили цену один раз на x%. Каким должен быть x, чтобы после всех указанных снижений цен оба продукта были вновь в одной цене?

13.319. Вкладчику на его сбережения через год сберкасса начислила 6 руб. процентных денег. Добавив 44 руб., вкладчик оставил деньги еще на год. По истечении года вновь было произведено начисление процентов и теперь вклад вместе с процентами составил 257 руб. 50 коп. Какая сумма первоначально была положена на сберкнижку и был ли это вклад обыкновенный (2%-ный) или срочный (3%-ный)?

13.320. Двадцать процентов от общего объема раствора составляют примеси. Каково наименьшее число фильтров, через которые нужно пропустить раствор, чтобы окончательное содержание примесей не превышало 0,01%, если каждый фильтр поглощает 80% примесей? (Известно, что $\lg 2 \approx 0{,}30$.)

13.321. Сумма двух трехзначных чисел, написанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке, равна 1252. Найти эти числа, если сумма цифр каждого из них равна 14, а сумма квадратов цифр равна 84.

13.322. Пчелы, перерабатывая цветочный нектар в мед, освобождают его от значительной части воды. Исследования показали, что нектар обычно содержит около 70% воды, а полученный из него мед содержит только 17% воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меда?

13.323. Для изготовления пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припек на эту муку. Для изготовления ржаного хлеба взято на 10 кг муки больше, т. е. столько килограммов, сколько процентов составляет припек на ржаную муку. Сколько килограммов взято той и другой муки, если всего выпечено 112,5 кг хлеба?

13.324. Инженер и его семья в первую неделю отпуска израсходовали на несколько рублей меньше, чем $^3/_5$ количества взятых с собой денег; во вторую неделю $^1/_4$ остатка и еще 3 руб.; в третью неделю $^2/_5$ нового остатка и еще 1 руб. 20 коп., после чего осталось $^6/_{35}$ от количества взятых денег. Известно также, что количество денег, оставшихся неизрасходованными к концу первой, второй и третьей недель, убывало в арифметической прогрессии. Сколько денег было израсходовано за три недели отпуска?

13.325. Можно изготовить 9000 деталей на нескольких новых станках одинаковой конструкции и одном станке старой конструкции, работающем вдвое медленнее каждого из новых станков. А можно и этот старый станок заменить новым станком той же конструкции, что и остальные. Тогда по второму варианту на каждом станке изготовлялось бы на 200 деталей меньше, чем на одном новом станке по первому варианту. Сколько всего было станков?

13.326. Из A в B через равные промежутки времени отправляются три автомашины. В B они прибывают одновременно, затем выезжают в пункт C, лежащий на расстоянии 120 км от B. Первая машина прибывает туда через час после второй. Третья машина, прибыв в C, сразу поворачивает обратно и в 40 км от C встречает первую машину. Определить скорость первой машины, считая, что по всей трассе скорость каждой машины была неизменной.

13.327. По трем сосудам распределено 24 л жидкости. Из первого сосуда переливают в два другие столько, сколько в каждом из них было. Затем из второго переливают в два другие столько, сколько в каждом из них оказалось после первого переливания. Потом из третьего переливают в остальные столько, сколько в каждом оказалось после второго переливания. В результате во всех сосудах образовались одинаковые количества жидкости. Сколько жидкости было в каждом сосуде первоначально?

13.328. Бригада рыбаков намеревалась выловить в определенный срок 1800 ц рыбы. Треть этого срока был шторм, вследствие чего плановое задание ежедневно недовыполнялось на 20 ц. Однако в остальные дни бригаде удавалось ежедневно вылавливать на 20 ц больше дневной нормы, и плановое задание было выполнено за один день до срока. Сколько центнеров рыбы намеревалась вылавливать бригада рыбаков ежедневно?

13.329. Два рабочих были приняты на один и тот же срок выполнения сезонной работы с разной оплатой каждому за один день труда. Первый работал на a дней меньше срока и получил r руб., а второй проработал на a дней больше срока и получил s руб. Если бы первый работал столько дней, сколько второй, а второй столько дней, сколько первый, то они получили бы поровну. Определить установленный срок работы?

13.330. Два грузовых автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 6 ч. Второй автомобиль задержался в гараже, и когда он прибыл на место погрузки, первый перевез уже $^3/_5$ всего груза; остальную часть груза перевез второй автомобиль, и весь груз был перевезен таким образом за 12 ч. Сколько времени нужно было каждому автомобилю в отдельности для перевозки груза?

13.331. Из металла определенной марки изготовлено несколько шариков, равных по массе, для подшипников и несколько поршневых колец, тоже равных по массе. Если бы число, выражающее массу каждого шарика в граммах, было на две единицы меньше числа сделанных колец, а число, выражающее массу каждого кольца в граммах, на две единицы больше числа сделанных шариков, то число, выражающее их общую массу, превышало бы удвоенную разность числа колец и шариков на 800, а если бы число, выражающее массу каждого предмета в граммах, было равно числу сделанных предметов того же рода, то общая их масса равна была бы 881 г. Сколько было сделано шариков и колец?

13.332. Три мальчика *А*, *Б* и *В* условились, что при совместном путешествии на катере каждый побывает в должности капитана, причем величина времени пребывания каждого в этой должности будет пропорциональна числу очков, которые он получит, участвуя в географической викторине. *А* получил тремя очками больше, чем *В*; *Б* и *В* вместе получили 15 очков. Число выражающее десятую часть всего времени путешествия (в часах), на 25 больше числа очков, полученных мальчиками. Сколько времени были капитанами *А* и *В*, если *Б* исполнял эту обязанность 160 ч?

13.333. Целлулоидный шарик, ударяясь о некоторую гладкую упругую поверхность, отскакивает и поднимается на $^3/_5$ высоты, с которой падал. В первый раз шарик упал с высоты 5 м. После какого по счету отскока он окажется на высоте немного меньшей 0,65 м? (Для определенности считать эту заданную высоту равной 648 мм.)

13.334. В ателье поступило по одному куску черной, зеленой и синей ткани. Хотя зеленой ткани было на 9 м меньше, чем черной, и на 6 м больше, чем синей, стоимость кусков была одинаковой. Известно также, что стоимость 4,5 м черной ткани равна стоимости 3 м зеленой и 0,5 м синей вместе. Сколько было метров ткани в каждом куске?

13.335. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 8.

Если число, составленное из тех же цифр, но записанных в обратном порядке, разделить на произведение цифр, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найти это число.

13.336. Уголь, привезенный на склад, предназначен для двух заводов. На первый завод начали доставлять уголь с 1-го июня по m т ежедневно, не исключая воскресений, на второй завод — с 8-го июня по n т ежедневно, не исключая воскресений. К концу дня 16-го июня на складе осталась половина первоначального количества угля. Какого числа был вывезен со склада весь уголь, если оба завода получили угля поровну?

13.337. На предприятие, где изготовляют растворимый кофе, привезли в последних числах мая партию зерен кофе для переработки. Один механизм, перемалывающий зерна, был приведен в действие в понедельник 1-го июня и перемалывал ежедневно по m кг. С 6-го июня к выполнению этой работы подключили второй механизм, который перемалывал ежедневно по n кг. К концу рабочего дня 10-го июня осталась не перемолотой только половина первоначального количества зерен. Когда была закончена переработка всей партии зерен, если известно, что оба механизма перемололи поровну и, кроме воскресений, других перерывов в работе не имели?

13.338. Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

13.339. Нужно было взять несколько литров жидкости при температуре $a°$ и другое количество литров той же жидкости при температуре $b°$, чтобы получить температуру смеси в $c°$. Однако второй жидкости было взято столько, сколько предполагалось взять первой, и наоборот. Какая получилась температура смеси?

13.340. Известно, что разность переменных величин z и y пропорциональна величине x, а разность величин x и z пропорциональна величине y. Коэффициент пропорциональности один и тот же и равен положительному целому числу k. Некоторое значение величины z в $^5/_3$ раза больше разности соответствующих значений x и y. Найти числовое значение коэффициента k.

13.341. Из сосуда, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили водой; потом опять вылили столько же литров смеси; тогда в сосуде осталось 24 л чистой кислоты. Емкость сосуда 54 л. Сколько кислоты вылили в первый и второй раз?

13.342. При рытье колодца за первый метр глубины уплатили 2 руб., а за каждый следующий на 3 руб. больше, чем за предыдущий. Сверх того за весь колодец дополнительно было уплачено 80 руб. Средняя стоимость метра глубины оказалась равной 22 руб. 50 коп. Определить глубину колодца, если известно, что она выражается целым числом.

13.343. Есть предположение, что выражение

$$(x+a)\ (x+2a)\ (x+3a)\ (x+4a)+a^4$$

является квадратом трехчлена вида $x^2+px+qa^2$. Как можно проверить это утверждение и найти коэффициенты p и q?

13.344. Величины двух сил, действующих на материальную точку под прямым углом, и величина их равнодействующей составляют арифметическую прогрессию. Определить, в каком отношении находятся величины сил.

13.345. Будем полагать, что стрелки часов движутся без скачков. Узнать, через сколько минут после того, как часы показывали 8 ч, минутная стрелка догонит часовую стрелку.

13.346. Объем вещества A составляет половину суммы объемов веществ B и C, а объем вещества B составляет $^1/_5$ часть суммы объемов веществ A и C. Найти отношение объема вещества C к сумме объемов веществ A и B.

13.347. Найти два числа по следующим условиям: сумма их равна 1244; если в конце обозначения первого числа приписать цифру 3, а в конце обозначения второго числа отбросить цифру 2, то образуются два равных числа.

13.348. От станции A по направлению к станции B отошел пассажирский поезд. Через a ч от станции B по направлению к станции A отошел поезд «Стрела». Поезда встретились на станции C. После встречи пассажирский поезд шел b ч, а поезд «Стрела» шел c ч. Сколько времени потребовалось каждому из этих поездов на весь путь между станциями A и B? Предполагается, что скорость поездов постоянна на всем пути.

13.349. От почты A до поселка B надо пройти 9 км.

Пока у почтальона не появился мотоцикл, он весь путь туда и обратно, не задерживаясь в поселке, проходил за 3 ч 41 мин. Дорога из A в B идет сначала в гору, потом по ровному месту и затем под гору. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту, если в гору почтальон идет со скоростью 4 км/ч, по ровному месту 5 км/ч, а под гору 6 км/ч?

13.350. Два автомобилиста встретились на полпути между городами A и B. При встрече выяснилось, что первый из A выехал раньше, чем второй из B, на столько часов, сколько составит половина того времени (тоже в часах), которое прошло бы до их встречи при одновременном выезде из тех же пунктов, по той же дороге, с теми же скоростями, постоянными на всем пути. Во сколько раз второй автомобилист ехал быстрее первого?

13.351. Дорога от почты A до поселка B идет сначала в гору на протяжении 2 км, потом по ровному месту 4 км и затем под гору 3 км. Пока у почтальона не появился мотоцикл, он от почты A до поселка B доходил за 2 ч 16 мин, а обратно — за 2 ч 24 мин. Естественно, что в гору он идет медленнее, а под гору быстрее, чем по ровному месту. Если бы конечный пункт его пути был расположен по той же дороге, но вдвое ближе к почте A, то на весь путь туда и обратно почтальону было бы достаточно 2 ч 19 мин. Сколько километров в час проходит почтальон всякий раз, когда он идет: а) в гору, б) по ровному месту, в) под гору?

13.352. Навстречу движущемуся трамваю шла девушка — знакомая юноши, сидевшего у окна трамвая. Через 8 с после того, как она поравнялась с окном, юноша вышел из трамвая и пошел следом за ней. Сколько прошло времени с этого момента до того, как он догнал девушку? Скорость юноши в 2 раза больше скорости девушки и в 5 раз меньше скорости трамвая.

13.353. При умножении двух положительных чисел, из которых одно на 75 больше другого, по ошибке получилось произведение на 1000 меньше истинного. Вследствие этого, деля (при проверке) ошибочное произведение на меньший из множителей, получили в частном 227 и в остатке 113. Найти оба числа.

13.354. При перемножении двух чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив цифру десятков произведения на 4. При делении полученного произведения на меньший множитель для проверки ответа он получил в частном 39, а в остатке 22. Найти множители.

13.355. Автомобиль, пройдя путь от A до B, равный 300 км, повернул назад и через 1 ч 12 мин после выхода из B увеличил скорость на 16 км/ч. В результате на обратный путь он затратил на 48 мин меньше, чем на путь от A до B. Найти первоначальную скорость автомобиля.

13.356. Расстояние между пунктами A и B равно 308 м. Из пункта A по направлению к B движется точка, которая в первую секунду проходит 15 м, а в каждую следующую секунду на 1 м меньше. Из пункта B в противоположном направлении движется точка, которая в первую секунду проходит 20 м, а в каждую следующую на 3 м больше. На каком расстоянии от пункта A произойдет встреча, если точка, вышедшая из пункта B, начала двигаться на 3 с позднее точки, вышедшей из пункта A?

13.357. Велосипедист проехал 96 км на два часа быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 км больше, чем предполагал проезжать за 1 ч 15 мин. С какой скоростью он ехал?

13.358. Найти шестизначное целое число, начинающееся с цифры 1 и такое, что если переставить эту цифру в конец, то получится число в три раза больше искомого числа.

13.359. Найти два двузначных числа, обладающих следующим свойством: если к большему искомому числу приписать справа нуль и за ним меньшее число, а к меньшему числу приписать справа большее число и затем нуль, то из образовавшихся таким образом двух пятизначных чисел первое, будучи разделено на второе, дает в частном 2 и в остатке 590. Кроме того, известно, что сумма, составленная из удвоенного большего искомого числа и утроенного меньшего, равна 72.

13.360. Велосипедист отправляется из A в B. Расстояние от A до B равно 60 км; скорость велосипедиста постоянна. Не задерживаясь в B, он едет обратно с той же скоростью, но через час после выезда из B делает остановку на 20 мин. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 км/ч. В каких границах заключена скорость v велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он потратил времени не более чем на путь от A до B?

13.361. Сосуд емкостью в 8 л наполнен смесью кислорода и азота, причем на долю кислорода приходится 16% емкости сосуда. Из этого сосуда выпускают некоторое количество смеси и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять добавляют столько же азота. В новой смеси кислорода оказалось 9%. Какое количество литров смеси каждый раз выпускалось из сосуда?

13.362. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении $1:2$, а другой содержит те же металлы в отношении $2:3$. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении $17:27$?

13.363. Некоторый сплав содержит металлы A и B в отношении $m:n$, другой — те же металлы в отношении $p:q$. Какие количества первого и второго сплавов нужно взять, чтобы получить 1 кг третьего сплава с равным содержанием металлов A и B?

13.364. Для отправки в магазин теннисные мячи стандартного размера укладывались на фабрике поровну и в один слой в коробки двух видов — с квадратным дном и с треугольным равносторонним дном. При этом наибольшее число мячей, уложенных в один ряд треугольной коробки, на 2 больше, чем в каждом ряду квадратной коробки. Сколько мячей отправлено магазину, если все они были уложены в 100 коробок обоих видов?

13.365. Население города ежегодно увеличивается на $^1/_{50}$ наличного числа жителей. Через сколько лет население утроится?

13.366. Мяч упал с высоты 2 м 43 см и, ударяясь о землю, отскакивает вновь, поднимаясь всякий раз на $^2/_3$ высоты, с которой он в очередной раз падал. После скольких ударов мяч поднимется на высоту 32 см?

13.367. В заезде на одну и ту же дистанцию участвовали два автомобиля и мотоцикл. Второму автомобилю на всю дистанцию потребовалось минутой больше, чем первому автомобилю. Первый автомобиль двигался в 4 раза быстрее мотоцикла. Какую часть дистанции в минуту проходил второй автомобиль, если он проходил в минуту на $^1/_6$ часть дистанции больше, чем мотоцикл, а мотоцикл прошел дистанцию быстрее, чем за 10 мин?

13.368. Основание степени увеличили в k раз, а показатель степени уменьшили во столько же раз, отчего сама степень не изменилась. Найти основание степени, обладающей таким свойством.

13.369. Расстояние между станциями A и B равно 360 км. В одно и то же время из A и из B навстречу друг другу выходят два поезда. Поезд, вышедший из A, прибывает на станцию B не ранее чем через 5 ч. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы второй поезд раньше, чем через 2 ч после своего выхода из A. Скорость какого поезда больше?

13.370. На расстоянии 199,5 м от окна будки параллельно плоскости окна проходит горизонтальный железнодорожный путь. Обходчик, находясь в будке на расстоянии 0,5 м от окна, видит в течение 20 с, как проходит весь поезд (от локомотива до последнего вагона). Длина поезда 100 м и идет он с постоянной скоростью. Вычислить скорость поезда.

Группа В

13.371. В куске сплава массой 6 кг содержится медь. В куске другого сплава массой 8 кг содержится медь в ином процентном отношении, чем в куске первого сплава. От первого куска отделили некоторую часть и от второго куска отделили часть, вдвое большую по массе, чем от первого куска. Каждую из отделенных частей сплавили с остатком другого куска, после чего получили два новых сплава с одинаковым процентным содержанием меди. Какова масса каждой из частей, отделенных от кусков первоначальных сплавов?

13.372. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Бриллиант массой p карат был разбит на две части, после чего его стоимость уменьшилась в k раз. Найти массу частей, на которые был разбит бриллиант (1 карат=0,2 г). Доказать, что наибольшая потеря в стоимости бриллианта будет в том случае, когда обе его частицы равны по массе.

13.373. Куплено несколько килограммов товара двух сортов: первого сорта на 45 руб. и второго на 20 руб. Первого сорта куплено на 1 кг больше. Стоимость килограмма товара первого сорта на a руб. выше стоимости килограмма второго сорта. Сколько килограммов товара каждого сорта куплено? Определить число решений в зависимости от возможных значений a.

13.374. Уголь, добываемый в пункте A, продается по q руб. за тонну, а добываемый в пункте B — на $p\%$ дороже. Пункты A и B соединяет дорога длиной s км. В какой зоне этой дороги AB расположены потребители угля, для которых закупка и доставка угля из пункта B обходится дешевле, чем из пункта A, если перевозка 1 т угля на расстояние 1 км обходится в r руб.? В каком месте дороги AB расположено предприятие, расходы которого на потребление угля не зависят от выбора пункта снабжения A или B? Исследовать возможные случаи.

13.375. Окружность касается двух взаимно перпендикулярных осей Ox и Oy и прямая AB касается окружности в точке P (рис. 13.10). Радиус окружности равен R, а площадь треугольника OAB в k/π раз больше площади круга. Требуется найти длины отрезков OA и OB, а также установить допустимые числовые значения k для любого положения точки P на окружности, при котором координаты точек A и B остаются положительными и большими, чем R.

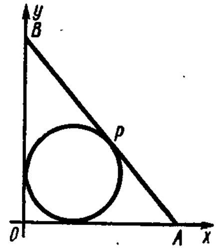

Рис. 13.10

13.376. Несколько рабочих выполняют работу за 14 дней. Если бы их было на 4 человека больше и каждый работал в день на 1 ч дольше, то та же работа была бы сделана за 10 дней. Если бы их было еще на 6 человек больше и каждый работал бы еще на 1 ч в день дольше, то эта работа была бы сделана за 7 дней. Сколько было рабочих и сколько часов в день они работали?

13.377. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить всю работу за 7,5 ч; первый, третий и пятый вместе — за 5 ч; первый, третий и четвертый вместе — за 6 ч, а второй, четвертый и пятый вместе — за 4 ч. За какой промежуток времени выполнят эту работу все 5 человек, работая вместе?

13.378. На соревнованиях авиамоделей с моторчиками лучшими оказались две модели. При встречном ветре первая модель продержалась в воздухе на m мин меньше второй, но пролетела на h м дальше. Скорость ветра c м/мин, но на продолжительность полета модели ветер не влияет; от ветра зависит только дальность полета. Предполагается, что собственная скорость каждой модели все время постоянна. Какая из этих моделей пролетит большее расстояние при безветренной погоде?

13.379. Одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу снялись с якоря плот (по течению) и лодка. Через 5 ч они встретились и продолжали движение без остановок. Лодка приплыла в пункт A и, повернув обратно, догнала плот в пункте B. Предполагается, что собственная скорость лодки все время одинакова. Закончат ли плот и лодка свое движение за 12,5 ч?

13.380. Из пункта A отправилась моторная лодка вверх по Волге, а из пункта B одновременно вышел плот по течению. Через a ч они встретились и далее двигались без остановок. Дойдя до пункта B, лодка, не задерживаясь, повернула обратно и догнала плот в пункте A. Предполагается, что собственная скорость лодки была все время неизменной. Сколько времени находились в плавании плот и лодка?

13.381. Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку в 50 м, немедленно повернуть обратно и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый, через a с — второй, еще через a с — третий. В некоторый момент времени, еще не достигнув конца дорожки, пловцы оказались на одном расстоянии от старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в s м от конца дорожки, а первого — в r м от конца дорожки. Найти скорости первого и третьего пловцов и установить связь в виде неравенств между параметрами r и s так, чтобы задача имела решение.

13.382. Согнутые из проволоки окружность и прямоугольник приложены так, что окружность проходит через две вершины A и B и касается стороны CD (рис. 13.11). Диаметр окружности равен 0,2 м, а периметр прямоугольника в k раз больше диаметра. Найти стороны прямоугольника только для таких целых значений k, которые возможны.

13.383. Колонна автомобилей, движущихся равномерно с одной и той же скоростью, имеет длину 5 км. В последнем автомобиле находится начальник колонны, а рядом мотоциклист. По поручению начальника мотоциклист увеличил скорость, поравнялся с головной машиной, передал водителю пакет, мгновенно развернулся и с той же скоростью, с какой ехал вперед, поехал обратно на свое место. Начальник сообщил мотоциклисту, что пока тот выполнял поручение, колонна продвинулась вперед на 5 км. Сколько километров проехал мотоциклист?

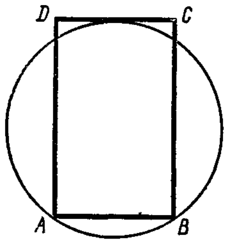

Рис. 13.11

13.384. Из пунктов A и B одновременно выезжают два автомобиля и встречаются в 12 ч дня. Если скорость первого удвоить, а скорость второго оставить первоначальной, то встреча произойдет на 56 мин раньше. Если же скорость второго удвоить, а скорость первого оставить первоначальной, то они встретятся на 65 мин раньше. Определить время встречи в том случае, когда скорость обоих была бы удвоенной.

13.385. Из аэропорта к центру города вышел автомобиль и одновременно из центра города в аэропорт вышел автобус-экспресс. Когда первый прошел половину пути, второму осталось до конца маршрута 19,2 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось до конца маршрута 12 км. Сколько километров остается пройти автобусу после того, как автомобиль закончит свой маршрут? Предполагается, что скорости автомобиля и автобуса постоянны на всем пути.

13.386. Расстояние между двумя точками равно d. Под действием некоторых сил обе точки начинают равномерное движение навстречу одна другой. Чтобы они встретились на середине пути, нужно первой точке начать движение на t единиц времени раньше второй. Если же обе точки начнут сближение одновременно, то через T единиц времени расстояние между ними составит k-ю часть ($k>1$) первоначального расстояния. Найти скорость движения каждой точки.

13.387. Два брата имели билеты на стадион, расположенный в 10 км от их дома. Вначале они намеревались добраться до стадиона пешком, но изменили намерение и решили воспользоваться своим велосипедом, договорившись, что один отправится на велосипеде, а другой одновременно с ним — пешком. Проехав часть пути, первый оставит велосипед, а второй, дойдя до оставленного велосипеда, дальше поедет на нем и догонит первого у входа на стадион. Сколько времени выигрывают братья при этом по сравнению с первоначальным намерением идти весь путь пешком, если каждый из них на велосипеде преодолевает каждый километр на 12 мин быстрее, чем пешком?

13.388. Спортсмен, тренируясь в быстрой ходьбе вдоль шоссе, заметил, что каждые 6 мин его догоняет троллейбус и каждые

3 мин проходит встречный троллейбус. Требуется найти, через какие промежутки времени отправляются троллейбусы с конечных пунктов и во сколько раз медленнее троллейбуса шел спортсмен, если допустить, что в обе стороны троллейбусы отправляются через одинаковые промежутки времени, идут без остановок с постоянной и одинаковой скоростью. Спортсмен также идет без остановок с постоянной скоростью (рис. 13.12, где AB — график движения спортсмена, прямые $M_1N_1 \parallel M_2N_2$ и $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2$ — графики движения каких-либо последовательно идущих один за другим троллейбусов попутно спортсмену и навстречу ему).

13.389. По расписанию учебно-тренировочных занятий сначала из пункта A должен выехать один связист, а через 6 ч,— второй связист с такой скоростью, чтобы нагнать первого в 180 км от пункта A. Но в момент отправления первый связист получил распоряжение ехать со скоростью, на a км/ч большей, чем намечалось первоначально. Второму же связисту не разрешалось увеличивать скорость, намеченную расписанием, поэтому чтобы точно выполнить задание, ему пришлось выехать из пункта A на 3 ч раньше, чем намечалось. Сколько времени будет в пути каждый связист? Требуется, кроме того, доказать, что задача имеет смысл только при $a < 30$.

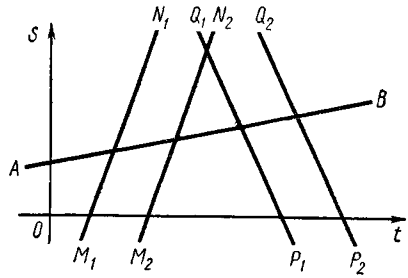

Рис. 13.12

13.390. Два поезда выходят одновременно из A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии p км от B. Через t ч после встречи второй поезд, миновав пункт A, находился в q км от него, а первый в это время, миновав пункт B, находился от второго поезда на расстоянии в два раза большем, чем расстояние между A и B. Найти скорости поездов и расстояние между A и B. Поезда не имели остановок и скорости их считаются постоянными.

13.391. Два приятеля собрались на охоту. Один из них живет в 46 км от охотничьей базы, другой, имеющий «Москвича», в 30 км от базы — между этой базой и домом своего приятеля. Они тронулись в путь одновременно, причем владелец «Москвича» поехал навстречу своему приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома. Если бы пешеход вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше владельца «Москвича», то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода. Какова скорость автомобиля? Скорости движения пешехода и автомашины считать постоянными.

13.392. Поезд был задержан на станции отправления на 1 ч 42 мин. Получив сигнал отправления, машинист повел состав по такому графику: на участке, составляющем 0,9 всего пути от станции отправления до станции назначения, он поддерживал скорость на 20% выше обычной и 0,1 пути вел состав со скоростью на 25% выше обычной. В результате поезд прибыл на станцию назначения без опоздания. Какова продолжительность движения этого поезда между станциями при обычной скорости?

13.393. На шоссе последовательно расположены пункты D, A, C и B. Из A и B одновременно выехали мотоциклист и велосипедист в пункты C и D соответственно. Встретившись в E, они обменялись машинами и каждый продолжал свой путь. В результате первый затратил на поездку от A до C 6 ч, а второй затратил на поездку от B до D 12 ч. Определить длину пути AB, если известно, что каждый едущий на мотоцикле развивает скорость 60 км/ч, а на велосипеде — 25 км/ч и, кроме того, средняя скорость движения первого на пути AC равна средней скорости движения второго на пути BD.

13.394. На беговой дорожке одновременно стартовали два конькобежца на дистанцию s м. Когда победитель достиг финиша, другому осталось бежать еще целый круг. Определить длину беговой дорожки, если победитель, пробегая каждый круг на a с быстрее побежденного, закончил дистанцию на t мин. Считается, что скорости спортсменов сохранялись постоянными на всей дистанции.

13.395. Вместимости трех сосудов A, B, C, каждый из которых имеет форму куба, относятся, как $1:8:27$, а объемы налитой в них воды — как $1:2:3$. После переливания части воды из сосуда A в сосуд B и из сосуда B в сосуд C получили во всех трех сосудах слой воды одинаковой глубины. Затем перелили $128\frac{4}{7}$ л воды из сосуда C в сосуд B, а после этого из сосуда B в сосуд A столько, что глубина воды в сосуде A стала вдвое больше, чем в сосуде B. При этом оказалось, что в сосуде A имеется теперь на 100 л воды меньше, чем было первоначально. Сколько воды было первоначально в каждом сосуде?

13.396. Соревнуются три бригады лесорубов. Первая и третья бригады обработали древесины в 2 раза больше, чем вторая, а вторая и третья — в 3 раза больше, чем первая. Какая бригада победила в этом соревновании?

13.397. Два человека одновременно начали спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое быстрее другого. Один из них насчитал 60 ступенек, а второй — 40. Сколько ступенек пришлось бы им отшагать по неподвижному эскалатору?

13.398. Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму до конца пути осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому до конца пути осталось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?

13.399. Три космических корабля проходят с постоянными, но различными скоростями прямолинейный участок AB пространства. Сначала точку A прошел первый корабль, а 5 мин спустя — в том же направлении — второй и третий. Через некоторое время произошло сближение третьего корабля с первым, а еще через 10 мин и второй космический корабль сблизился с первым. После сближения корабли продолжали движение с прежними скоростями. За какое время первый корабль пройдет расстояние AB, если второй прошел это расстояние за 1 ч, а третий — за 40 мин?

13.400. К берегу водохранилища подошли трое: A, B и C. A отправился на противоположный берег вплавь со скоростью v км/ч. Одновременно отправились B и C на моторной лодке со скоростью $10\,v$ км/ч. Через некоторое время C решил остаток пути преодолеть вплавь и поплыл с той же скоростью, что и A. В тот же момент B

повернул назад, чтобы взять в лодку A. A быстро садится в лодку и продолжает путь вместе с B. На противоположном берегу все трое оказываются одновременно. Определить время переправы, если известно, что ширина водохранилища равна b км (скорость течения предполагается равной нулю).

13.401. Между пунктами A и B, удаленными друг от друга на 3,01 м, совершает колебательное движение материальная частица m_1. Скорость ее постоянна и на конечных пунктах она не задерживается. Одиннадцать секунд спустя после выхода частицы m_1 из пункта A, из пункта B начинает двигаться другая частица m_2 тоже с постоянной, но меньшей скоростью. Эта частица, двигаясь в направлении пункта A, дважды встречается с частицей m_1, а именно через 10 и 45 с после выхода второй частицы. Определить скорости обеих частиц.

13.402. Самоходный каток, употребляемый для ремонта дорог, в состоянии укатывать полосу шириной в 0,85 м, причем каждая следующая полоса перекрывает предыдущую на четверть ее ширины. С какой скоростью должен двигаться этот каток, чтобы за время, не большее 6 ч и не меньшее 5 ч, можно было дважды провести укатку участка шоссе длиной 750 м и шириной 6,5 м?

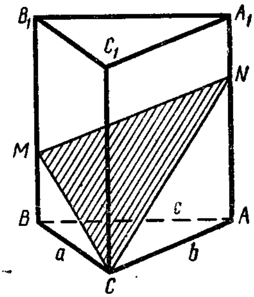

Рис. 13.13

13.403. Из аэропорта к центру города выехал автомобиль и одновременно из центра города в аэропорт выехал автобус-экспресс. Когда автомобиль проехал половину пути, автобусу осталось до конца маршрута 19,2 км, а когда автобус проехал половину пути, автомобилю осталось до конца маршрута 12 км. Найти отношение скоростей автомобиля и автобуса, если эти скорости на всем пути постоянны.

13.404. Две точки A и B, первоначальное расстояние между которыми равно a, одновременно начали двигаться по разным сторонам прямого угла к его вершине с одной и той же постоянной скоростью v. Точка B достигает вершины на t единиц времени раньше, чем точка A (все измерения выполнены в одной системе единиц). Определить, сколько времени двигалась точка A. Если заданы только v и t, то какое значение надо придать величине a, чтобы искомое время приняло наименьшее из возможных его значений?

13.405. Три совхоза расположены не на одной прямой линии. Расстояние от первого до третьего через второй вчетверо длиннее прямого пути между ними; расстояние от первого до второго через третий на a км длиннее прямого пути; расстояние от второго до третьего через первый равно 85 км. В каком интервале находятся все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение совхозов не на одной прямой линии? Вычислить расстояние между совхозами при $a=5$.

13.406. Имеется брусок в форме прямой треугольной призмы (рис. 13.13). Непосредственным измерением получены размеры сторон основания: a, b и c. На боковых ребрах призмы надо наметить точки M и N так, чтобы при распиливании бруска по линиям CM и CN в сечении получился равносторонний треугольник CMN. Найти размеры отрезков AN и BM, если, конечно, возможно такое сечение.

13.407. Из двух пунктов A и B одновременно выехали два инспектора к месту происшествия, в пункт C. Первый инспектор примчался в пункт C через a мин. Если второй инспектор будет стремиться попасть из пункта B в пункт C одновременно с первым, то ему придется на проезд каждого километра затрачивать на c мин меньше, чем первому, так как расстояние от B до C на b км больше расстояния от A до C. На каком расстоянии от пункта A случилось происшествие?

13.408. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 4 ч после встречи велосипедист, ехавший из A, прибыл в B, а через 9 ч после встречи велосипедист, ехавший из B, прибыл в A. Сколько часов был в пути каждый велосипедист?

13.409. Два прямолинейных железнодорожных пути пересекаются под прямым углом. К месту пересечения приближаются по этим путям два поезда: один со станции, находящейся в 40 км от места пересечения путей, другой со станции, находящейся в 50 км от того же пункта. Движение обоих поездов равномерное. Первый — со скоростью 800 м/мин, второй — со скоростью 600 м/мин. Остановка поездов в пункте пересечения путей не предполагается. Через какое время, считая с момента одновременного отправления, поезда были на наименьшем расстоянии друг от друга? Каково это наименьшее расстояние?

13.410. К цветущей яблоне полетел шмель со скоростью v_1 м/мин. Одновременно к другой яблоне полетела пчела со скоростью v_2 м/мин. При этом шмелю нужно было преодолеть расстояние в $2a$ м, а пчеле — расстояние в $2b$ м. Предположим, что траектории их полета — взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке, делящей пополам и путь шмеля, и путь пчелы. Найти формулу, выражающую зависимость расстояния y между шмелем и пчелой от времени x их полета. Установить момент, когда в полете шмеля и пчелы расстояние между ними достигает наименьшего значения? Исследовать, пролетит ли пчела или шмель точку пересечения их траекторий к моменту, когда будет достигнуто наименьшее расстояние между шмелем и пчелой.

13.411. Два велосипедиста выезжают одновременно из пункта A с различными (но для каждого постоянными) скоростями и едут к пункту B. Достигнув его, они тотчас же едут обратно. Первый велосипедист, ехавший быстрее второго, на обратном пути встретил второго на расстоянии a км от B; затем, достигнув A, едет снова по направлению к B и, пройдя k-ю часть пути AB, встречает второго велосипедиста, возвращающегося из B. Найти расстояние от A до B.

13.412. Два поезда, длиной в 490 м и 210 м, равномерно движутся навстречу друг другу по параллельным путям. Машинист одного из них заметил встречный состав на расстоянии 700 м; после этого через 28 с поезда встретились. Определить скорость (км/ч) каждого поезда, если известно, что один из них проезжает мимо светофора на 35 с дольше другого.

13.413. Кортеж автомобилей с космонавтами равномерно движется по проспекту со скоростью v км/ч. Протяженность кортежа постоянно сохраняется равной m м. Букет цветов, брошенный из окна дома, попал в коляску мотоциклиста, ехавшего сзади кортежа. Мотоциклист проехал вперед, передал букет космонавту, находившемуся в первом автомобиле, и тотчас отправился обратно. На проезд туда и обратно вдоль двигающегося кортежа мотоциклисту потребовалось t мин. Вычислить скорость мотоциклиста, если она на всем пути была одинакова.

13.414. На станции сошли с поезда два рыбака и направились к озеру по одной дороге первоначально с одной скоростью. Известно, что один из них первую половину пути прошел в полтора раза скорее, чем вторую половину пути. Другой шел первую половину времени со скоростью, в полтора раза большей, чем вторую половину времени, и пришел к озеру на 1 мин раньше первого. За какое время каждый из рыбаков дошел от станции до озера?

13.415. Арбузы, привезенные на базу, предназначены для двух магазинов. Первый магазин сразу приступил к перевозке арбузов и перевозил их ежедневно одинаковыми весовыми порциями. Второй магазин приступил к перевозке арбузов на a дней позже и также перевозил их ежедневно одинаковыми, но иными, чем первый магазин, весовыми порциями. При этих условиях, через b дней, прошедших от начала перевозочных операций, на базе осталась половина первоначального количества арбузов. За сколько дней были вывезены все арбузы с базы, если перевозка закончилась одновременно и вес арбузов, полученных первым магазином, равен весу арбузов, полученных вторым магазином?

13.416. В бригаде землекопов каждый работает ежедневно по одинаковому числу часов. Известно, что производительность труда одинакова у всех рабочих бригады и при этом бригада может вырыть канаву для укладки кабеля за 6 дней. Но еще до начала работы выяснилось, что рабочий день сокращается на 1 ч, а состав бригады уменьшается на 5 человек. В таком случае канава может быть вырыта за 9 дней. В действительности эту канаву рыли 12 дней, так как рабочий день был сокращен не на час, а на два часа и два человека не вышли на работу по болезни. Сколько рабочих было в бригаде первоначально и сколько часов в день они работали?

13.417. Три экскаватора производят работу. Если эту работу будет выполнять один первый, то он кончит работу на a дней позже, чем при работе всех экскаваторов вместе. Если же эту работу будет выполнять второй, то он кончит ее на b дней позже, чем все вместе, а если третий, то ему потребуется в c раз больше времени, чем всем экскаваторам вместе. За сколько дней выполняет работу каждый из них в отдельности? Какие числовые значения может принимать c?

13.418. Имеется n мензурок с жидкостью. Из первой мензурки перелили $1/n$ часть имеющейся там жидкости во вторую мензурку, затем из второй мензурки $1/n$ часть оказавшейся там после переливания из первой мензурки жидкости перелили в третью мензурку и т. д. Наконец, из n-й мензурки перелили $1/n$ часть оказавшейся в ней после переливания из предыдущей мензурки жидкости снова в первую мензурку. После этого в каждой мензурке оказалось по a см^3 жидкости. Сколько первоначально было жидкости в каждой мензурке?

13.419. Для наполнения водой бассейна были поставлены два насоса. Один первый насос может наполнить бассейн на 8 ч скорее, чем один второй. Сначала был открыт только один второй насос на время, равное двойному количеству времени, которое потребовалось бы для наполнения бассейна при одновременном действии обоих насосов. Затем открыли также первый насос и через 1,5 ч после того, как был открыт первый насос, бассейн наполнился водой. За сколько часов каждый из насосов, работая порознь, может наполнить бассейн?

13.420. Пройдя через пористый фильтрующий материал, жидкость равномерной струей вливается в сорокаведерную бочку и может выливаться через кран, имеющийся в дне бочки. Если этот кран открыт, то приток и отток жидкости таковы, что за каждые 4 мин в бочке убавляется одно ведро. За какое время отфильтрованная жидкость наполнит пустую бочку при закрытом нижнем кране, если известно, что для этого потребуется тремя минутами менее того времени, за которое открытый нижний кран способен пропустить 66 ведер?

13.421. Партия одинаковых деталей обрабатывалась на трех станках разных конструкций в такой последовательности: сначала действовал только первый станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на втором и третьем станках, затем действовал только второй станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на первом и третьем станках. Остальная часть партии деталей была обработана на третьем станке в течение стольких часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на первом и втором станках. Во сколько раз быстрее была бы выполнена эта работа, если бы действовали совместно все три станка?

13.422. Сначала катер шел a км по озеру, а затем половину этого расстояния по реке, впадающей в озеро. Весь рейс продолжался один час. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки c км/ч. Решение исследовать.

13.423. Из Москвы в город N пассажир может отправиться поездом. В этом случае он в пути пробудет 20 ч. Если же он дождется отправления самолета (а ждать придется более 5 ч после отправления поезда), то пассажир доберется до города N через 10 ч, включая и время ожидания. Во сколько раз скорость самолета превышает скорость поезда, если известно, что самолет окажется над этим поездом через $8/9$ ч после отправления из аэропорта и пролетит к этому моменту столько же километров, сколько пройдет поезд?

13.424. Два понтона, находящихся в одном месте, надо побыстрее сплавить вниз по реке на a км. Буксир не может взять сразу два понтона, тогда возник такой план: один понтон сразу отправится самоходом (как плот), а другой будет на некотором участке реки вначале транспортироваться буксиром, после чего будет отцеплен и отправлен самоходом. Буксир же тотчас развернется и пойдет на сближение с плывущим первым понтоном, возьмет его и отбуксирует до конечного пункта. В результате осуществления плана оба понтона пришли к месту назначения одновременно. По течению буксир все время поддерживал скорость $(v+u)$ км/ч, а против течения $(v-u)$ км/ч, где u — скорость течения реки. Сколько времени потребовалось на всю транспортировку по этому плану, и на сколько он сокращает время, за которое понтоны прошли бы требуемое расстояние по течению самоходом?

13.425. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на a с меньше, чем второй. Если они начинают пробег с общего старта и в одном направлении, то сходятся через каждые b с. Через какое время они встретятся, если побегут в противоположных направлениях по той же дорожке с прежними скоростями?

13.426. Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, сходятся через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то они встречались бы через каждые 8 мин. Известно, что при движении в противоположных направлениях расстояние (по окружности) между ними уменьшалось с 40 до 26 м за 24 с. Сколько метров в минуту проходит каждое тело и какова длина окружности?

13.427. Сумму всех четных двузначных чисел разделили на одно из них, кратное девяти. Остатка не было. Получившееся частное отличается от делителя только порядком цифр. Какое двузначное число являлось делителем?

13.428. Искомое число более 400 и менее 500. Найти его, если сумма цифр его равна 9 и оно равно 47/36 числа, изображенного теми же цифрами, но написанными в обратном порядке.

13.429. На участке реки от A до B течение так невелико, что им можно пренебречь; на участке от B до C течение оказывает заметное влияние на движение лодки. Лодка покрывает расстояние вниз от A до C за 6 ч, а вверх от C до A за 7 ч. Если бы на участке от A до B течение было бы таким же, как на участке от B до C, то весь путь от A до C занял бы 5,5 ч. Сколько времени в этом случае понадобилось бы той же лодке на движение вверх от C до A? Собственная скорость лодки принимается неизменной во всех случаях.

13.430. На какое целое положительное число надо разделить 180, чтобы остаток составлял 25% от частного?

14.431. Сосуд емкостью в 12 л наполнен кислотой. Из него выливают некоторое количество кислоты во второй сосуд такого же объема и этот второй сосуд дополняют водой. Теперь смесью из второго сосуда дополняют первый сосуд. Затем из первого сосуда отливают 4 л во второй, после чего в обоих сосудах количество кислоты оказывается одинаковым. Сколько отлито первоначально кислоты из первого сосуда во второй?

13.432. Из сосуда с водой отлили 1 л воды и добавили 1 л кислоты. Затем отлили 1 л смеси и добавили 1 л кислоты и т. д. После того как процесс был повторен 20 раз, оказалось, что смесь в сосуде состоит наполовину из воды и наполовину из кислоты. Сколько воды было первоначально в сосуде?

13.433. Из бутыли, наполненной 12%-ным раствором соли, отлили 1 л и долили бутыль водой, затем отлили еще 1 л и опять долили водой. В бутыли оказался 3%-ный раствор соли. Какова вместимость бутыли?

13.434. На расстоянии l м от моста A вниз по течению реки расположен мост B. Когда спортсмен проплывал мимо моста A, направляясь к мосту B, ему бросили два мяча. Первый мяч он подхватил, а второй оставил плыть по течению. Проплыв с мячом некоторый участок реки, спортсмен оставил этот мяч и поплыл вверх по реке за вторым мячом. Подхватив второй мяч, снова повернул по направлению к мосту B и достиг его одновременно со свободно плывшим первым мячом. Какое расстояние пришлось проплыть спортсмену, если его собственная скорость все время была в k раз больше скорости течения?

13.435. Латунь состоит из меди и цинка. Сколько содержится меди и цинка в 124 кг латуни, если 89 кг меди теряют в весе 10 кг; 7 кг цинка теряют в воде 1 кг, а 124 кг латуни теряют в воде

15 кг? Для каждого вещества вес и потеря веса в воде — прямо пропорциональные величины.

13.436. В колбе имеется раствор соли. Из колбы отливают $1/n$ часть раствора в пробирку, а раствор, оставшийся в колбе, выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли не повысится вдвое. После этого вливают в колбу раствор из пробирки. В результате содержание соли в растворе повысилось на $p\%$ по сравнению с первоначальным. Определить процентное содержание соли в первоначальном растворе. Какую часть первоначального раствора следовало отлить, чтобы в результате описанной процедуры процентное содержание соли увеличилось в полтора раза?

13.437. Школьнику было предложено сложить и перемножить два целых положительных числа. В сумме он получил верный ответ 962, но проверяя произведение делением на больший множитель, он получил в частном 384, а в остатке 85. Перемножая числа вторично, мальчик увидел, что когда он производил сложение промежуточных результатов при умножении «столбиком», то в одном из слагаемых принял в разряде тысяч цифру 1 за 4. Какие числа были даны мальчику?

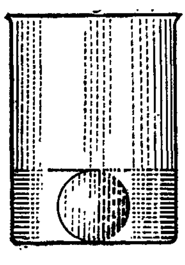

Рис. 13.14

13.438. На столе стоит цилиндрическая банка с водой (рис. 13.14). Радиус основания банки R. Если в эту банку опускают шарик радиуса r, то он ложится на дно банки, а поверхность воды при этом поднимается настолько, что становится касательной к шарику. Доказать, что может произойти то же самое, если в эту банку с тем же количеством воды опустить вместо данного шарика шарик другого радиуса. Найти радиус нового шарика и установить условия, при которых он будет больше или меньше радиуса данного шарика.

13.439. Из нового синтетического материала изготовили брусок в форме прямоугольного параллелепипеда, полная поверхность которого равна 192 см^2. Брусок был подвергнут давлению по всем граням таким образом, что форма прямоугольного параллелепипеда сохранилась, но каждое ребро уменьшилось на 1 см. Полная поверхность бруска уменьшилась при этом на 70 см^2. Какой размер имела диагональ у первоначального бруска?

13.440. Сравнивая два бруска, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, установили, что длина, ширина и высота второго бруска соответственно на 1 см больше, чем у первого бруска, а объем и полная поверхность второго бруска соответственно на 18 см^3 и 30 см^2 больше, чем у первого. Какова величина полной поверхности первого бруска?

13.441. От станции A отошли два электропоезда с интервалом в 12 мин и практически сразу развили одинаковую скорость 50 км/ч. Они идут в одном направлении, без остановок, сохраняя указанную скорость неизменной. С какой постоянной скоростью шел встречный поезд, если он повстречал эти электропоезда через 5 мин один после другого?

13.442. Искомое трехзначное число начинается с цифры 1. Если ее стереть и затем ее же приписать в качестве последней цифры числа, то полученное новое трехзначное число будет больше искомого на $9a^{1/\lg a}$. Найти число.

13.443. На полуокружности, опирающейся на диаметр AB, длина которого принята за 1, выбрана точка M так, что сумма утроенной длины отрезка MA и учетверенной длины отрезка MB ровно в m раз больше диаметра, где m — некоторое положительное число. Найти длину отрезка MA и выяснить, при каких значениях m:

а) невозможно выбрать на данной полуокружности точку M, удовлетворяющую условию задачи,

б) возможна лишь одна точка,

в) возможны две точки.

13.444. Если двузначное число разделить на некоторое целое число, то в частном получится 3 и в остатке 8. Если же в делимом поменять местами цифры, а делитель оставить прежним, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найти первоначальное значение делимого.

13.445. Точка P расположена на диаметре окружности радиуса R между концами диаметра AB. Из этой точки P разлетелись три единичные массы по направлениям отрезков PA, PB и PC, где PC — полухорда, перпендикулярная диаметру AB. На каком расстоянии от A находится точка P, если известно, что скорости движения постоянны и за единицу времени первая масса достигла точки A, вторая точки B, а третья — точки C? При этом израсходованная кинетическая энергия ($mv^2/2$) в сумме составляет a^2 единиц. В каких пределах можно изменять величину a^2, чтобы всякий раз выполнялось условие задачи?

13.446. На сторонах равностороннего треугольника ABC между его вершинами расположены точки A_1, B_1 и C_1 так, что $AA_1=BB_1=$ $=CC_1=x$. Сторона треугольника равна a. Найти такое значение x, при котором отношение площади $\triangle A_1B_1C_1$ к площади $\triangle ABC$ равнялось бы данному положительному числу m. В каких пределах можно изменять величину m, чтобы всякий раз выполнялось условие задачи?

13.447. От двух кусков сплава одинакового веса, но с различным процентным содержанием меди, отрезали по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих кусках стало одинаковым. Во сколько раз отрезанный кусок меньше целого куска?

13.448. В колбе имеется раствор соли. Из колбы отливают $1/n$ часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого получившийся раствор возвращают в колбу и смешивают с тем раствором, который там оставался. В результате содержание соли в растворе повысилось на $p\%$. Определить процентное содержание соли в первоначальном растворе.

13.449. Вдоль сторон прямого угла по направлению к вершине движутся два шара с радиусами 2 см и 3 см, причем центры этих шаров перемещаются по сторонам угла с неравными, но постоянными скоростями. В некоторый момент времени центр меньшего шара находится на расстоянии 6 см от вершины, а центр большего — на расстоянии 16 см. Через одну секунду расстояние между центрами стало 13 см, а еще через две секунды шары ударились, не дойдя до вершины. Найти скорости шаров.

13.450. Сплав состоит из олова, меди и цинка. Если от этого сплава отделить 20 г и сплавить их с 2 г олова, то во вновь получившемся сплаве масса меди будет равна массе олова. Если же отделить от первоначального сплава 30 г и прибавить сюда 9 г цинка, то в этом новом сплаве масса олова будет равна массе цинка. Определить в процентах состав первоначального сплава.

13.451. Найти длины сторон прямоугольного треугольника, если известны его полупериметр p и длина медианы m, проведенной к гипотенузе. Определить, в каких границах допустимы значения p, если дано числовое значение m.

13.452. На складе имеется некоторое число бочек двух образцов (размеров) общей емкостью 7000 л. Если бы все бочки были первого образца, то емкость всех бочек увеличилась бы на 1000 л. Если бы все бочки были второго образца, то емкость уменьшилась бы на 4000 л. Вычислить емкость всех бочек каждого образца в отдельности.

13.453. Известно, что разность переменных величин y и z пропорциональна величине x, а разность величин z и x пропорциональна величине y. Коэффициенты этих пропорциональностей равны соответственно k_1 и k_2, причем $k_1 \neq k_2$. Некоторое значение величины z в 3 раза больше разности соответствующих значений x и y. Доказать, что если каждый из коэффициентов k_1 и k_2 увеличить на 3, то произведение получившихся чисел будет равно числу 8. (Предполагается, что величины x и y не принимают нулевых значений.)

13.454. Из двух орудий одно произвело 36 выстрелов, когда начало действовать второе. Второе орудие делает 7 выстрелов, когда первое делает 8. Количество пороха, употребляемое первым и вторым орудием на каждый выстрел, относится, как 3 : 4. Через сколько выстрелов второе орудие израсходует столько же пороха, сколько первое орудие?

13.455. Предприятие A, потребляющее лед, закупает его в пункте B по цене a руб. за тонну. Иногда этому предприятию приходится закупать лед в другом пункте C по цене 1,5 a руб. за тонну. Оба изготовителя сами доставляют потребителю A закупленный им лед, начисляя за перевозку одинаково по p руб. за тонно-километр. Потеря в массе, происходящая при транспортировке от таяния льда, составляет n тысячных массы на километр пути. Предприятие A расположено между B и C, и каждая тонна фактически полученного льда обходится предприятию A одинаково (в рублях) при доставке как из пункта B, так и из пункта C. Во сколько рублей обходится предприятию A тонна получаемого льда, если известно, что расстояние от B до C через A равно s км?

13.456. Имеется некоторое количество одинаковых шаров. Их можно уложить на столе или в виде квадрата, или в виде равнобочной трапеции. В трапеции каждый следующий горизонтальный ряд имеет шаров на один больше, чем в предыдущем ряду. Оказалось, что вдоль боковой стороны трапеции помещается на 2 шара меньше, чем на стороне квадрата, а на большем основании трапеции вдвое больше, чем вдоль боковой ее стороны. Определить число шаров.

13.457. На дороге на расстоянии 10 м один от другого лежало нечетное число столбов, которые требовалось собрать в то место дороги, где находится средний по счету столб. Начав с одного из крайних столбов, рабочий перевез все столбы по одному, причем для этого в общей сложности ему пришлось пройти 3 км. Сколько столбов перевез рабочий?

13.458. В треугольнике ABC длина катета $AC=b$, а длина катета $BC=a$. Точка M расположена на стороне BC между B и C так, что отрезок MB является средним арифметическим к отрезкам MA

и MC. Доказать, что в этом случае $|MC|$ может иметь единственное значение:

$$|MC|=\frac{3a-\sqrt{a^2+2b^2}}{4}.$$

При каком соотношении между длинами a и b катетов было бы невозможным существование точки M, удовлетворяющей указанным требованиям?

13.459. В одном праздничном выступлении большая группа спортсменов образовала фигуру, очертанием которой был равносторонний треугольник: вершину треугольника занимал один спортсмен, за ним расположились 2 спортсмена, в следующем ряду 3 спортсмена и т. д. Через некоторое время к этой группе подбежали еще 46 спортсменов, после чего все вместе перестроились в несколько одинаковых рядов, следующих один за другим и образующих сплошной квадрат. Вдоль стороны второй фигуры оказалось на p спортсменов меньше, чем было вдоль стороны первой фигуры. Сколько спортсменов участвовало в построении первой фигуры? Определить подходящее числовое значение p, если известно, что $p<5$.

13.460. В шахматном турнире среди участников были две женщины. Каждый участник турнира играл с остальными участниками по 2 партии. Число партий, сыгранных мужчинами между собой, оказалось на 66 больше числа партий, сыгранных мужчинами с женщинами. Сколько всего было участников в турнире и сколько всего партий было сыграно?

13.461. Определить глубину колодца, зная, что звук от удара камня о дно колодца, брошенного в колодец с начальной скоростью, равной нулю, слышен через a сек от начала падения камня. Ускорение силы тяжести равно g, скорость звука v. (Сопротивлением воздуха можно пренебречь и считать, что через t единиц времени, прошедших от начала падения камня, пройденный камнем путь $h=gt^2/2$.)

13.462. Электронная вычислительная машина получила задание решить последовательно несколько задач. Регистрируя время выполнения задания, заметили, что на решение каждой следующей задачи машина затрачивала в одно и то же число раз меньше времени, чем на решение предыдущей. Сколько было предложено задач и сколько времени затрачено машиной на решение всех задач, если на решение всех задач, кроме первой, затрачено 63,5 мин, на решение всех задач, кроме последней, затрачено 127 мин, а на решение всех задач, кроме первых двух и последних двух, затрачено 30 мин?

13.463. Три свечи имеют одинаковую длину, но разную толщину. Первая свеча была зажжена на час раньше двух других, зажженных одновременно. В некоторый момент горения первая и третья свечи стали одинаковой длины, а через два часа после этого одинаковой длины стали первая и вторая свечи. За сколько часов сгорает первая свеча, если вторая сгорает за 12 ч, а третья — за 8 ч?

13.464. Найти трехзначное число, зная, что число его десятков есть среднее геометрическое числа сотен и единиц. Если в его записи поменять местами цифры сотен и единиц и вычесть новое число из искомого, то разность будет равна 297.

13.465. Искомое трехзначное число оканчивается цифрой 1. Если ее стереть и затем ее же приписать в качестве первой цифры числа, то полученное новое трехзначное число будет меньше искомого на $10\,a^{\log_a \sqrt[3]{a}}$. Найти число.

13.466. Если при начале отсчета времени было m_0 г вещества A и 2 m_0 г вещества B, то через любое число t лет, в результате радиоактивного распада, останется этих веществ соответственно $m = m_0 \cdot 2^{-\lambda_1 t}$ и $M = 2m_0 \cdot 2^{-\lambda_2 t}$, где λ_1 и λ_2 — константы, зависящие от природы веществ. Вычислить период полураспада каждого из этих веществ, т. е. найти, через сколько лет останется от каждого вещества только половина его первоначального количества, если известно, что период полураспада вещества B в два раза меньше, чем вещества A, и что через 20 лет общая масса этих веществ уменьшается в 8 раз.

13.467. В соревновании по волейболу участвовало n команд. Каждая команда играла со всеми остальными по одному разу. За каждую игру выигравшей команде засчитывалось одно очко, за проигрыш очки не начислялись; ничьих в волейболе нет. По окончании соревнований выяснилось, что набранные командами очки образуют арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

13.468. В магазин поступил товар первого и второго сортов на общую сумму в 450 руб. Дополнительная экспертиза установила, что весь поступивший товар можно продавать только по цене второго сорта, в результате чего фирма потерпела бы убыток в сумме 50 руб. Продавцы магазина безвозмездно не только устранили дефекты в товаре первого сорта, но и товар второго сорта довели до кондиции первого сорта. Получив после этого разрешение продавать весь товар по цене первого сорта, магазин дал фирме прибыль в сумме 30 руб. В какую сумму оценивался первоначально весь товар первого сорта и весь товар второго сорта отдельно?

13.469. Зная длины сторон треугольника, ученик выразил его площадь и обратил внимание на то, что значениями длин сторон и площади этого треугольника являются соответственно четыре последовательных целых числа. Какие размеры сторон были у треугольника?

13.470. Даны две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, а также дана точка A с координатами $(a;\ a)$, где $a>0$. Требуется найти координты такой точки M на оси Ox и такой точки P на оси Oy, чтобы треугольник AMP был равносторонним.

ЧАСТЬ II

ЗАДАЧИ ДЛЯ УСТНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ

Глава 14

АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Упростить выражения (14.001—14.004):

14.001. $\frac{m}{m^2+1}\sqrt{1+\left(\frac{m^2-1}{2m}\right)^2}$. **14.002.** $\frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt[4]{(b-a)^3}}$.

14.003. $\sqrt{\frac{1-\cos 246^\circ}{1+\cos 246^\circ}}$. **14.004.** $\sqrt{\frac{\cos(\pi+\alpha)+1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1}}$.

Решить уравнения (14.005—14.026):

14.005. $\sqrt{x^2-1}-\frac{6}{\sqrt{x^2-1}}=1$.

14.006. $\sqrt{\frac{1+x}{x}+\frac{1}{x}}=5$. **14.007.** $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$.

14.008. $\frac{3^{\sqrt{-12x}}+3}{4}=3^{\sqrt{-3x}}$. **14.009.** $4^{\log_2 x}+x^2=8$.

14.010. $\lg^2 x^2=1$. **14.011.** $\log_2\log_3\log_4 x=0$.

14.012. $x^{2\log_2 x}=8$. **14.013.** $\log_3(\log_2^2(x-4))=0$.

14.014. $\lg^2 10x+\lg x=19$. **14.015.** $x^{\log_{x^2}(x^2-1)}=5$.

14.016. $x^{\log_3 x}=\sqrt[4]{3x^3}$. **14.017.** $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$.

14.018. $\log_2\left(\sqrt{4x+5}-1\right)=0,5\log_2\left(\sqrt{4x+5}+11\right)$.

14.019. $\log_2^2 4x-4\log_4 x=12$.

14.020. $\log_{x+6}\left(2x-\sqrt{x+6}\right)=0,5$.

14.021. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10.$

14.022. $2x-\lg(5^{2x}+4^{x}-16)=x\lg 4.$

14.023. $x+\lg(1+4^{x})=\lg 50.$ **14.024.** $\cos^{58}x+\sin^{40}x=1.$

14.025. $\log_{\cos x}\sin x=1.$ **14.026.** $\operatorname{ctg}(\sin x)=1.$

Решить системы уравнений (**14.027**—**14.032**):

14.027. $\begin{cases} 6{,}751x+3{,}249y=26{,}751, \\ 3{,}249x+6{,}751y=23{,}249. \end{cases}$

14.028. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2{,}5, \\ x^2-y^2=3{,}0. \end{cases}$

14.029. $\begin{cases} 2^x+2^y=5, \\ 2^{x+y}=4. \end{cases}$ **14.030.** $\begin{cases} 8^x=10y, \\ 2^x=5y. \end{cases}$

14.031. $\begin{cases} 0{,}5\log_2 x-\log_2 y=0, \\ x^2-5y^2+4=0. \end{cases}$ **14.032.** $\begin{cases} x^{\log_y x}=2, \\ y^{\log_x y}=16. \end{cases}$

14.033. При каком значении q сумма кубов корней уравнения $x^2-x-q=0$ будет равна 19?

14.034. Решить уравнение $x^2+px+35=0$, зная, что сумма квадратов его корней равна 74.

14.035. Не решая уравнения $x^2-3x-10=0$, вычислить сумму кубов его корней.

14.036. Имеет ли уравнение $(2x-1)^2+(x+1)^2=0$ действительные корни?

14.037. Сколько корней имеет уравнение $0{,}3^x=x^2-x+1$?

14.038. Проверить аналитически, что для уравнения

$$2^x+x^2-3=0$$

оба корня больше $-\sqrt{3}$, причем один точно равен 1.

14.039*. Решить уравнение $x^3-7x-6=0$. Убедиться в том, что сумма всех корней этого уравнения равна нулю. Нельзя ли было в этом убедиться, не находя самих корней?

14.040. Графически решить уравнение $|x-1|+2x-5=0$.

14.041. Показать графически, что уравнение $\lg x=\lg 2x$ корней не имеет.

14.042. Сколько корней имеет уравнение $x^3=\sin 3x$?

14.043. Показать графически, что уравнение

$$\sqrt{9-x^2}-\log_3(|x|-3)=0$$

корней не имеет.

14.044. Сколько действительных решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y=5, \\ x+y^2=3? \end{cases}$$

[**14.045.**] Решить уравнение $|x^2+1{,}5x+1|=m$. При каких значениях m оно имеет единственное решение?

14.046. Найти число x из того условия, что числа 1, 7, 13, ..., x составляют такую арифметическую прогрессию, для которой

$$1+7+13+\ldots+x=280.$$

14.047. Найти рациональные корни уравнения

$$\frac{\sqrt{x+2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{x+2}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

14.048. Найти целые корни уравнения $x^3-|x-1|=1$.

14.049. Чему равна сумма всех корней всякого биквадратного уравнения?

[**14.050.**] Доказать, что последовательность, заданная формулой $y_n=\dfrac{10n+7}{2n}$, монотонно убывает. Найти предел этой последовательности.

14.051. Равносильны ли уравнения

$$(1+2\sin x)\operatorname{tg} x=0 \quad \text{и} \quad \frac{1+2\sin x}{\operatorname{ctg} x}=0?$$

14.052. Показать, что уравнение $\sin x+\sin 2x=2$ не имеет решений.

14.053. При каком значении m система

$$\begin{cases} 2x+(m-1)y=3, \\ (m+1)x+4y=-3 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений? Не имеет решений?

Определить знаки чисел (**14.054—14.056**):

14.054. $\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)$.

14.055. $\lg_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)$.

14.056. $\frac{\log_3 5-\log_5 3}{\log_{0,3}4-\log_{0,3}3}$.

14.057. Чему равно основание логарифма, при котором число a равно своему логарифму?

14.058. Записать x в виде десятичной дроби, если

$$x=49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}.$$

14.059. Вычислить $x=0{,}8\left(1+9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65} 5}$.

14.060. Вычислить без таблиц $\lg 32{,}11-\lg 0{,}03211$.

14.061. Вычислить $\log_{1/2} 28$, если $\log_7 2=a$.

14.062. Найти $\lg^2 \sqrt{x}$, если известно, что $\log_x 100=a$.

14.063. Найти $\log_9 2{,}97$, если известно, что $\lg 3=a$ и $\lg 11=b$.

Вычислить (14.064—14.067):

14.064. $\lg \operatorname{tg} 2^\circ+\lg \operatorname{tg} 4^\circ+\lg \operatorname{ctg} 2^\circ+\lg \operatorname{ctg} 4^\circ$.

14.065. $\lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 9^\circ \ \ldots \ \lg \operatorname{tg} 87^\circ$.

14.066. $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \ \ldots \ \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.

14.067. $\lg \operatorname{tg} 1^\circ+\lg \operatorname{tg} 2^\circ+\lg \operatorname{tg} 3^\circ+\ \ldots \ +\lg \operatorname{tg} 89^\circ$

14.068. Чему равно произведение $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4 \ \ldots \ \log_{10} 9$, если известно, что $\lg 2=0{,}3010$?

14.069. Вычислить без помощи таблиц $\lg 2$ и $\lg 5$, зная, что $\lg 2\cdot\lg 5=0{,}2104$.

14.070. Определить знак произведения

$$\lg \sin 32^\circ \cdot \lg \cos 17^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \lg \operatorname{ctg} 20^\circ.$$

14.071. Какой знак имеет число $\lg \operatorname{arctg} 2$?

14.072. Доказать, что $\log_2 5$ — иррациональное число.

14.073. Всегда ли неверно равенство

$$\lg(a+b)=\lg a+\lg b?$$

14.074. Доказать, что если $a^2+b^2=7ab$, то

$$\log_k \frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log_k a+\log_k b).$$

14.075. Найти ошибку в следующих рассуждениях:

$$\frac{1}{4}>\frac{1}{8};\ \left(\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{2}\right)^3;\ \ 2\log_a \frac{1}{2}>3\log_a \frac{1}{2}.$$

Сокращая обе части равенства на $\log_a \frac{1}{2}$, получим $2>3$.

Решить неравенства (14.076—14.100):

14.076. $x^3+4\geqslant x^2+4x$. 14.077. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>\frac{6}{x^3}$.

14.078. $-\frac{15}{x^2}-\frac{16}{x^4}<-1$. **14.079.** $x^3-2x^2-x+2>0$.

14.080. $x^2-4|x|+3>0$. **14.081.** $x^2-5|x|+6<0$.

14.082. $\frac{3|x|-14}{x-3}\leqslant 4$. **14.083.** $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7}<0$.

14.084. $\left|\frac{2}{x-4}\right|>1$. **14.085.** $\frac{\sqrt{1-2x+x^2}+x}{x}>0$.

14.086. $7^{x^3-4x-2}>1/49$. **14.087.** $0{,}5^{(x^2+x-2)(3-x)}>1$.

14.088. $1<2^{x(x+2)}<8$. **14.089.** $\log_{0,5}(2x+6)>\log_{0,5}(x+8)$.

14.090. $2\lg x<\lg^2 x$. **14.091.** $\lg\frac{6}{x}>\lg(x+5)$.

14.092. $\log_2(1+\log_{1/3}x)<1$. **14.093.** $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leqslant\frac{1}{2}$.

14.094. $x^{\log_{0,2}0,3}+0{,}3^{\log_{0,2}x}\leqslant 0{,}18$. **14.095.** $\log_{1/2}\log_3 x>1$.

14.096. $x^2\log_2 0{,}3-2\log_2 0{,}09>0$.

14.097. $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}<1$. **14.098*.** $x^{-3\bar{x}-8}>x^7$.

14.099. $\frac{\sin x}{1+\cos x}\geqslant 0$. **14.100.** $\sin x\cos x>1/4$.

14.101. Для каких точек оси Ox выполняется неравенство $\sin x<1/2$? неравенство $|\sin x|<1/2$?

14.102. Что больше: $\sin 2x$ или $2\sin x$?

14.103. Для различных x из области определения функций выяснить, какая из величин больше: $\lg x^2$ или $\lg^2 x$.

14.104. Каковы возможные значения x, если $\log_x(a^2+1)<0$?

14.105. Что больше: 3^{400} или 4^{300}?

14.106. При каком значении a будет $\frac{5a+6}{4-a}>1$?

[**14.107**]. Существуют ли такие a, при которых корни уравнения $x^2-2(a-3)x-a+3=0$ заключены в промежутке $]-3;\ 0[$?

14.108. При каких значениях x выражение $\log_{1/2}(x^2-8)$ неотрицательно?

14.109. Доказать, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, если $ab>0$.

14.110*. Доказать, что если $a+b+c=1$, то $a^2+b^2+c^2\geqslant 1/3$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

14.111. Доказать, что сумма кубов катетов меньше куба гипотенузы.

14.112. В любом треугольнике сумма длин трех медиан меньше его периметра и больше полупериметра. Доказать.

14.113. Если a, b, c — соответственно катеты и гипотенуза, то $a+b \leqslant c\sqrt{2}$. Доказать.

14.114*. Доказать неравенство

$$\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt[3]{a^3+b^3} \quad (a>0,\ b>0).$$

Построить графики функций (**14.115—14.134**):

14.115. а) $y=x^2+5x+6$; б) $y=x^2+5|x|+6$;
в) $y=|x^2+5x+6|$; г) $y=|x^2+5|x|+6|$.

14.116. а) $y=-x^2+4x-5$; б) $y=-x^2+4|x|-5$;
в) $y=|-x^2+4x-5|$; г) $y=|-x^2+4|x|-5|$.

14.117. а) $y=\log_{1/2} x$; б) $y=\log_{1/2}(-x)$;
в) $y=\log_{1/2}|x|$; г) $y=|\log_{1/2} x|$; д) $y=|\log_{1/2}|x||$.

14.118. а) $y=\sin x$; б) $y=2\sin x$;
в) $y=\sin 2x$; г) $y=\sin\dfrac{x}{2}$.

14.119. а) $y=\cos x$; б) $y=\cos|x|$;
в) $y=|\cos x|$; г) $y=|\cos|x||$.

14.120. $y=\dfrac{1+x}{x}$.

14.121. $y=\dfrac{1}{x^2-9}$.

14.122. $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

14.123. $y=2^{1/x}$.

14.124. $y=-\dfrac{1}{\cos x}$.

14.125. $y=\log_2(\sin x\cdot\cos x)$.

14.126. $y=\log_2 \sin x$.

14.127. $y=|x+1|-x$.

14.128. $y=x|x|+1$.

14.129. $y=x+\dfrac{|x|}{x}$.

14.130. $y=-2^{-|x|}$.

14.131. $y=2^x\cdot 2^{|x|}$.

14.132. $y=\lg x+|\lg x|$.

14.133. $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot(x^2-4)$.

14.134. $y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$.

[14.135.] Как, зная график $f(x)$, построить график $|f(x)|$? Можно ли по графику $|f(x)|$ восстановить график $f(x)$?

[14.136.] Выразить простейшей формулой функцию f, которая одновременно является четной, нечетной, невозрастающей, неубывающей и периодической.

[14.137.] Какое преобразование отображает график функции $f(x)$ на график функции $f(-x)$?

[14.138.] Построить график функции

$$y=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & \text{при } x\neq 0,\\ 2 & \text{при } x=0\end{cases}$$

и показать, что $x=2$ является точкой минимума данной функции. Кроме того, на этом примере показать, что не

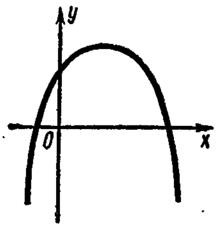

Рис. 14.1

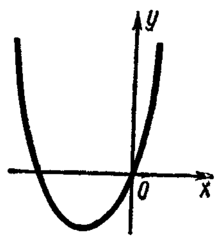

Рис. 14.2

обязательно слева от точки минимума находится промежуток убывания функции, а справа — промежуток возрастания: может быть и наоборот.

14.139. График функции $y=ax^2+bx+c$ изображен на рис. 14.1. Числа a, b и c сравнить с нулем.

14.140. График функции $y=ax^2+bx+c$ изображен на рис. 14.2. Числа a, b и c сравнить с нулем.

14.141. Построить график функции

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c},$$

если $a>0$ и $b^2-4ac=0$.

Найти области определения функций (14.142—14.147):

14.142. $y=\frac{\log x}{\arcsin(x-3)}$. 14.143. $y=\frac{1}{1-\sqrt{x^2}}$.

14.144. $y=\sqrt{\lg\frac{1-2x}{x+3}}$. 14.145. $y=(\log_3 x-\log_2 x)^{-1/2}$.

14.146. $y=\sqrt{2^x-3^x}$. 14.147. $y=\log_3\log_{1/2}x$.

Найти множества значений функций (14.148—14.150):

14.148. $y=\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$.

14.149. $y=(\sin x+\cos x)^2$.

14.150. $y=5\sin x-12\cos x$.

Изобразить в координатной плоскости заданные множества точек (**14.151—14.159**):

14.151. $\{(x;\ y)\mid |x|+|y|=1\}$.

14.152. $\{(x;\ y)\mid |x|-|y|=1\}$.

14.153. $\{(x;\ y)\mid x+|x|=y+|y|\}$.

14.154. $\{(x;\ y)\mid |y|=\log_{0,5}|x|\}$.

14.155. $\{(x;\ y)\mid |y|=|\sin x|\}$.

14.156. $\left\{(x;\ y)\mid |y|=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}\right\}$.

14.157. $\{(x;\ y)\mid 3x-4y+12>0$ и $x+y-2<0\}$.

14.158. $\{(x;\ y)\mid y+3\geqslant x^2+2x$ и $x+y\leqslant 3\}$.

14.159. $\{(x;\ y)\mid \log_2(x+y-1)<0\}$.

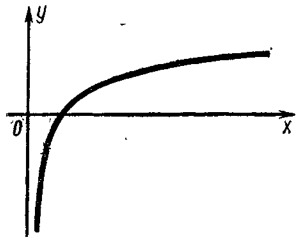

Рис. 14.3

14.160. На рис. 14.3 изображен график $y=\log_a x$ (масштабы на осях координат одинаковы). С помощью этого графика найти число a.

14.161. Найти наименьшее значение функции $y=x^2-6x+11$.

14.162. Найти наименьшее значение функции $y=\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{x^2}{2}$.

14.163. Найти наибольшее значение функции $y=1+2x-x^2$.

14.164. Показать, что парабола $y=x^2-x+5{,}35$ не пересекает график функции $y=2\sin x+3$.

14.165. Показать, что координаты всех точек прямой $x+y=2$ удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\geqslant 2$, и истолковать этот факт геометрически.

Сократить дроби (**14.166—14.169**):

[14.166.] $\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

[14.167.] $\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

[14.168.] $\dfrac{(n+2)\,n!}{(n+1)!}$.

[14.169.] $\dfrac{((n+2)!+n!)\,(n+1)}{(n+2)!\,(n^2+3n+3)}$.

[14.170.] Показать, что графиком уравнения $\sin(x+y)=0$ является бесконечная совокупность равноотстоящих параллельных прямых.

[14.171.] Дано:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \forall x \in Q, \\ -1, & \forall x \in R/Q; \end{cases}$$

Q — множество рациональных чисел; R — множество действительных чисел; R/Q — множество иррациональных чисел.

Является ли эта функция постоянной на множестве R? А ее квадрат?

[14.172.] Доказать, что при некоторых ограничениях для α и β

$$\sin(\alpha+\beta)=3\sin(\alpha-\beta) \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\beta.$$

Указать требуемые ограничения для α и β.

[14.173.] Даны функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$, определенные на одном и том же множестве $\{D\}$. Каждому $x \in \{D\}$ поставим в соответствие наибольшее из чисел $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$. Тем самым на $\{D\}$ будет определена функция (назовем ее функцией-максимум):

$$f(x)=\max\{f_1(x);\ f_2(x);\ \ldots;\ f_n(x)\}.$$

Аналогично определяется и функция-минимум:

$$g(x)=\min\{f_1(x);\ f_2(x);\ \ldots;\ f_n(x)\}.$$

Используя графики функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, построить графики функций:

а) $\max\{\sin x;\ \cos x\}$; б) $\max\left\{\frac{2}{3}(x-2);\ -2(x+2)\right\}$;

в) $\min\{x;\ 2-x;\ 0\}$; г) $\min\left\{1-x^2;\ \frac{1-x}{2}\right\}$.

[14.174.] Является ли заданная последовательность монотонной? Убывающей или возрастающей?

а) $x_n=3n^2-n$; б) $x_n=n^2-3n$;

в) $x_n=7n-n^2$; г) $y_n=\lg\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

[14.175.] Найти целые значения x, при которых верно неравенство $\log_3(x+3)^2 \leqslant 2$.

[14.176.] Доказать, что сумма кубов n нечетных чисел равна $n^2(2n^2-1)$ при любом натуральном значении n.

14.177. Рассмотрев случаи $0<a<1$ и $a>1$, выяснить, существует ли число $\sqrt{\log_a \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \log_a \operatorname{tg} 70^\circ}$.

[14.178.] Показать, что если арифметический квадратный корень из произведения двух натуральных чисел есть число рациональное, то и квадратный корень из их частного — число рациональное.

[14.179.] Найти средний член разложения бинома

$$\left(3a^2x^3+\frac{a}{3x}\right)^{16}.$$

[14.180.] Доказать, что сумма коэффициентов разложения $(2x^2-3y^2)^{2n+1}$ равна -1 при любом $n \in N$.

[14.181.] Доказать, что для любого $x \in R$ верно неравенство $\left|\sin x+\sqrt{3}\cos x\right| \leqslant 2$.

14.182. На числовой оси построить точки, изображающие числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

14.183. Что больше: 123% от 456 или 456% от 123? Какое свойство процентов можно сформулировать, обобщая ответ на этот вопрос? Обосновать это свойство.

14.184. На некоторый товар были дважды снижены цены — сначала на 15%, а затем еще на 20%. Каков общий процент снижения цены?

14.185. Если среднее арифметическое десятичных логарифмов двух чисел равно q, то чему равно среднее геометрическое кубов самих этих чисел?

14.186. С точностью до 0,01 найти $2\sqrt{5,21}$.

14.187. Показать, что число $\sqrt{12345,67}$ иррационально.

14.188. Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}.$$

14.189. Что больше: $0,8^{-1,3}$ или $0,8^{-1,4}$?

14.190. Сколько цифр содержит число 2^{100}?

[14.191.] Доказать, что неравенство $3^n>n+2$ верно, если $n \in N$ и $n>1$.

14.192. Произведение $(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)(2^{2^3}+1)$ представить в виде суммы степеней числа 2.

14.193. Через один кран вода вливается в бак за 3 ч, через второй — за 5 ч. За какое время вода заполнит бак, если открыть оба крана? Через один кран вода вливается в бак за 3 ч, через второй выливается за 5 ч. За какое время вода заполнит бак, если открыть оба крана?

14.194. Существует ли такая арифметическая прогрессия, у которой сумма любого числа ее членов равна квадрату числа членов?

14.195. Существует ли такая арифметическая прогрессия, у которой сумма любого числа ее членов равна кубу числа членов?

14.196. Разделить $a^{128}-b^{128}$ на произведение

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ \ldots\ (a^{64}+b^{64}).$$

14.197. Показать, что уравнение

$$x^8+p^2x^6+q^2x^4+r^2x^2=0$$

не имеет отличных от нуля корней.

14.198*. Многочлен x^4+4 представить в виде произведения двух многочленов второй степени.

14.199*. Найти произведение xy, если $x+y=a$ и $x^4+y^4=b^4$.

14.200*. Многочлен x^8+y^8 представить в виде произведения двух многочленов четвертой степени относительно x и y.

14.201*. Разложить на множители a^4+4b^4.

[14.202.] Найти коэффициенты квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, зная, что она принимает наибольшее значение 3,25 при $x=-0,75$ и при $x=0$ принимает значение 1.

[14.203.] Из всех четырехугольников с данными диагоналями m и n выбрать четырехугольник наибольшей площади.

[14.204.] Построить график функции

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1 & \text{при } x\leqslant 0,\\ \cos x & \text{при } 0<x<\pi,\\ x^2-3\pi x+2\pi^2 & \text{при } x\geqslant\pi.\end{cases}$$

Указать значение функции в точке разрыва.

14.205. Для каких значений x равенство

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=\frac{1-x^8}{1-x}$$

оказывается верным?

14.206. Доказать, что многочлен

$$x^4-2x^3+2x^2-8x+16$$

принимает положительные значения при любых значениях x.

14.207. В разложении $\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ найти член, не содержащий x.

14.208. Разложить на множители $x-3\sqrt{xy}+2y$.

14.209. Если в выражении $(2-3x)^{322}+(3-2x^2)^{321}$ раскрыть скобки и привести подобные члены, то получится некоторый многочлен. Как проще всего вычислить сумму всех его коэффициентов?

14.210. Найти сумму коэффициентов разложения $(5x-4y)^{100}$.

14.211. Доказать, что если у каждого из двух данных многочленов сумма коэффициентов равна 1, то и у многочлена, являющегося произведением двух данных многочленов, сумма коэффициентов равна 1.

14.212. Нетрудно заметить, что равенство

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1$$

имеет относительно x степень не выше, чем вторую. Тем не менее оно имеет более двух корней — можно проверить, что числа $x_1=a$, $x_2=b$ и $x_3=c$ ему удовлетворяют. Чем это объяснить?

14.213. Доказать, что если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то свободный член уравнения делится на этот целый корень.

14.214. Как Вы будете решать уравнение

$$x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0,$$

если заранее известно, что многочлен в левой части данного уравнения разлагается на множители второй степени с целыми коэффициентами?

14.215. Дано произведение

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right).$$

В типографии как-то случилось, что обе дроби выпали из набора и получилось произведение

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

Наборщик утверждает, что несмотря на потерю дробей, получившееся выражение тождественно данному. Прав ли он?

14.216. При каких значениях a график функции $y=(a+5)x^2+x+a-3$ пересекает ось абсцисс по разные стороны от оси ординат?

14.217. Указать область определения функции

$$y=\log_2(x^2-2x+3).$$

Имеет ли график этой функции какую-либо ось симметрии? Если да, то какую?

14.218. Указать область определения функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-10x+25}}.$$

Показать, что график этой функции расположен симметрично относительно прямой $x=5$.

14.219. Показать, что функция $y=\frac{2x+3}{5x-2}$ совпадает с функцией, обратной данной.

14.220. Указать, какие из следующих функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

а) $y=\sin^3 x+\operatorname{ctg}^5 x$, б) $y=\sin 2x+\cos 3x$, в) $y=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$,

г) $y=\sin^4 x+x^2+1$, д) $y=x|x|$, е) $y=\frac{3^x-1}{3^x+1}$.

14.221. Найти значения функции $f(n)=\arcsin(\sin n)$ при $n=1$, 2, 3, 4, 5, 6 и 7.

14.222. Можно ли утверждать, что сумма двух периодических функций есть функция периодическая?

14.223. Доказать, что произведение четного числа нечетных функций есть функция четная.

14.224. Величина y есть целая часть («характеристика») логарифма x по основанию 2. Построить график y как функции x при изменении x от 0,5 до 8,0.

14.225. Доказать, что если p и q — простые числа, большие 3, то p^2-q^2 делится на 24.

14.226. Доказать, что если кубы двух действительных чисел равны, то равны и сами числа.

14.227. Верно ли, что три произвольных рациональных числа a, b и c всегда могут рассматриваться как члены некоторой арифметической прогрессии?

14.228. Дано: $n < m$, где n и m — натуральные числа. В какой последовательности располагаются точки, изображающие числа 1, n/m, m/n, на числовой прямой? Какая из двух последних точек ближе лежит к точке, изображающей число 1?

14.229. Почему при делении чисел, равных квадрату целого числа, на 3 в остатке никогда не получается 2?

14.230. Доказать, что при любом натуральном n выражение $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ — натуральное число.

14.231. Доказать, что если каждое из двух данных чисел является суммой квадратов двух чисел, то и произведение данных чисел может быть представлено в виде суммы квадратов двух чисел.

14.232. Доказать, что если n — простое число, большее 3, то $\frac{n^2-1}{24}$ — целое число.

14.233. Доказать, что n^7-n делится на 42, если n — любое целое число.

14.234. Доказать, что

$$1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

14.235. Доказать, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

14.236. Показать, что всякое нечетное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

14.237. Доказать методом математической индукции неравенство $(1+a)^n \geqslant 1+na$ (n — натуральное число, $n \geqslant 2$ и $a > -1$).

14.238. Доказать, что $|\alpha_1+\alpha_2| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|$. На основании этого методом полной математической индукции доказать, что

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|.$$

Предполагается, что α_1, α_2, ..., α_n — действительные числа.

14.239. Сообразите, как использовать тождество

$$\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

для доказательства неравенства

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}.$$

14.240. Доказать, что для всякого натурального числа n выполняется неравенство

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<3.$$

14.241. Исключить t из равенств

$$x=10^{\cos t}, \quad y=10^{\sin t}.$$

14.242. Исключить φ из равенств

$$u=a^{\cos^3\varphi}, \quad v=a^{\sin^3\varphi} \quad (a>0,\ a\neq 1).$$

14.243. Чему равна сумма углов α и β, если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ являются корнями уравнения $6x^2-5x+1=0$?

14.244. Для углов α и β, таких, что $0<\alpha+\beta<\pi/2$, оказалось, что $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$ являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$ (предполагается, что оба корня этого уравнения положительны). Найти $\alpha+\beta$.

14.245. Выразить $\operatorname{tg}3\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

14.246. Пусть $\sin 10°=a$. Найти $\sin 20°$ двумя способами: по формуле синуса двойного угла и формуле синуса разности углов 30° и 10°. Почему получились «разные» ответы?

14.247. При помощи формулы, связывающей $\sin 3\alpha$ и $\sin\alpha$, доказать, что $0{,}1<\sin 10°<0{,}2$.

14.248. Дано, что $\sin^n x+\cos^n x\equiv 1$. Доказать, что $n=2$.

14.249. Функцию $y=\sin^k x+\cos^k x$, $0\leqslant x\leqslant\pi/2$ сравнить с единицей для различных k.

14.250. Показать, что $\sin 495°-\sin 795°+\sin 1095°=0$.

14.251. Выразить $\sin 6°$ через $\sin 12°$.

14.252. Существует ли угол, для которого косинус был бы равен

а) $a+\frac{1}{a}$ при $a\neq 0$? б) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$?

14.253. Существует ли такой угол, для которого числа $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ являются соответственно его тангенсом и котангенсом?

14.254. Определить периоды функций:

а) $y=\cos x+\sin\frac{x}{3}$; б) $y=\sin x+\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{5}$.

14.255. Определить период функции

$$y=15\sin^2 12x+12\sin^2 15x.$$

14.256. Построить острый угол, тангенс которого в два раза больше его синуса.

14.257. Найти $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $\pi<\alpha<3\pi/2$.

14.258. Доказать, что

$$8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=1.$$

14.259. При каких значениях α и β возможно равенство

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)?$$

14.260. Найти наибольшее значение функции

$$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(2x+\frac{2\pi}{15}\right).$$

14.261. Чему равно наибольшее значение функции $y=\sin(\sin x)$?

14.262. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y=3\sin^2 x+2\cos^2 x.$$

14.263. Что больше: $\operatorname{tg}1$ или $\operatorname{arctg}1$?

14.264. Чему равна дробь $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=m$?

14.265. Вычислить $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-1/3$, $\cos\beta=-1/2$.

14.266. Определить знак произведения $\sin 2\cdot\sin 3\cdot\sin 5$.

14.267. Что меньше: $\frac{\pi}{4}$ или $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{5}{8}$?

14.268. Что меньше: $\frac{\pi}{4}$ или $\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{2}{3}$?

14.269. Найти такие два числа m и M, чтобы неравенство $m\leqslant\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\leqslant M$ было верным при любых α и чтобы разность между M и m была наименьшей.

14.270. Показать, что знаки $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ совпадают при любом значении $\alpha\neq k\pi$ (k — целое).

14.271. Найти такие значения a и b, при которых функция

$$y=(a-b)\sin^2 x+\frac{a+b}{2}\cos^2 x$$

тождественно (для всех значений x) равна двум.

14.272. Возможно ли равенство $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt[3]{3}$?

14.273. Знак $\vee$ заменить одним из знаков $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ так, чтобы следующие соотношения были бы верными:

а) $\lg\sin\alpha \vee 0$; б) $\sin\alpha+\cos\alpha \vee 1{,}5$;

в) $\sqrt[3]{\sin\alpha}+\sqrt[3]{\cos\alpha} \vee 1$; г) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha \vee 1{,}9$

(α — острый угол).

14.274. Доказать, что если в треугольнике существует зависимость $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}$, то он равнобедренный.

14.275. Доказать, что если отношение косинусов двух углов треугольника равно отношению синусов тех же углов, то треугольник равнобедренный.

14.276. Доказать, что для любого треугольника со сторонами a, b, c и углами A, B, C, лежащими соответственно против этих сторон, справедливо равенство

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0.$$

14.277. Доказать, что если в треугольнике $\frac{a-b}{a}=1-2\cos C$, то треугольник равнобедренный.

14.278. Пусть A, B, C — углы треугольника, причем C — тупой угол. Доказать, что $\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B<1$.

14.279. Доказать, что во всяком треугольнике сумма попарных произведений котангенсов всех углов равна единице.

14.280. Доказать, что для всякого треугольника со сторонами a, b и c и с углами A, B, C его площадь S можно определить по формуле $S=\frac{1}{2}(abc)^{2/3}\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$.

Построить графики функций (**14.281—14.298**):

14.281. $y=|x-2|(x+2)$. **14.282.** $y=\frac{x-1}{|x-1|}(x^2-4)$.

14.283. $y=\sqrt{10^{\lg x^2}}$. **14.284.** $y=x^{\log_x 2}$. **14.285.** $y=2^{\log_2 x}$.

14.286. $y=2^{\sqrt{-\sin^2 x}}$. **14.287.** $y=|x|^{1/2}$.

14.288. $y=5^{\frac{1}{3}\log_5(x-1)}$. **14.289.** $y=\frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{|x|}$.

14.290. а) $y=x^2-7x+6$, б) $y=|x|^2-7|x|+6$,
в) $y=|x^2-7x+6|$, г) $y=||x|^2-7|x|+6|$.

14.291. $y=\frac{x}{|x|}\sin 2x$. **14.292.** $y=\frac{2-x}{|x+1|}(x^2-x-2)$.

14.293. $y=\frac{x-1}{|x-3|}(x^2-9)$. **14.294.** $y=\frac{x^2+5x-6}{x-1}$.

14.295. $y=\log_2\frac{x^2-4}{x-2}$. **14.296.** $y=0{,}5^{\frac{2x^2-6x}{x-3}}$.

14.297. $y=\log_3\frac{x^2-9}{|x|-3}$. **14.298.** $y=\left|\log_2\frac{x-4}{x^2-16}\right|$.

14.299. Отличаются ли один от другого графики функций $y=\lg x^2$ и $y=2\lg x$?

14.300. Построить на одном чертеже графики функций $y=\lg x^2$ и $y=\lg^2 x$.

14.301. На вступительных экзаменах один из поступающих предложил следующее решение доставшегося ему уравнения

$$\sin 2x+7\cos 2x+7=0:$$

выразил $\sin 2x$ и $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$ и получил уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+\frac{7(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x}+7=0,$$

откуда нашел, что $\operatorname{tg} x=-7$ и $x=\pi k-\operatorname{arctg} 7$. Все ли тут хорошо?

14.302. Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и α не принадлежит первой четверти.

14.303. Доказать, что при всяком натуральном n разность $9^{2n+2}-64^{n+1}$ делится на 17.

14.304. Доказать, что при всяком натуральном n сумма $9^{n+1}+2^{6n+1}$ делится на 11.

14.305. Цифры трехзначного числа переписаны в обратном порядке. Показать, что разность между полученным и данным числами делится на 9.

14.306. Найти следующее произведение радикалов:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\ldots\sqrt[512]{a}.$$

14.307. Доказать, что множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=5, \\ y^{-1}+z^{-1}=3, \\ z^{-1}+x^{-1}=8 \end{cases}$$

пусто

14.308. В предположении, что $a \neq 10^n$ (a и n — целые), доказать, что $\lg a$ есть число иррациональное.

14.309. Возможно ли равенство $x=\log_2 x$?

14.310. Решить уравнение $\log_y x+\log_x y=2$.

14.311. Для каких углов первой четверти выполняется неравенство $\sin\alpha \geqslant \sin 2\alpha$?

14.312. Показать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом целого числа.

[**14.313.**] Найти значения x, при которых множество значений функции $y=x^2+5x+6$ принадлежит промежутку $[6; 12]$.

14.314. Доказать, что если квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами p и q имеет рациональные корни, то эти корни — целые числа.

14.315. Не решая уравнения $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=10$, показать, что множество его корней пусто.

14.316. Указать область определения и множество значений функции $y=\log_5 \sin x$.

14.317. Указать область определения функции $y=\sqrt{\log_3 \cos x}$.

14.318. Для каких значений x имеет смысл равенство

$$\lg \frac{x(x-4)}{1-x}=\lg x+\lg(x-4)-\lg(1-x)?$$

14.319*. При каких значениях x функция

$$y=|x-1|+|x-3|$$

имеет наименьшее значение? Найти это значение.

14.320. Известно, что дробь $\frac{a+b}{a-b}$ сократима (a, b — целые числа, $b \neq 0$, $a \neq b$). Сократима ли дробь $\frac{a}{b}$?

14.321. Имеет ли уравнение $x^3+2x-3=0$ отрицательные корни?

14.322. Многочлен a^4+2a^3+6a-9 разложить на множители.

14.323. Решить уравнение $x^{\frac{1}{\lg x}}=10$.

14.324. Решить уравнение $x^{\lg 2}\cdot 2^{-\lg x}=1$.

14.325. Вычислить без таблиц $\lg \operatorname{tg} 22^\circ+\lg \operatorname{tg} 68^\circ$.

14.326. Сумма трех степеней числа 3 с натуральными подряд идущими показателями, из которых меньший не меньше числа 2, делится без остатка на 117. Доказать.

14.327. Решить неравенство $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$.

14.328. Вычислить $\log_{a_1a_2\ldots a_k} x$, зная, что $\log_{a_1} x=b_1$, $\log_{a_2} x=b_2$, ..., $\log_{a_k} x=b_k$; $x\neq 1$.

14.329. У какого количества целых чисел их десятичные логарифмы в качестве характеристики имеют: а) одно и то же число n $(n>0)$; б) одно и то же число $-m$ $(m>0)$?

14.330. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-a)(y-b)=c, \\ \dfrac{x-a}{y-b}=c. \end{cases}$$

14.331. Катеты прямоугольного треугольника равны $\log_4 9$ и $\log_3 16$. Найти площадь треугольника.

14.332. Найти наибольшее значение функции $y=\frac{x^2}{x^4+25}$.

14.333. Найти все значения x, для которых существует сумма

$$\log_{1/2} x+(\log_{1/2} x)^2+\ldots+(\log_{1/2} x)^n+\ldots.$$

14.334. Доказать, что $x=1$ — единственный корень уравнения $x^3+3x-4=0$.

14.335. Какой знак имеет число $\log_{\pi/4} \operatorname{tg} 1$?

14.336. Имеет ли решение уравнение

$$\sin x=2\sin 47^\circ \cos 44^\circ?$$

14.337. Решить уравнение $\frac{4}{\sqrt[5]{(11x-1)^2}}=\frac{\sqrt[5]{(11x-1)^2}}{4}$.

14.338. Показать, что координаты только одной точки плоскости удовлетворяют уравнению

$$x^2-4x+y-6\sqrt{y}+13=0$$

и найти эту точку.

14.339. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y+z=2, \\ -x+y+z=4. \end{cases}$$

14.340. Показать, что уравнение $x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1=0$ имеет только один корень. Какой?

14.341. Многочлен $k^5+k^4-2k^3-2k^2+k+1$ разложить на множители.

14.342*. Решить уравнение $\cos 2x=x^2+1$.

14.343. Найти наибольшее значение функции $y=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$.

14.344. Найти наибольшее значение функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$.

[**14.345.**] Найти сумму

$$4-\frac{8}{3}+\frac{16}{9}-\frac{32}{27}+\ldots+4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\ldots.$$

14.346. Решить уравнение $\cos(\pi x^2)=-1/2$.

14.347. Решить уравнение $\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)=1$.

14.348. При каких значениях a уравнение $1+\sin^2 ax=\cos x$ имеет единственное решение?

14.349. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов, расположенных на нечетных местах. Определить знаменатель прогрессии.

[**14.350.**] Найти

$$1+2^x+2^{2x}+\ldots+2^{kx}\ldots,$$

если k — число натуральное, а $x<0$.

14.351. Без преобразования уравнения $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=17$ показать, что множество его решений пусто.

14.352. Пусть A, B, C — углы треугольника. Показать, что

$$\sin A\cdot\sin B-\cos C=\cos A\cdot\cos B.$$

14.353. Дано уравнение $3\sin 2x+\cos 2x=4$. Имеет ли оно решение?

14.354. При каких значениях k корни уравнения

$$x^2-(2k+1)x+k^2=0$$

относятся, как $1:4$?

14.355. При каких значениях a уравнение

$$x^2-2x-\log_3 a^2=0$$

имеет корни?

[14.356.] Составить биквадратное уравнение, если числа $\sqrt{3}-1$ и $\sqrt{3}+1$ являются двумя его корнями.

14.357. Решить уравнение $3^{2+\log_9 25}=5\cdot 9^{\sqrt{x}}$.

14.358. Указать наименьшее значение функции

$$y=\log_2(x^2-4x+20).$$

14.359. Может ли синус какого-либо угла быть равным:

$$1)\ \lg a+\frac{1}{\lg a}\ (a>0,\ a\neq 1);\quad 2)\ \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^{-1};$$

$$3)\ \cos 40^\circ+\cos 50^\circ?$$

14.360. Найти без помощи таблиц $c=\sqrt[15]{a^{-5}b^3}$, если $\lg a=\bar{1},3502$, а $\lg b=13,9170$.

Используя определение предела последовательности, доказать справедливость равенств (14.361 — 14.364):

14.361. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n+7}{2n}=4$. 14.362. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n-5}{3n}=3$.

14.363. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}=\frac{1}{3}$. 14.364. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n}-8}{2\sqrt{n}+10}=\frac{5}{2}$.

14.365. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$. Найти первое значение N_1 такое, что при $n>N_1$ выполняется неравенство $\left|\frac{2n}{n+3}-2\right|<0,1$. Найти N_1 для $\varepsilon=0,01$.

Вычислить пределы последовательностей, заданных общим членом (14.366—14.369):

14.366. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot n!+(n+1)(n+1)!}{(n+2)!}$. 14.367. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

14.368. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sin n}{n^2+1}$. 14.369. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{2^n}$.

14.370. Последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой $a_{n+1}=2a_n-1$, $n \geqslant 1$.

1) Найти общий член последовательности, если $a_1=4$.
2) Существует ли предел (a_n)?

14.371*. Дана последовательность (x_n):

$$\sqrt{5},\ \sqrt{5+\sqrt{5}},\ \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}},\ \ldots$$
$$\ldots,\ \underbrace{\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\cdots+\sqrt{5}}}}\ldots}_{n \text{ операций извлечения корня}}$$

Доказать методом полной математической индукции, что последовательность (x_n) ограничена сверху числом $\sqrt{5}+1$. Убедиться в том, что (x_n) монотонно возрастает и вычислить $\lim x_n$.

14.372. Доказать, что функции $f(x)=\frac{8}{x}$, $\varphi(x)=\frac{15}{x}$ не имеют предела при $x \to 0$. Доказать также, что при $x \to 0$ не имеют предела сумма, разность и произведение этих функций, но существует $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Вычислить пределы* (**14.373—14.394**):

14.373. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$.

14.374. $\lim\limits_{x\to 2/5}\dfrac{5x^3-2x^2+5x-2}{5x^4-2x^3-5x^2+2x}$.

14.375. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x}$.

14.376. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}$.

14.377. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2+2x^3}$.

14.378. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3}$.

14.379. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$.

* Здесь и далее, когда $x \to \infty$, можно полагать, что $x \in N$.

14.380. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$.

14.381. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{4x^2+7}+2x\right)$.

14.382. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\cdot\sin\frac{4}{x}$.

14.383. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2+3x-1)\cdot\operatorname{tg} x}{x^2+2x}$.

14.384. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-4x+3)\sin(x-1)}{(x-1)^2}$.

14.385. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$. 14.386. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{\sin}$.

14.387. $\lim\limits_{\alpha\to-\pi/4}\frac{\sin\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}$.

14.388. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{1+5+5^2+\cdots+5^n}$, где $n\in N$.

14.389. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$, где $n\in N$.

14.390. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}\right)$,

где $n\in N$.

14.391. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$.

14.392. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}+\frac{1}{n}\right)$.

14.393. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\cdots+\frac{5^n+2^n}{10^n}\right)$, где $n\in N$.

14.394. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x+x^2+\cdots+x^n)$,

где $|x|<1$ и $n\in N$.

14.395. Найти предел переменной

$$x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \text{ при } n\to\infty.$$

Вычислить пределы и подтвердить или отвергнуть данные высказывания (14.396—14.426):

14.396. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{3x}=5+\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{8-x^3}$.

14.397. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2t+3}{t+\sqrt[3]{t}} > \lim\limits_{x\to-1/2}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$.

14.398. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1} \geqslant \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n-1)(n-2)(n-3)}$.

14.399. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{8-x}-\sqrt[3]{8+x}} < \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-5}$.

14.400. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}-\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)} >$

$> \lg 0{,}005.$

14.401. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1} \neq \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-\operatorname{tg}2x}{x^2\sin x}$.

14.402. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+8}{3-3x-2x^4}=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{12}{8-x^3}\right)$.

14.403. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} < \cos\dfrac{\pi}{10}$.

14.404. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}-1} > \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-8}{2n^2-n+10} >$

$> \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{4x^2}$.

14.405. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6} > \lim\limits_{x\to5}\dfrac{5-x}{\sqrt{5}+\sqrt{x}} >$

$> \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x-\pi)}{\cos 3\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

14.406. $\lim\limits_{x\to-\pi/4}\dfrac{\cos 2x}{\cos x+\sin x} : \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x^2+1}{x^4+4x^3-3x^2+2} < \cos 1^\circ$.

14.407. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x} : \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2} =$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+5x+2}}{4x+5}$.

14.408. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x^2-4x}{x^2-1}\cdot\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2} < 0.$

14.409. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^3-8}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}{\sin 2x-\sin x}\geqslant 0.$

14.410. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{5x^3}:\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt[3]{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^6+2x-1}}=0.$

14.411. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^5-1}}{x^3+4}:\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}=0.$

14.412. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-1}{2n^2+5n+4}>\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}6x}{\sqrt{1-\cos 4x}}.$

14.413. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{9x^3+9x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}.$

14.414. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 4x}{2x^2}=0{,}5\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+x^2-4x-4}{2x+4}.$

14.415. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+3x^2}{(x+2)^2}.$

14.416. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{\sin 2x-2\operatorname{tg}x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 2/3}\frac{9x^2-12x+4}{27x^3-8}.$

14.417. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{2-\sqrt{5-x^2}}:\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\cos\frac{1}{x}\right)=1.$

14.418. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{\sin 2x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x-\sqrt{x^2-4}}{x}=-1.$

14.419. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x(x^2-4)}-\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^{x+2}-16}{4^x-2^4}=1.$

14.420. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}}{4+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt[3]{x}+x}.$

14.421. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x^3-40}{12+4x-3x^2-x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2x-\sin^2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=12.$

14.422. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+x}}{\sqrt[5]{x+4}+4x}.$

14.423. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(1-x^3)}{x^3-2x^2-x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$

14.424. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{27x^3} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+4}-2} = 1.$

14.425. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sin(x-2)} : \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right) = 2.$

14.426. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{\sqrt[3]{x^2-3}-\sqrt[3]{x-1}} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{3x+\sqrt[4]{x+x^3}} = 1.$

14.427. Найти a при условии, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-1)(3-x)(ax+2)}{5x^3-8x^2+4} = 5.$$

Найти производные функций (14.428—14.449):

14.428. $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3}.$

14.429. $y = (x^4 - x^2 + 1)^3.$

14.430. $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x-1}.$

14.431. $y = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}.$

14.432. $y = \lg \dfrac{10-x}{x+2}.$

14.433. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 7x^2 + 1}.$

14.434. $y = (\sin^2 x + 1)\cdot e^x.$

14.435. $y = \sqrt[3]{x^2-1}\,(x^4-1).$

14.436. $y = \ln\sqrt{x^2-1}.$

14.437. $y = e^{x^3 - 5x^2}.$

14.438. $y = \sqrt[3]{x(1-x)^2}.$

14.439. $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}.$

14.440. $y = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x.$

14.441. $y = x^2 \cos\dfrac{1}{x}.$

14.442. а) $y = \cos^2 3x$; б) $y = \sin^2 \dfrac{x}{2}.$

14.443. $y = x + \sin x \cdot \cos x.$

14.444. а) $y = \operatorname{tg}\sin x$; б) $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x.$

14.445. $y = \dfrac{2}{3}\left(x^3 - \sqrt{(x^2-1)^3}\right) - x.$

14.446. а) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4x}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3}.$

14.447. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x}.$

14.448. а) $y = (x^3+1)\cos 2x$; б) $y = \sin 2x \operatorname{tg} x.$

14.449. а) $y=x\sqrt[3]{3x^2+1}$; б) $y=\sin\frac{\pi}{10}-\ln\frac{3}{x}$.

14.450. Решить уравнение $f'(x)-\frac{2}{x}\cdot f(x)=0$, если

$$f(x)=x^3\ln x$$

14.451. Решить неравенство $f'(x)<g'(x)$, если

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x};\quad g(x)=5x+\frac{1}{x}.$$

14.452. Решить неравенство $f'(x)+\varphi'(x)\leqslant 0$, если

$$f(x)=2x^3+12x^2,\quad \varphi(x)=9x^2+72x.$$

14.453. Придумать формулу вида $y=f(x)$, выражающую функцию, непрерывную в окрестности точки $x=0$, если при $x=0$ не существует ни $f'(x)$, ни $(f^2(x))'$, но существует $(f^3(x))'$.

Вычислить значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной (14.454—14.475):

14.454. $f(x)=\sqrt{x^2+3}+\frac{2x}{x+1}$; $f'(1)=?$

14.455. $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+2}$; $f'(2)=?$

14.456. $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{3}{x}$; $f'(3)=?$

14.457. $f(x)=x-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}$; $f'(-1)=?$

14.458. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{x+1}$; $f'(1)=?$

14.459. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$; $f'(0)=?$

14.460. $f(x)=\sin 4x\cos 4x$; $f'(\pi/3)=?$

14.461. $f(x)=\sin^2 x^2$; $f'(0)=?$

14.462. $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$; $f'(\pi/2)=?$

14.463. $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$; $f'(\pi/12)=?$

14.464. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$; $f'(2)=?$

14.465. $f(x)=5(x+1)^2\sqrt[5]{x-1}$; $f'(2)=?$

14.466. $f(x)=\sqrt{x^2-1+\sqrt[3]{x}}$; $f'(1)=?$

14.467. $f(x)=\frac{1}{2}\sin x\cdot\operatorname{tg}2x$; $f'(\pi/2)=?$

14.468. $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$; $f'(0)=?$

14.469. $f(x)=\frac{2^{2x}}{\sqrt{2-2^{2x}}}$; $f'(0)=?$

14.470. $f(x)=\sin^3\frac{x}{2}$; $f'(\pi/2)=?$

14.471. $f(x)=2^{x-2x^2-1}$; $f'(0)=?$

14.472. $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$; $f'(0)=?$

14.473. $f(x)=(x^2-x)\cos^2 x$; $f'(0)=?$

14.474. $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$; $f'(\pi)=?$

14.475. $f(x)=\frac{x-2}{\sin^2 x}$; $f'(\pi/2)=?$

14.476. Найти вторую производную функции $f(x)$ и вычислить ее значение при указанном значении x:

а) $f(x)=x^2\ln x+\cos 2x$; $f''(1)=?$ $f''(\pi)=?$

б) $f(x)=\sin\frac{x}{3}+x\ln x^2$; $f''(3)=?$ $f''(\pi/2)=?$

14.477. Выяснить знак производной функции $y=\sqrt{4x+9}(x^2-16)$ в точке $x=0$.

14.478. На какое множество отображает производная функции $y=\sqrt[4]{x^3}$ промежуток $[1/16;\ 81]$?

14.479. Найти образ отрезка $[-1;\ 3]$ при отображении, заданном производной функции $y=x^4-6x^2+1$.

14.480. Найти множество, на которое отображается луч $[1;\ \infty]$ производной функции $y=x(\ln x-1)$.

14.481. Функция $y=2\cos^2(4x-1)$ рассматривается на всей числовой оси. На какое множество отображает числовую ось производная данной функции?

14.482. Найти образ отрезка $[0;\ 0{,}5]$ при отображении, заданном производной функции $y=\operatorname{tg}3x$.

14.483. Найти пересечение множеств, на которые отрезок $[0; 1]$ отображается производными функций $y=\frac{x+3}{x-5}$ и $y=\sqrt[3]{6x+5}$.

14.484. Найти пересечение множеств, на которые отображают отрезок $[1; 9]$ производные функций $y=x\ln x-x$ и $y=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

14.485. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{4+3x-x^2}$ и область определения ее производной.

14.486. Дано: $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^3+1}$ и $g(x)=xe^{-x}$. Показать, что $f'(2)$ является корнем уравнения $g'(x)=0$.

14.487. Функция задана формулой $f(x)=e^{ax^2+bx+1}$. Найти значения постоянных величин a и b, если $f(1)=f(0)=f'(0)$.

14.488. При каких значениях постоянных величин a и b функция, заданная формулой

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1, & \text{при } x\geqslant 0,\\ (x+a)e^{-bx}, & \text{при } x<0,\end{cases}$$

будет дифференцируема в точке $x=0$?

14.489. Функция задана формулой $f(x)=5\sin x+3\cos x$. Решить уравнение $f'(0)=f'(x)$.

14.490. Функция задана формулой $f(x)=e^{-x}(x^2+3x+1)$. Решить уравнение $f'(x)=2f(x)$.

14.491. Можно ли почленно дифференцировать неравенство?

14.492. Дана функция $f(x)=|x|$. Написать выражение первообразной функции.

14.493. Написать дифференциальное уравнение для гармонического колебания:

а) $y=-4\sin(2x+3)$; б) $y=3{,}8\cos(0{,}6x-10)$.

14.494. Найти два отличных от нуля решения дифференциального уравнения:

а) $y'=-36y$; б) $y''=-36y$.

14.495. Построить раздельно графики функций

$$f(x)=x,\quad \varphi(x)=|x| \quad \text{и} \quad g(x)=x|x|$$

в окрестности точки $x=0$. Несмотря на то, что $f(x)$ дифференцируема при $x=0$, а $\varphi(x)$ — нет, их произведение $g(x)=x|x|$ имеет производную в точке $x=0$.

Обосновать правильность этих утверждений и найти $g'(0)$.

14.496. На примере функции $f(x)=x+\sin x$ показать, что производная монотонной функции не обязательно сама монотонна. Придумать другие примеры.

14.497. Показать, что при любых значениях постоянных p и q функция, заданная формулой

$$f(x)=\begin{cases} p\cos x+q\sin x & \text{при } x\geqslant 0, \\ px+q+1 & \text{при } x<0, \end{cases}$$

не дифференцируема в точке $x=0$.

14.498. Точка движется прямолинейно по закону $s(t)=\sqrt[3]{t^2}$. Показать, что ее ускорение обратно пропорционально квадрату пройденного расстояния.

14.499. Дана функция $f(x)=0{,}5\,(x^2-\cos x)$. Пользуясь соображениями непрерывности, выяснить, имеют ли уравнения $f(x)=7{,}8$ и $f'(x)=7{,}8$ хотя бы по одному корню на промежутке $[2\pi;\ 3\pi]$.

14.500. Найти все значения постоянной величины a, при которых производная функции, заданной формулой $y=e^{ax^3+3x^2+x}$ принимает только положительные значения на всей области определения данной функции.

14.501. Найти сумму

$$x+x^2+\ldots+x^n,$$

а затем найти сумму

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}.$$

14.502. Написать уравнение касательной к графику функции $y=\frac{x^3+1}{3}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

14.503. На графике функции $y=x(x-4)^3$ найти точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

14.504. Показать, что касательные, проведенные к графику функции $y=\frac{x-4}{x-2}$ в точках его пересечения с осями координат, параллельны.

14.505. Определить, под каким углом синусоида $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат.

14.506. Показать, что на графике функции $y=x^3+x^2+x+1$ нет точек, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

14.507. В каких точках касательные к кривой $y=\frac{x^3}{3}-x^2-x+1$ параллельны прямой $y=2x-1$?

14.508. В каких точках касательная к графику функции $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x-4$ образует с осью Ox угол 45°?

14.509. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, проведенная к кривой $y=2x^3-x$ в точке пересечения этой кривой с осью Oy?

14.510. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, проведенная к кривой $y=x^3-x^2-7x+6$ в точке $M_0(2; -4)$?

14.511. Известно, что прямая $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{32}$ является касательной к линии, заданной уравнением $y=0{,}5x^4-x$. Найти координаты точек касания.

14.512. Написать уравнение касательной к графику функции $y=x^2e^{-x}$ в точке $x=1$.

14.513. Написать уравнения касательных к кривым $y=2x^2-5$ и $y=x^2-3x+5$, проведенных через точку пересечения этих кривых

14.514. Найти угол, который образует с осью ординат касательная к кривой $y=\frac{2}{3}x^5-\frac{1}{9}x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x=1$.

14.515. Написать уравнения касательных к кривой $y=x^2-4x+3$, проходящих через точку $M(2; -5)$. Сделать чертеж.

14.516. Написать уравнение касательной к графику функции $y=\ln(2e-x)$ в точке $x=e$.

14.517. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=2-4x-3x^2$ в точке $x=-2$.

14.518. В какой точке угловой коэффициент касательной к графику функции $y=2x^3-2x^2+x-1$ равен 3?

14.519. В какой точке касательная к графику функции $y=\frac{x+2}{x-2}$ образует угол 135° с осью Ox?

14.520. Дана функция $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$.

а) Составить уравнение касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x=\pi/6$ (Окончательные числовые значения округлять до второго десятичного знака.)

б) В каких точках промежутка $0\leqslant x\leqslant\pi$ касательная к графику данной функции составляет с осью Ox угол 60°?

14.521. Дана функция $f(x)=\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$.

а) Найти угол, образованный с осью Ox касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x=\pi/3$.

б) Найти точки минимума на промежутке $[0; \pi]$.

14.522. В точке пересечения графиков функций $y=6/\sqrt{x}$ и $y=12x^{-1/2}-2x^{1/2}$ проведена касательная к каждому графику. Найти разность углов, образованных этими касательными с положительным направлением оси Ox.

14.523. В точке M (1; 8) к кривой $y=\sqrt{(5-x^{2/3})^3}$ проведена касательная. Найти длину ее отрезка, заключенного между осями координат

14.524. Найти площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к кривой $y=\sqrt{x^2-5}$ в точке M (3; 2).

14.525. К гиперболе $y=4/x$ проведены две касательные: одна — в точке M (2; 2), а другая — параллельно прямой $y=-4x$. Найти площади треугольников, образованных каждой из этих касательных с осями координат.

14.526. Отрезок произвольной касательной к кривой $y=x^2$, заключенный между точкой касания и осью Ox, спроектирован на ось Ox. Показать, что эта проекция вдвое больше проекции аналогичного отрезка касательной к кривой $y=x^4$ с той же абсциссой точки касания.

14.527. В произвольной точке кривой $y=\sqrt{2x-x^2}$ проведена касательная. Показать, что длина отрезка касательной от точки касания до пересечения с осью Oy равна ординате точки пересечения.

В задачах **14.528—14.531** указан закон прямолинейного движения $s(t)$; s и t измеряются соответственно в метрах и секундах.

14.528. $s(t)=\frac{4t+3}{t+4}$. Найти скорость в момент $t=9$.

14.529. $s(t)=2t^3-3t+4$. Найти скорость и ускорение в момент $t=2$.

14.530. $s(t)=0{,}5t^4-5t^3+12t^2-1$. В какие моменты времени ускорение движения тела равно нулю?

14.531. $s(t)=8-2t+24t^2-0{,}3t^5$. В какой момент времени тело имеет наибольшую скорость? Найти эту скорость.

14.532. Движения двух тел вдоль одной прямой заданы уравнениями $s_1=4t^2+2$ (м), $s_2=3t^2+4t-1$ (м). Найти скорости движения тел в те моменты, когда тела «сходятся в одной точке».

14.533. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $s_1=2t^3-5t^2-3t$ (м), $s_2=2t^3-3t^2-11t+7$ (м). Найти ускорения движущихся материальных точек в тот момент, когда скорости их равны (время измеряется в секундах).

14.534. Две точки движутся по оси Ox. Координата x_1 первой точки определяется формулой $x_1=3t^2-5$, координата x_2 второй точки — формулой $x_2=3t^2-t+1$, (x_1, x_2 — в метрах, t — в секундах). Найти скорости движения точек в тот момент, когда координаты точек равны.

14.535. Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $h(t)=4+8t-5t^2$ (м). Найти скорость тела в момент соприкосновения с землей. (Ускорение g считается равным 10 м/с^2.)

14.536. Точка с массой m_0 движется прямолинейно по закону $s(t)=\frac{2}{2t-1}$. Доказать, что сила, действующая на тело, пропорциональна кубу пройденного пути.

14.537. Тело с массой m_0 движется прямолинейно по закону $s(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$ (α, β, γ — постоянные). Доказать, что сила, действующая на тело, постоянна.

14.538. Радиус шара r (см) равномерно возрастает со скоростью 2 см/с. С какими скоростями возрастают поверхность и объем шара? Найти эти скорости в момент, когда r достигнет 10 см. (При $t=0$ величина $r=0$.)

14.539. Угол α (в радианах), на который повернется колесо через t с, равен $\alpha=3t^2-12t+36$. Найти угловую скорость ω в момент $t=4$ с и определить, в какой момент времени колесо остановится.

14.540. В тонком неоднородном стержне, имеющем длину 25 см, масса (в граммах) распределяется по закону $g(l)=4l^2-2l+5$, где l — расстояние от начала стержня до любой его точки. Найти плотность стержня на расстоянии 4 см от начала стержня и среднюю плотность стержня.

14.541. Функция задана формулой $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$.

Показать, что эта функция возрастает в любой точке, принадлежащей ее области определения.

14.542. Функция задана формулой $y=\sqrt{ax^3-6x^2+3x}$ Найти все значения постоянной величины a, при которых данная функция определена и монотонно возрастает при всех $x>0$.

Найти точки экстремума функций (14.543—14.546):

14.543. $y=\frac{x}{\ln x}$. 14.544. $y=\frac{\ln x+2}{x}$.

14.545. $y=x^2e^{-x}$. 14.546. $y=x^3e^{-x}$.

14.547. Найти экстремум функции $y=x^2-\ln(1+2x)$.

14.548. Найти точки экстремума функции $y=e^{-x}-e^{-2x}$ и угол между осью Ox и касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x=0$.

14.549. Найти точки экстремума функции $y=e^{-x}\sin x$ и угол между осью Ox и касательной к графику данной функции в точке с абсциссой $x=0$.

14.550. Найти точки экстремума функции $y=x-\ln(1+x)$ и точку на графике данной функции, в которой касательная к графику параллельна прямой, проходящей через точки A (2, 3) и B (—1, 4).

14.551. Найти экстремумы функции $y=x^3+\frac{3}{x}$ и написать уравнение касательной к графику в точке с абсциссой $x=-2$

14.552. Дана функция $y=-x^4-8x^2+9$. Найти ее экстремумы и ординаты точек пересечения с графиком функции $y=-9x^2+9$.

14.553. Показать, что функция $y=x^3+4x$ возрастает на всей числовой оси.

14.554. Найти, при каком значении p функция $f(x)=\cos x-px+q$ убывает на всей числовой оси.

14.555. Доказать, что функция $y=2x+\sin x$ возрастает на всей числовой оси.

14.556. Доказать, что функция $y=x+\frac{1}{1+x^2}$ возрастает на всей числовой оси.

14.557. Исследовать функцию $y=3\sin x-4\cos x$ на монотонность.

14.558. Исследовать функцию $y=\frac{1}{x^2+x+1}$ на монотонность.

14.559. Исследовать функцию $y=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-5)^2}$ на монотонность и экстремумы.

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных промежутках (14.560—14.578):

14.560. $y=x^3-3x^2+3x+2$; $x\in[-2; 2]$.

14.561. $f(x)=3x^4+4x^3+1; \quad x\in[-2;\ 1]$.

14.562. $y=x^5-x^3+x+2; \quad x\in[-1;\ 1]$.

14.563. $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}; \quad x\in[-5;\ -1]$.

14.564. $y=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}; \quad x\in[1;\ 6]$.

14.565. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}; \quad x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

14.566. $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}\cdot\sin x; \quad x\in[0;\ \pi]$.

14.567. $y(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+16}}$; а) $x\in[-3;\ 3]$; б) $x\in\left[2\sqrt{5};\ 8\right]$.

14.568. $f(x)=x+\cos^2 x; \quad x\in[0;\ \pi/2]$.

14.569. $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x; \quad x\in[\pi/6;\ \pi/3]$.

14.570. $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sin x, \quad x\in[0;\ \pi/2]$.

14.571. $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x,$

$x\in[-\pi/2;\ \pi/2]$.

14.572. $f(x)=\cos^2 x+\sin x$; а) $x\in[0;\ \pi/4]$; б) $x\in[\pi/3;\ \pi]$.

14.573. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2x-1}}$; а) $x\in[3/4;\ 2]$; б) $x\in[3/2;\ 3]$.

14.574. $f(x)=x+\dfrac{8}{x^4}$; а) $x\in[-2;\ -1]$; б) $x\in[1;\ 3]$.

14.575. $f(x)=(5-x)2^{-x}$; а) $x\in[-1;\ 0]$; б) $x\in[5;\ 6]$.

14.576. $f(x)=2^{\sqrt[3]{x^2}}$; а) $x\in[-8;\ -1]$; б) $x\in[-1;\ 1]$.

14.577. $y=3\sqrt[3]{(x-1)^2}+x$; а) $x\in[-7;\ 0]$; б) $x\in[1;\ 2]$.

14.578. $f(x)=2x^2-\ln x, \quad x\in[1;\ e]$.

14.579. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\cos x\sqrt{\sin x}$ в промежутке $[0;\ \pi/2]$.

14.580. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ и выяснить, в какой из точек $x_1=\log_5 4$, $x_2=\log_5 3$ заданная функция принимает большее значение.

14.581. Найти пересечение промежутка возрастания функции $f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{x}}$ и области определения функции $g(x)=\frac{1}{\lg x-\lg(4-x)}$.

14.582. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2$$

на промежутке $]0;\ \pi[$.

14.583. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$$

на промежутке $[0;\ 1[$, $n\in N$.

14.584. Найти промежуток возрастания функции $y=\frac{x}{\ln x}$, после чего установить, что больше: e^{π} или π^{e}.

С точностью до 0,01 найти экстремумы функций и указать промежутки их возрастания и убывания (**14.585—14.588**):

14.585. $y=e^{-x}-e^{-2x}$. **14.586.** $y=x^2e^{-x}$.

14.587. $y=e^{-x}\sin x$, если $0<x<\pi$.

14.588. $y=x+\ln(1-2x)$.

14.589. Число 18 разбить на такие два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

14.590. Число 180 разбить на три слагаемых так, чтобы два из них относились, как $1:2$, а произведение трех слагаемых было бы наибольшим.

14.591. Найти число, которое превышало бы свой квадрат на максимальное значение.

14.592. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью в 294 м^2 и разделить затем этот участок забором на две конгруэнтные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?

14.593. Прямоугольный лист жести имеет линейные размеры 5 дм$\times$8 дм. В четырех его углах вырезают одинаковые квадраты и делают открытую коробку, загибая края под прямым углом. Какова наибольшая вместимость полученной коробки?

14.594. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

14.595. Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма будет наибольшей?

14.596. Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a (м) указать треугольник наибольшей площади.

14.597. Боковые стороны и меньшее основание трапеции имеют одинаковые длины — по 50 см. Выбрать размер ее большего основания так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

14.598. Найти длины сторон прямоугольника с периметром 72 см, имеющего наибольшую площадь.

14.599. Найти длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами 18 см, 24 см, 30 см и имеющего с ним общий прямой угол.

14.600. Определить длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольную трапецию с длинами оснований 24 см, 8 см и длиной высоты 12 см. (Две вершины прямоугольника лежат на боковых сторонах трапеции, а две другие — на ее большем основании.)

14.601. В равнобедренный треугольник с длинами сторон 15 см, 15 см и 18 см вписан параллелограмм наибольшей площади так, что угол при основании у них общий. Найти длины сторон параллелограмма.

14.602. В какой круг можно вписать прямоугольник наибольшей площади с периметром, равным 56 см?

14.603. Боковая сторона равнобочной трапеции конгруэнтна ее меньшему основанию, длина которого a (м). Какова должна быть длина большего основания, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

14.604. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данной постоянной длине медианы, проведенной к его боковой стороне.

14.605. Величина угла при основании равнобедренного треугольника равна α. При каком значении α отношение длины радиуса вписанной в данный треугольник окружности к длине радиуса описанной окружности будет наибольшим? Чему равно наибольшее значение этого отношения?

14.606. Какие размеры нужно придать радиусу и высоте открытого цилиндрического бака, чтобы при данном объеме V на его изготовление пошло наименьшее количество листового металла?

14.607. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды имеет постоянную заданную площадь и наклонена к плоскости основания под углом, величина которого равна α. При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

14.608. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и составляет с плоскостью основания угол, величина которого равна α. При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

14.609. В конус с заданным постоянным объемом вписана пирамида; в ее основании лежит равнобедренный треугольник, у которого величина угла при вершине равна α. При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

14.610. Образующая конуса имеет постоянную длину и составляет с высотой конуса угол, величина которого равна α. В конус вписана правильная шестиугольная призма с равными длинами ребер (основание призмы лежит в плоскости основания конуса). При каком значении α боковая поверхность призмы будет наибольшей?

14.611. Переменная y обратно пропорциональна переменной x. Найти коэффициент k обратной пропорциональности и заполнить таблицу:

x		0,1	9,6
y	30		3,05

На графике заданной обратной пропорциональности найти точку, ближайшую к началу координат O (0; 0).

14.612. Известно, что мощность P, отдаваемая электрическим элементом, определяется по формуле

$$P=\frac{E^2R}{(r+R)^2},$$

где E — постоянная электродвижущая сила элемента, r — постоянное внутреннее сопротивление, R — внешнее сопротивление. Каким должно быть внешнее сопротивление R, чтобы мощность P была наибольшей?

Найти промежутки монотонности, точки экстремума и начертить эскизы графиков функций (14.613—14.616):

14.613. $y=2x^3+3x^2-1$. 14.614. $y=0{,}5x^4-4x^2$.

14.615. $y=x^4-10x^2+9$. 14.616. $y=\frac{x^2-4x}{x^2-4x+8}$.

Исследовать заданные функции и начертить эскизы их графиков (14.617—14.640):

14.617. $y=x^3-3x^2+2$.

14.618. $y=2x^3-15x^2+36x$.

14.619. $y=8+2x^2-x^4$.

14.620. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2-\frac{9}{4}$.

14.621. $y=\frac{1}{5}x^5-4x^2$.

14.622. $y=\frac{2}{1+x^2}$.

14.623. $y=\frac{x}{x^2+1}$.

14.624. $y=\frac{-5}{(x-2)^2+1}$.

14.625. $y=x^2+\frac{1}{x}$.

14.626. $y=x+\frac{4}{x^2}$.

14.627. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

14.628. $y=\frac{(x-2)^2}{x^2+4}$.

14.629. $y=\frac{x^3}{x^2+2}$.

14.630. $y=\frac{1}{x^2+8x}$.

14.631. $y=\frac{x+2}{x^2-9}$.

14.632. $y=\frac{4}{x^2-2x+2}$.

14.633. $y=\frac{1-x}{(x-2)^3}$.

14.634. $y=\frac{3x}{x^2+4x+4}$.

14.635. $y=\frac{x^2+2x}{x-1}$.

14.636. $y=\frac{x-1}{x^2-2x+2}$.

14.637. $y=\frac{2x}{x^2+x+1}$.

14.638. $y=\frac{x^2}{x^3-1}$.

14.639. $y=\frac{(x-3)^2}{x^2}$.

14.640. $y=\frac{1}{(x-1)(x-4)}$.

14.641. Применяя метод математической индукции, доказать, что при $x>0$ выполняется неравенство

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},\quad n\in N.$$

14.642. Найти функцию $F(x)$, график которой проходит через заданную точку $M_0(x;\ y)$, если:

а) $F'(x)=4x^2+9x^{-2}$; $M_0(3;\ -2)$;

б) $F'(x)=\frac{x^3}{3}-4x+\frac{1}{3}$; $M_0(2;\ 1)$.

Для данной функции $f(x)$ найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ (14.643—14.646):

14.643. $f(x)=x^4$; $M_0(-1; 2)$.

14.644. $f(x)=\sin 2x$; $M_0(0; 1)$.

14.645. $f(x)=\frac{1}{\sin^2 3x}$; $M_0\left(\frac{\pi}{12}; -1\right)$.

14.646. $f(x)=x^{-4}$; $M_0(2; -3)$.

14.647. Найти функцию $F(x)$, если известно, что $F'(x)=4x^3-3x^2$ и что $F(1)=3$.

14.648. Для функции $f(x)=\cos 4x$ найти первообразную $F(x)$, если известно, что $F(\pi/24)=-1$.

14.649. Найти функцию $S(x)$, если ее производная $S'(x)=2/\sqrt{5-x}$ и $S(1)=-1$.

Вычислить интегралы (14.650—14.775):

14.650. $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$.

14.651. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} \sin^2 2x\,dx$.

14.652. $\int\limits_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

14.653. $\int\limits_0^{\pi/4} (\sin 2t-\cos 2t)^2\,dt$.

14.654. $\int\limits_0^{3\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 \frac{2x}{9}}$.

14.655. $\int\limits_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3}-3x\right)dx$.

14.656. $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{2}\,dx$.

14.657. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cos x\,dx$.

14.658. $\int\limits_0^{2\pi/3} \sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)dx$.

14.659. $\int\limits_0^{2} (1+3x)^4\,dx$.

14.660. $\int\limits_9^{-54} \sqrt[3]{2-\frac{t}{9}}\,dt$.

14.661. $\int\limits_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$.

14.662. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x}}\,dx$.

14.663. $\int\limits_0^{2e} \frac{dx}{0,5x+1}$.

14.664. $\int\limits_0^{0,5}\left(4x-\frac{1}{2x+1}\right)dx.$ **14.665.** $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1+2x}}.$

14.666. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^{-1}dx.$ **14.667.** $\int\limits_0^{\pi}\cos^4 x\,dx.$

14.668. $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx.$ **14.669.** $\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{9+16x}}.$

14.670. $\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{(x+1)^3}.$ **14.671.** $\int\limits_{-1}^{15}\frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}.$

14.672. $\int\limits_0^{\pi}\sin 2x\cos 3x\,dx.$ **14.673.** $\int\limits_0^{\pi/2}\sin 4x\sin 5x\,dx.$

14.674. $\int\limits_0^{\pi/2}\cos 3x\cos 2x\,dx.$ **14.675.** $\int\limits_{-2}^{2}(10^{x/4}-\sin\pi x)\,dx.$

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями (14.676—14.683):

14.676. $y=x^3$, $y=1$ и $x=2$.

14.677. $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\pi/4$ и $x=\pi/4$.

14.678. $y=\sqrt{x}$, $y=2$ и $x=9$.

14.679. $y=x^3$ и $y=\sqrt{x}$.

14.680. $y=2x-x^2$ и $y=3/4$.

14.681. $y=x^4$ и $y=x$.

14.682. $y=1/x^2$, $y=0$, $x=0{,}5$ и $x=2{,}5$.

14.683. $y=5/x$ и $y=6-x$.

14.684. Чему равен путь, пройденный точкой, движущейся прямолинейно, за отрезок времени от $t_1=1$ с до $t_2=4$ с, если скорость точки $v(t)=(2t^2-3t)$ м/с? Чему равно ускорение этой точки в момент времени $t=2$ с?

14.685. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=\sqrt[3]{1+t}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 7 с. Чему равно ускорение тела в момент $t=7$ с?

14.686. Две точки начинают двигаться по прямой в один и тот же момент из одного места в одном направлении. Скорость первой точки $v_1(t)=\left(\sqrt{t}+t\right)$ м/с, а скорость второй точки $v_2(t)=\left(\sqrt[3]{t}+1\right)$ м/с. Чему будет равно расстояние между ними через 64 с?

14.687. Материальная точка движется по прямой со скоростью $v(t)=\sin t\cos t$ м/с. Найти уравнение движения точки, если при $t=\pi/3$ с пройденный путь равен 17/8 м.

14.688. Сила упругости пружины, растянутой на 10 см, равна 6 Н. Какая при этом работа произведена внешней силой?

14.689. Какую работу надо произвести, чтобы сжать пружину на 8 см, если сила 4 Н сжимает эту пружину на 0,5 см?

14.690. Сила, действующая на материальную точку, меняется равномерно относительно пройденного пути. В начале движения она равнялась 100 Н, а когда точка переместилась на 10 см, сила возросла до 600 Н. Найти функцию, определяющую соответствие между величиной работы A и путем s, пройденным от начала движения до любой точки траектории.

Глава 15

ГЕОМЕТРИЯ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ, ВЕКТОРОВ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

15.001. Найти стороны прямоугольного треугольника, если точка касания вписанной в него окружности делит один из катетов на отрезки длины m и n $(m<n)$.

15.002. Доказать, что сумма квадратов медиан любого треугольника составляет 75% от суммы квадратов его сторон.

15.003. В прямоугольном треугольнике найти биссектрису прямого угла, если гипотенуза треугольника равна c, а один из острых углов равен α.

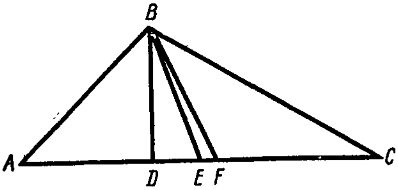

Рис. 15.1

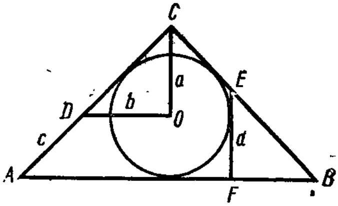

Рис. 15.2

15.004. Площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей полукругов, построенных на его катетах. Доказать.

15.005. Из каких одноименных конгруэнтных правильных многоугольников можно сложить паркет?

15.006. Тангенс тупого внешнего угла прямоугольного треугольника равен k. Найти тангенс острого угла треугольника, не смежного с данным внешним углом.

15.007. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом восьмиугольнике?

15.008. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник, площадь которого равна $3R^2$. Найти n.

15.009. Треугольник разбит медианами на шесть частей, не имеющих попарно общих внутренних точек. Сравнить площади этих частей.

15.010. Найти площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса R.

15.011. Доказать, что если в треугольнике $|BC|>|AB|$, то его высота BD, медиана BF и биссектриса BE расположены так, что точка E лежит между точками D и F (рис. 15.1).

15.012. Медиана некоторого треугольника совпадает с его биссектрисой Доказать, что такой треугольник — равнобедренный.

15.013. Даны отрезок $[AB]$ и прямая, не перпендикулярная отрезку, пересекающая его в точке, не являющейся серединой этого отрезка. Ученик построил точку

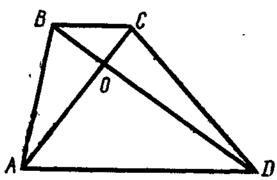

Рис. 15.3

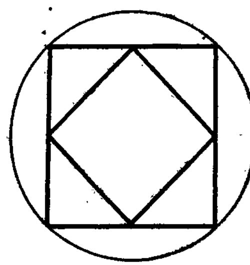

Рис. 15.4

B_1, симметричную точке B относительно данной прямой, и заметил, что теперь легко построить $\triangle$ ABC, для которого биссектриса угла ACB лежит на данной прямой. Как это можно сделать?

15.014*. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC вписана окружность с центром O и построена касательная $(EF) \perp (AB)$, пересекающая катет BC в точке E и гипотенузу AB в точке F (рис. 15.2). Доказать, что $a=b=c=d$, где $a=|CO|$, $b=|OD|$, $(OD) \parallel (AB)$, $c=|AD|$, $d=|EF|$.

15.015. Если в треугольнике две медианы конгруэнтны, то треугольник равнобедренный. Доказать.

15.016. Пары точек A и A_1, B и B_1 расположены симметрично относительно одной прямой. Доказать, что эти четыре точки лежат на одной окружности или же на одной прямой.

15.017. Если две стороны и медиана одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны. Доказать. (Разобрать два случая.)

15.018. Доказать, что в любой трапеции $ABCD$ (рис. 15.3) треугольники AOB и COD равновелики.

15.019. В окружность радиуса $R=1$ см вписан квадрат, а в квадрат — второй квадрат, вершины которого делят пополам стороны первого квадрата (рис. 15.4).

Не вычисляя длины стороны первого квадрата, доказать, что площадь второго квадрата равна 1 см^2.

15.020. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

15.021 Построить циркулем и линейкой угол в 30°.

15.022. Из каких точек плоскости данный отрезок виден под данным углом?

15.023. Три средние линии треугольника разбивают его на четыре части. Если площадь одной из них равна S, то чему равна площадь данного треугольника?

15.024*. Показать, что если A, B и C — углы треугольника, то $2(\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C})\leqslant 3$. В каком случае достигается равенство?

15.025. Каждый из двух конгруэнтных кругов радиуса R проходит через центр другого. Найти площадь их пересечения.

15.026. Какую фигуру образует множество всех вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание?

15.027. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C, другой — в точках D и E. Известно, что $|AB|=7$, $|BC|=7$, $|AD|=10$. Определить $|DE|$.

15.028. Непараллельные стороны трапеции продолжены до пересечения. Доказать, что прямая, проходящая через полученную точку и точку пересечения диагоналей, делит каждую из параллельных сторон трапеции на две конгруэнтные части.

15.029 Выразить площадь круга через длину его окружности.

15.030. Доказать, что из трех медиан прямоугольного треугольника наименьшую длину имеет та, которая проведена к гипотенузе.

15.031. Через точку, принадлежащую меньшей стороне треугольника, провести прямую, отсекающую от данного треугольника треугольник, подобный данному. Показать, что существуют четыре таких прямых.

15.032. Каково наибольшее возможное число острых углов в произвольном выпуклом многоугольнике?

15.033. Какую фигуру образует множество ортоцентров (точек пересечения высот) всех треугольников, имеющих общую сторону при условии, что углы, противолежащие этой стороне, конгруэнтны?

15.034. В прямоугольный круговой сектор радиуса R вписан квадрат так, что две его вершины лежат на крайних радиусах, две — на дуге сектора. Найти сторону квадрата.

15.035. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри правильного многоугольника, до прямых, содержащих его стороны, равна произведению апофемы многоугольника на число его сторон.

15.036*. Каждая сторона выпуклого четырехугольника меньше a. Доказать, что его площадь меньше a^2.

15.037. В круге с радиусом 4 м найти длину хорды, которая видна из любой точки меньшей дуги окружности под углом в 135°.

15.038. В круге радиуса a найти длину хорды, которая из любой точки большей дуги окружности видна под углом в 30°.

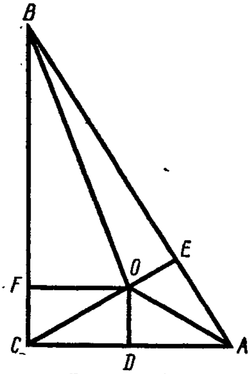

Рис. 15.5

15.039. Дан треугольник ABC. На основании BC построить треугольник с той же площадью, но с углом при вершине B, равным половине угла B данного треугольника.

15.040. Можно ли сказать, что конгруэнтные фигуры равновелики? Равновеликие конгруэнтны? Привести примеры.

15.041. Сформулировать теорему, обратную теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника

15.042. Сформулировать какое-либо утверждение, верное вместе с ему обратным. Сформулировать какое-либо верное утверждение, но такое, для которого обратное утверждение является неверным.

15.043. Пусть $[BO]$ — биссектриса угла B прямоугольного треугольника ABC, D — середина катета AC, $(DO) \perp (AC)$, $(OE) \perp (AB)$, $(OF) \perp (BC)$, $[AB]$ — гипотенуза (рис. 15.5). Легко доказать, что $\triangle BOE \cong \triangle BOF$, откуда

$$|BE| = |BF|. \qquad (1)$$

Далее, так как $|OA| = |OC|$, то $\triangle OEA \cong \triangle OCF$, откуда

$$|AE| = |FC|. \qquad (2)$$

Складывая равенства (1) и (2), получаем, что $|AB| =$

$= |BC|$, т. е. что длина гипотенузы равна длине катета. Найти ошибку в приведенном доказательстве.

15.044. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Построить график функции, выражающей зависимость площади сечения от расстояния между вершиной пирамиды и секущей плоскостью.

15.045. Высоты всех боковых граней некоторой пирамиды конгруэнтны. Под каким углом они наклонены к плоскости основания, если площадь полной поверхности пирамиды в 1,5 раза больше площади ее боковой поверхности?

15.046. Для правильного тетраэдра с ребром длиной $\sqrt{2}$ см определить расстояние между двумя его скрещивающимися ребрами.

15.047. Найти площадь полной поверхности конуса, если его боковая поверхность развертывается в круговой сектор радиуса, равного единице, и с прямым центральным углом.

15.048. На сколько дальше центр верхнего основания куба с ребром, равным единице, удален от вершины нижнего основания, чем от его стороны?

15.049. Одно из боковых ребер наклонного параллелепипеда составляет равные острые углы с прилежащими к нему сторонами нижнего основания. Что собой представляет проекция прямой, содержащей это ребро, на плоскость нижнего основания? При каком условии эта проекция и диагональ основания лежат на одной прямой?

15.050. Через диагональ нижнего основания произвольного параллелепипеда и середину не пересекающего ее бокового ребра проведена плоскость. Как относятся объемы образовавшихся при этом частей параллелепипеда?

15.051. В основании пирамиды лежит треугольник, длины сторон которого 30 см, 40 см и 50 см. Вершина большего острого угла основания принадлежит боковому ребру длиной 72 см. Это боковое ребро перпендикулярно плоскости основания. Вычислить полную поверхность пирамиды.

15.052. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны. Найти объем пирамиды, если площади ее боковых граней равны S_1, S_2 и S_3.

15.053. Показать, что если в основании пирамиды, имеющей конгруэнтные боковые ребра, лежит прямоугольный треугольник, то одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна к плоскости основания.

15.054. Показать, что если пирамида имеет конгруэнтные боковые ребра, то вокруг нее можно описать сферу и что радиус этой сферы равен квадрату длины ребра, деленному на удвоенную длину высоты пирамиды.

15.055. Всякая ли пирамида обладает тем свойством, что вокруг нее можно описать сферу? Если вокруг пирамиды можно описать сферу, то где лежит центр этой сферы?

15.056. Показать, что если вокруг основания пирамиды можно описать окружность, то все плоскости, перпендикулярные к боковым ребрам пирамиды и делящие их пополам, пересекаются в одной точке.

15.057. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и каждое из них равно a. Определить полную поверхность и объем пирамиды.

15.058. Найти угол между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба.

15.059. Какую фигуру образует множество всех точек, отстоящих от данной плоскости на расстоянии, равном a, и от фиксированной точки данной плоскости на расстоянии, равном b $(a < b)$?

15.060. Какому условию должен удовлетворять четырехугольник, чтобы на нем, как на основании, можно было построить пирамиду с равным наклоном всех боковых граней?

15.061. Даны две скрещивающиеся прямые. Можно ли провести две пересекающиеся прямые так, чтобы каждая из них пересекала обе данные прямые?

15.062. Пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник с катетами 9 см и 8 см, вписана в конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти объем пирамиды.

15.063. Около правильной пирамиды с высотой 27 см описана сфера радиуса 18 см. Найти угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.

15.064. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти расстояние от прямой, проходящей через ребро AA_1, до прямой, проходящей через диагональ B_1D.

15.065. Существует ли в пространстве точка, равноудаленная от всех вершин параллелограмма? От всех прямых, содержащих его стороны? Каким свойством должен обладать параллелограмм, чтобы точка, равноудаленная от его вершин, была бы равноудалена и от прямых, содержащих его стороны?

15.066. Каким свойством должна обладать трапеция, чтобы в пространстве существовала точка, равноудаленная от ее вершин? Если данная трапеция таким свойством обладает, то какую фигуру представляет множество всех таких точек?

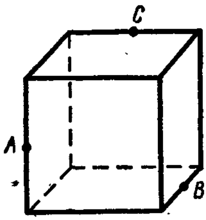

Рис. 15.6

15.067. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины ребер AD, A_1B_1, C_1C.

15.068. Построить сечение куба плоскостью, содержащей точки A, B и C (рис. 15.6).

15.069. Через среднюю линию основания треугольной пирамиды и ее вершину проведена плоскость. В каком отношении находятся объемы образовавшихся пирамид?

15.070. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — ее вершина) провести сечение через середину ребра SB и прямую MDN, расположенную в плоскости основания $ABCD$ и параллельную его диагонали AC.

15.071. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость параллельно плоскости основания пирамиды. В каком отношении находятся объемы образовавшихся многогранников?

15.072. Две точки A и B расположены по разные стороны от прямой MN. На прямой MN найти точку C такую, что $\widehat{ACN}=\widehat{BCN}$.

15.073. Углы треугольника относятся, как 2:3:7. Наименьшая сторона треугольника равна a. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника.

15.074. Все ребра (в том числе и стороны основания) треугольной пирамиды конгруэнтны. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к ее высоте.

15.075. Найти наибольшую площадь прямоугольного треугольника с данной гипотенузой c.

15.076. Определить вид треугольника по длинам трех сторон (если такой треугольник возможен):

1) 2, 2 и 3; 2) 6, 8 и 10; 3) 3, 1 и 4; 4) 3, 5 и 7.

15.077. Если через точку касания двух окружностей провести две прямые, пересекающие обе окружности, и точки пересечения прямых с окружностями соединить хордами, то эти хорды параллельны. Доказать.

15.078. Сторона AB треугольника из вершины C видна под углом α. Под каким углом она видна из центра окружности, описанной вокруг треугольника? Рассмотреть три случая: C — вершина острого, прямого или тупого угла.

15.079. Две окружности имеют только одну общую точку. Через нее проведена произвольная секущая. Доказать, что касательные в точках пересечения этой секущей с каждой из окружностей параллельны.

15.080. Показать, что в прямоугольном треугольнике величина угла между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе, равна абсолютному значению разности величин острых углов треугольника.

15.081. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 8 см. Может ли длина гипотенузы равняться 5 см?

[**15.082.**] Сколько боковых граней содержит призма, у которой 60 ребер?

15.083. Две диагонали, исходящие из одной и той же вершины правильного пятиугольника, разбивают его на три треугольника. Найти отношение площади треугольника, ограниченного этими диагоналями, к сумме площадей двух других треугольников.

15.084. Через произвольно выбранную точку на одной стороне параллелограмма и концы противоположной стороны сделаны два разреза. Определить, какой была площадь данного параллелограмма, если площади отрезанных треугольников равны S_1 и S_2.

15.085. Дан правильный тетраэдр $SABC$. Под каким углом ребро AB видно из середины ребра SC?

15.086. В куб помещена четырехугольная пирамида так, что ее основание совпадает с одной из граней куба, а вершина лежит в середине одного из ребер противоположной грани. Под какими углами боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания?

15.087. Биссектрисы углов, прилегающих к одной из не параллельных сторон произвольной трапеции, пересекаются под прямым углом, а точка их пересечения принадлежит средней линии трапеции. Доказать.

15.088. Показать, что $3<\pi<4$, не пользуясь приближенными значениями числа π.

15.089. Периметр равнобочной трапеции, описанной около круга, равен p. Найти длину средней линии трапеции.

15.090. Доказать, что в четырехугольнике с непараллельными сторонами середины диагоналей и середины двух противоположных сторон являются вершинами некоторого параллелограмма.

15.091. В правильном тетраэдре $SABC$ через ребро AC проведена плоскость, пересекающая ребро SB в точке K. Доказать, что проекция вершины B на плоскость сечения попадает на высоту сечения, проведенную к стороне AC. При каком условии эта проекция совпадет с точкой K?

15.092. Доказать, что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние ее от прямой, проходящей через противоположное ребро.

15.093. Длины сторон треугольника составляют арифметическую прогрессию. Высота, проведенная к средней по величине стороне, равна h. Найти радиус круга, вписанного в этот треугольник.

15.094. Радиус круга с центром в точке O равен 6 см, а его хорда $AB=3$ см. Найти радиус круга, вписанного в сектор AOB.

15.095. Длины сторон треугольника относятся, как $2:3:4$. В нем проведена биссектриса наименьшего угла. В каком отношении (считая от вершины) она делится центром окружности, вписанной в этот треугольник?

15.096. На отрезке AB произвольно взята точка M. На $[AM]$ и $[MB]$ по одну сторону от (AB) построены квадраты Около квадратов описаны окружности, пересекающиеся в точке C. Показать, что луч MC есть биссектриса угла ACB.

15.097. Около окружности с центром O описан четырехугольник $ABCD$. Найти сумму углов AOB и COD.

15.098*. Доказать, что в любом треугольнике отношение суммы всех попарных произведений, составленных из длин сторон треугольника, к сумме длин его трех высот равно диаметру описанной окружности.

15.099. Найти отношение объема шара к объему вписанного в него куба.

15.100*. Биссектрисы внутренних углов четырехугольника либо пересекаются в одной точке, либо образуют четырехугольник, около которого можно описать окружность. Доказать.

Задачи на применение метода координат

15.101. Даны точки $M(0;\ 1)$ и $N(2;\ 0)$. Составить формулы осевой симметрии, при которой точка M отображается на точку N.

15.102*. Прямая l задана уравнением $y=kx+b$. Составить формулы осевой симметрии с осью l.

15.103. Составить уравнение окружности, вписанной в треугольник, стороны которого лежат на прямых $x=0$, $y=0$, $3x+4y-12=0$.

15.104*. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\hat{C}=90°$. Составить уравнение множества точек M, для которых

$$|MA|^2+|MB|^2=2|MC|^2.$$

15.105. Вычислить координаты вершины C равностороннего треугольника ABC, если $A(1;\ 3)$, $B(3;\ 1)$.

15.106. Вычислить координаты вершин C и D квадрата $ABCD$, если $A(2;\ 1)$, $B(4;\ 0)$.

15.107. Дана окружность $x^2+y^2=4$. Составить уравнение прямой l, параллельной оси абсцисс и пересекающей окружность в таких точках M и N, что $|MN|=1$.

15.108. Даны три точки $A(2;\ 1)$, $B(3;\ 1)$, $C(-4;\ 0)$, являющиеся вершинами равнобочной трапеции $ABDC$. Вычислить координаты точки D, если $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.

15.109*. Даны точки $A(-1;\ 2)$, $B(4;\ -2)$, $M(-2;\ 0)$, первые две из которых являются вершинами ромба $ABCD$, а $M\in(CD)$. Найти координаты вершин C и D.

15.110. Даны точки $B(1;\ -3)$, $D(0;\ 4)$, являющиеся вершинами ромба $ABCD$. Вычислить координаты вершин A и C, если $\widehat{BAD}=60°$.

15.111. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(2;\ 0)$, $B(5;\ 0)$ и касающейся оси Oy.

15.112*. Дана гипербола $xy=k^2$. Доказать, что если треугольник ABC вписан в эту гиперболу, то и точка пересечения высот этого треугольника принадлежит гиперболе.

15.113. В окружность $x^2+y^2=169$ вписан квадрат $ABCD$ Найти координаты вершин B, C и D, если вершина A имеет координаты 5 и -12.

15.114. Дана окружность $x^2+y^2=9$. Составить уравнение окружности, проходящей через начало координат, точку $A(1;\ 0)$ и касающейся данной окружности.

15.115. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(2;\ 1)$ и касающейся осей координат.

15.116*. На параболе $y=x^2$ даны шесть точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Доказать, что если $[A_1A_2]\parallel[A_4A_5]$, $[A_2A_3]\parallel[A_5A_6]$, то $[A_3A_4]\parallel[A_6A_1]$.

15.117*. В гиперболу $xy=a^2$ вписан шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Доказать, что если $(A_1A_2) \parallel (A_4A_5)$, $(A_2A_3) \parallel (A_5A_6)$, то $(A_3A_4) \parallel (A_6A_1)$.

15.118. Дана парабола $y=x^2$. Найти расстояние этой параболы до прямой $y=x-4$.

15.119. Даны параболы $y=x^2$ и $y=0{,}5x^2+1$. Доказать, что гомотетией можно одну параболу отобразить на другую. Найти координаты центра гомотетии и коэффициент гомотетии.

15.120. Даны две окружности: $x^2+(y-1)^2=9$, $(x+2)^2+y^2=4$. Вычислить расстояние между данными окружностями.

15.121*. Составить уравнения окружностей, касающихся прямых $y=0$, $y=4$, $x+y+1=0$.

15.122. Доказать, что треугольник с вершинами $A(2;\ 1)$; $B(3;\ 0)$, $C(1;\ 5)$ тупоугольный. Вычислить косинус тупого угла.

15.123. Составить уравнения касательных, проведенных к окружности $x^2+y^2-9=0$ из точки $M(5;\ 0)$.

15.124. Составить формулы преобразования гомотетии по заданному центру $M(3;\ 1)$ и коэффициенту $k=4$.

15.125. При повороте вокруг начала координат точка $A(6;\ 8)$ отображается на точку $A_1(8;\ 6)$. Вычислить косинус угла поворота.

15.126. Вычислить расстояние от плоскости $2x+2y-z+15=0$ до сферы $x^2+y^2+z^2-4=0$.

15.127. Дана плоскость $x-y+2z-1=0$ и прямая, проходящая через точки $A(2;\ 3;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 1)$. Вычислить синус угла между прямой AB и данной плоскостью.

15.128. Найти множество точек пространства, сумма квадратов расстояний каждой из которых до данных двух точек $A(2;\ 3;\ -1)$, $B(1;\ -1;\ 3)$ имеет одно и то же значение m^2.

15.129. Дана сфера $x^2+y^2+z^2-25=0$ и прямая l, проходящая через точку $A(2;\ 1;\ 1)$ параллельно вектору $\vec{a}=(2;\ -4;\ -1)$. Вычислить кооординаты точек пересечения прямой l со сферой.

15.130. Составить уравнение сферы, проходящей через данную точку $A(1;\ -1;\ 4)$ и касающейся координатных плоскостей.

15.131. Дана плоскость $2x+2y-z+4=0$ и прямая l, проходящая через точки $A(2;\ 1;\ 1)$ и $B(-3;\ 4;\ 0)$. Вычислить координаты точки пересечения прямой l с данной плоскостью.

Задачи на применение векторов

15.132. Даны четыре некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Вычислить сумму этих векторов, если

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=p\vec{d}, \quad \vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=q\vec{a}.$$

15.133. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Доказать, что векторы $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ компланарны.

15.134. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Вычислить значение k, если векторы $\vec{a}+\vec{b}+k\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}+k\vec{a}$, $\vec{c}+\vec{a}+k\vec{b}$ компланарны.

15.135. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Вычислить значения p и q, при которых векторы $p\vec{a}+q\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+p\vec{b}+q\vec{c}$ коллинеарны.

15.136. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Доказать, что векторы $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, $3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $-\vec{a}+5\vec{b}-3\vec{c}$ компланарны.

15.137. Даны два отрезка AB и CD. Точка $M\in[AB]$ и точка $N\in[CD]$ делят отрезки AB и CD соответственно на отрезки, отношение которых равно k. Выразить вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

15.138. Дан треугольник ABC. Доказать, что существует единственная точка M, для которой $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

15.139. Дан правильный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$, точка O — его центр. Доказать, что $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

15.140. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$; G, G_1 — точки пересечения их медиан. Доказать, что

$$\overrightarrow{GG_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right).$$

15.141. Дана трапеция $ABCD$. Через точку пересечения M ее диагоналей проведена прямая l, параллельная основаниям AB и CD трапеции и пересекающая боковые стороны BC и DA соответственно в точках P и Q.

Выразить вектор $\overrightarrow{PQ}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $|AB| = p$, $|CD| = q$.

15.142. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M делит отрезок AD в отношении p, а точка N делит отрезок DC в отношении q. Прямые BM и AN пересекаются в точке S. Вычислить отношения $|AS| : |SN|$, $|BS| : |SM|$.

15.143. Дан треугольник ABC. На прямых BC, CA, AB даны соответственно пары точек (A_1, A_2), (B_1, B_2) и (C_1, C_2) такие, что $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{0}$. Доказать, что

$$|BC| : |A_1A_2| = |CA| : |B_1B_2| = |AB| : |C_1C_2|.$$

15.144. На прямой m даны три различные точки P, Q, R, а на прямой m_1 — три различные точки P_1, Q_1, R_1, причем $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{P_1Q_1}=k\overrightarrow{Q_1R_1}$. Доказать, что середины отрезков PP_1, QQ_1 и RR_1 принадлежат одной прямой.

15.145. Через середину M медианы CC_1 треугольника ABC проведена прямая AM, пересекающая сторону BC в точке N. Вычислить отношения $|AM| : |MN|$, $|CN| : |NB|$.

15.146. Через точку пересечения G медиан треугольника ABC проведена прямая l, пересекающая стороны AC и BC соответственно в точках P и Q Доказать, что

$$\frac{|AP|}{|PC|}+\frac{|BQ|}{|QC|}=1.$$

15.147. В окружность с центром O вписан треугольник ABC, H — ортоцентр треугольника. Доказать, что $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

15.148. Отрезок CC_1 является медианой треугольника ABC. Угол COC_1, где O — центр окружности, описанной около треугольника, — прямой. Доказать, что $|\hat{B}-\hat{A}| = 90°$.

15.149*. Точка I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Доказать, что

$$|BC|\cdot\overrightarrow{IA}+|CA|\cdot\overrightarrow{IB}+|AB|\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}.$$

15.150*. Доказать, что для всякого треугольника ABC

$$\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}\leqslant 3/2.$$

15.151*. Доказать, что для всякого треугольника ABC

$$\cos 2\hat{A}+\cos 2\hat{B}+\cos 2\hat{C} \geqslant -3/2.$$

15.152*. Дан треугольник ABC, H — точка пересечения его высот. Доказать, что

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=k.$$

Выразить k через стороны треугольника.

15.153*. Дан треугольник ABC, G — точка пересечения его медиан. Доказать, что какова бы ни была точка O, выполняется соотношение

$$|OG|^2=\frac{1}{3}(|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2)-$$

$$-\frac{1}{9}(|AB|^2+|BC|^2+|CA|^2).$$

15.154. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что если $|AB|^2+|CD|^2=4R^2$, где R — радиус описанной окружности, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

15.155. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что

$$4|MN|^2=|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2-|AC|^2-|BD|^2.$$

15.156. В треугольнике ABC проведена биссектриса CC_1 (C_1 — основание биссектрисы). Доказать, что

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{|CB|\cdot\overrightarrow{CA}+|CA|\cdot\overrightarrow{CB}}{|CA|+|CB|}.$$

15.157. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Доказать, что вектор $(\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

15.158. Найти множество точек M, для которых

$$|MA|^2+|MB|^2=2|MC|^2,$$

где ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C.

15.159. Дан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что точки пересечения медиан треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами четырехугольника, гомотетичного данному. Найти коэффициент гомотетии.

15.160. В окружности с центром O проведены две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Выразить вектор $\overrightarrow{OM}$ через $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.

15.161*. В окружность вписан правильный n-угольник. Доказать, что сумма квадратов всех его сторон и всех его диагоналей равна n^2R^2, где R — радиус окружности.

15.162. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Доказать, что

$$\overrightarrow{OA}\cdot\sin 2\hat{A}+\overrightarrow{OB}\cdot\sin 2\hat{B}+\overrightarrow{OC}\cdot\sin 2\hat{C}=\overrightarrow{0}.$$

15.163. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\hat{C}=90°$, D — основание высоты, проведенной из вершины прямого угла. Выразить вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и катеты данного треугольника.

15.164. Стороны треугольника ABC связаны соотношением $a^2+b^2=5c^2$. Доказать, что две медианы треугольника перпендикулярны Истинно ли обратное утверждение?

15.165. Стороны параллелограмма пропорциональны его диагоналям. Доказать, что углы параллелограмма равны углам между его диагоналями.

15.166. Даны две различные точки A и B. Найти множество таких точек M, что $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k^2$, где k — данное число, отличное от нуля.

15.167. Даны две различные точки A и B. Найти множество таких точек M, что $|MA|^2=k^2\,|MB|^2$, $k\neq 0$.

15.168. Даны две различные точки A и B Найти множество таких точек M, что $|MA|^2+|MB|^2=d^2$, $d\neq 0$.

15.169. Даны три различные точки A, B и C. Найти множество таких точек M, что $|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2=$ $=s$, $s>0$.

15.170*. Около треугольника ABC описана окружность с центром O; D — вершина параллелограмма $ABCD$. Доказать, что

$$|OD|^2=R^2+a^2+c^2-b^2,$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, R — радиус окружности.

15.171*. Доказать, что для всякого треугольника ABC

$$|OH|^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2),$$

где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот, a, b, c — длины сторон треугольника.

15.172. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC Через точку M проведены прямые MA_1, MB_1, MC_1. Доказать, что прямые p, q, r, проведенные через A, B и C параллельно соответственно MA_1, MB_1, MC_1, пересекаются в одной точке.

15.173*. Даны два одинаково ориентированных квадрата с общей вершиной: $OABC$ и $OA_1B_1C_1$. Доказать, что медиана OM треугольника OAC_1 перпендикулярна прямой A_1C.

15.174. Доказать, что если медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC равны, то треугольник равнобедренный: $|CA|=|CB|$.

15.175. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что перпендикуляры, проведенные через середины сторон перпендикулярно соответствующим противолежащим сторонам, пересекаются в одной точке.

15.176*. Даны два одинаково ориентированных квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что

$$|AC_1|^2+|CA_1|^2=|BD_1|^2+|DB_1|^2.$$

15.177. Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Разложить вектор $\overrightarrow{A_1A_3}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_5}$.

15.178*. В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$. Через точки пересечения медиан треугольников ABC, BCD, CDE, DEA, EAB проведены соответственно перпендикуляры к хордам DE, EA, AB, BC, CD. Доказать, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

15.179. К окружности с центром O проведены из точки M две касательные; A и B — точки касания. Разложить вектор $\overrightarrow{MO}$ по векторам $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, если $A\widehat{M}B=\alpha$.

15.180. В окружность вписан треугольник ABC. Биссектриса угла ACB пересекает окружность в точке S. Разложить вектор $\overrightarrow{CS}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

15.181. На сторонах BC, CA и AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC ($\widehat{C}=90°$) даны соответственно точки A_1, B_1 и C_1. Доказать, что отрезки CC_1 и A_1B_1 перпендикулярны и равны, если A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника по обходу в равных отношениях.

15.182. Доказать, что треугольник прямоугольный, если расстояние от точки пересечения медиан треугольника до точки пересечения его высот равно $2R/3$, где R — радиус описанной окружности.

15.183*. Доказать, что сумма косинусов всех двугранных углов тетраэдра не превосходит двух.

15.184*. Даны два подобных четырехугольника $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ с общей вершиной, лежащие в различных плоскостях. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны одной плоскости.

15.185. Известны плоские углы α, β, γ трехгранного угла. Доказать, что угол между ребром трехгранного угла и биссектрисой противолежащего плоского угла вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

15.186. Доказать, что биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла и биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

15.187*. Дан трехгранный угол. В плоскости каждой грани проведена прямая, перпендикулярная противолежащему ребру. Доказать, что построенные прямые параллельны одной плоскости, если плоские углы трехгранного угла отличны от прямых углов.

15.188. Доказать, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна каждой из них.

15.189. Доказать, что три плоскости, проходящие через биссектрисы плоских углов трехгранного угла и противолежащие соответственно этим плоским углам ребра, пересекаются по прямой.

15.190. Доказать, что каковы бы ни были четыре данные точки A, B, C, D, имеет место равенство

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

15.191*. Даны два тетраэдра $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что если $[AB]\perp[C_1D_1]$, $[BC]\perp[D_1A_1]$, $[CA]\perp[D_1B_1]$, $[AD]\perp[B_1C_1]$, $[DB]\perp[A_1C_1]$, то $[DC]\perp[A_1B_1]$.

15.192. Доказать, что если длины трех отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, р вны, то эти пары противоположных ребер тетраэдра перпендикулярны.

15.193. Доказать, что если общие перпендикуляры противоположных ребер тетраэдра проходят через середины этих ребер, то противоположные ребра попарно равны.

15.194. Доказать, что если у тетраэдра суммы квадратов противоположных ребер равны, то эти ребра попарно перпендикулярны.

15.195. Доказать, что для треугольника ABC

$$|BC|^2+|AH|^2=4R^2,$$

где H — точка пересечения высот треугольника, а R — радиус описанной окружности.

15.196. Даны четыре луча с общим началом. Углы, образованные каждыми двумя лучами, равны φ. Найти значение φ

15.197. Даны две скрещивающиеся прямые m и n. На прямой m даны точки P, Q, R, а на прямой n — точки P_1, Q_1, R_1, причем $\overrightarrow{PQ}=k\cdot\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{P_1Q_1}=k\cdot\overrightarrow{P_1R_1}$. Доказать, что прямые PP_1, QQ_1, RR_1 параллельны плоскости.

15.198. Дан трехгранный угол $Sabc$, у которого $(\widehat{a, b})+(\widehat{a, c})=180°$. Вычислить угол между ребром a и биссектрисой угла $(\widehat{b, c})$.

15.199. Дана неплоская замкнутая линия $ABCD$. Доказать, что если $\widehat{ABC}=\widehat{DAB}=90°$, $|DA|=|CB|$, то $\widehat{ADC}=\widehat{BCD}$.

15.200. Дан тетраэдр $ABCD$ и в плоскости его грани ABC точка M. Доказать, что для разложения

$$\overrightarrow{DM}=\alpha\cdot\overrightarrow{DA}+\beta\cdot\overrightarrow{DB}+\gamma\cdot\overrightarrow{DC}$$

выполняется равенство $\alpha+\beta+\gamma=1$.

15.201. Известны длины ребер тетраэдра $ABCD$. Вычислить косинус угла между его противолежащими ребрами AB и CD.

15.202. Дан тетраэдр $SABC$ с прямым трехгранным углом при вершине S. Найти множество точек M, для которых

$$|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2=3|MS|^2.$$

15.203*. Даны два четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, лежащие в различных плоскостях. Доказать, что если диагонали AC и BD делятся в точке их пересечения на отрезки, пропорциональные соответственно отрезкам, на которые делят друг друга диагонали A_1C_1 и B_1D_1, то прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны одной плоскости.

15.204. Дан трехгранный угол. Доказать, что биссектрисы трех углов, смежных его плоским углам, лежат в одной плоскости.

15.205. В тетраэдре $OABC$ плоские углы трехгранного угла с вершиной O — прямые. Точка H — основание перпендикуляра, проведенного из вершины O к плоскости грани ABC. Разложить вектор $\overrightarrow{OH}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, если $|OA|=a$, $|OB|=b$, $|OC|=c$.

15.206. Сумма плоских углов трехгранного угла равна 180°. Доказать, что сумма косинусов его двугранных углов равна —1.

15.207. Доказать, что если плоские углы α, β, γ трехгранного угла связаны соотношением $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$, то двугранный угол, лежащий против плоского угла, величина которого γ, прямой.

15.208*. Дан трехгранный угол $Sabc$. Выразить косинус угла между лучом c и его ортогональной проекцией c_1 на плоскость противолежащей грани через плоские углы трехгранного угла.

15.209*. Вычислить объем тетраэдра $SABC$ по длинам его ребер SA, SB, SC и плоским углам α, β, γ трехгранного угла с вершиной S.

15.210. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая l пересекает прямые AB, AC и AD соответственно в точках B_1, C_1 и D_1. Доказать, что

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC_1}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB_1}}+\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AD_1}}.$$

15.211*. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость пересекает прямые AB, AD, AA_1, AC_1 соответственно в точках B_0, D_0, A_0, C_0. Доказать, что

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{AC_0}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB_0}}+\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AD_0}}+\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_0}}.$$

15.212*. Сторона AB треугольника ABC разделена точками M и N на три равных отрезка AM, MN, NB. Прямая l пересекает отрезки CA, CM, CN и CB соответственно в точках A_1, M_1, N_1 и B_1. Доказать, что

$$3\frac{|A_1M_1|}{|M_1N_1|}=\frac{|A_1B_1|}{|N_1B_1|}.$$

15.213*. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка M. Через нее и точки пересечения A_1, B_1, C_1, D_1 медиан граней тетраэдра проведены прямые a_1, b_1, c_1, d_1. Доказать, что прямые a_2, b_2, c_2, d_2, проведенные соответственно через вершины тетраэдра A, B, C, D параллельно a_1, b_1, c_1, d_1, пересекаются в одной точке.

15.214*. Даны четыре луча OA, OB, OC и OD. Доказать, что

$$\cos \widehat{AOB}+\cos \widehat{BOC}+\cos \widehat{COD}+\cos \widehat{DOA}+\cos \widehat{AOC}+$$
$$+\cos \widehat{BOD} \geqslant -2.$$

15.215. Даны два отрезка AB и CD. Доказать, что если

$$|AC|^2+|BD|^2=|AD|^2+|BC|^2,$$

то $[AB]\perp[CD]$ Проверить истинность обратного утверждения.

15.216. Доказать, что если в тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра попарно перпендикулярны, то

$$|AB|^2+|CD|^2=|AC|^2+|BD|^2=|AD|^2+|BC|^2.$$

15.217. Ребро куба равно a. Вычислить расстояние между диагональю куба и скрещивающимся с ней ребром.

15.218*. Даны два треугольника. Доказать, что если медианы одного из них параллельны сторонам другого, то и медианы второго параллельны сторонам первого.

15.219. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Разложить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

15.220. В куб вписана сфера. Доказать, что сумма квадратов расстояний каждой точки сферы до вершин куба не зависит от выбора точки. Найти эту сумму.

15.221. В квадрат вписана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности. Найти эту сумму.

15.222. Около квадрата описана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний точек окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точек на окружности. Найти эту сумму.

15.223. Дан прямоугольник $ABCD$. Доказать, что сумма квадратов расстояний любой точки пространства до вершин A и C равна сумме квадратов ее расстояний до вершин B и D.

15.224. Доказать, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сумма квадратов расстояний любой точки пространства до вершин A, B_1, C, D_1 равна сумме квадратов расстояний этой точки до вершин A_1, B, C_1, D.

15.225. Доказать, что середины всех ребер тетраэдра представляют собой центрально симметричную фигуру.

15.226*. Поворот $R_M^{90°}$ отображает четырехугольник $ABCD$ на четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что если точки P, Q, R и S — середины отрезков AB_1, BC_1, CD_1, DA_1, то отрезки PR и QS перпендикулярны и равны (или же $P=Q=R=S$).

15.227. Даны два отрезка AB и CD, точки M и N — середины этих отрезков. Доказать, что

$$|MN| \leqslant \frac{1}{2}(|AC|+|BD|), \quad |MN| \leqslant \frac{1}{2}(|BC|+|DA|).$$

15.228. Дан треугольник ABC; M — точка пересечения его медиан. Доказать, что

$$|OM| < \frac{1}{3}(|OA|+|OB|+|OC|),$$

где O — произвольная точка пространства.

15.229. Дан треугольник ABC. Прямая l пересекает прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что векторы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{C_1A_1}$ коллинеарны.

15.230. В окружность вписан треугольник ABC. Прямая, содержащая медиану CC_1 треугольника, пересекает окружность вторично в точке D. Доказать, что

$$|CA|^2+|CB|^2=2|CC_1|\cdot|CD|.$$

15.231*. В сферу вписан тетраэдр $OABC$. Прямая, проведенная через точку O и точку пересечения медиан G треугольника ABC, пересекает сферу вторично в точке D. Доказать, что

$$|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2=3|OG|\cdot|OD|.$$

15.232*. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Прямая, проходящая через вершину D и точку пересечения медиан G треугольника ABC, пересекает окружность вторично в точке P. Доказать, что

$$3|DG|\cdot|DP|=|DA|^2+|DB|^2+|DC|^2.$$

15.233*. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник. Доказать, что сумма квадратов расстояний любой точки окружности до вершин многоугольника равна $2nR^2$.

15.234. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямая l, проходящая через центр куба перпендикулярно плоскостям граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, пересекает их соответственно в точках M и M_1. Точка P делит отрезок MM_1 в отношении k ($\overrightarrow{MP}=k\cdot\overrightarrow{PM_1}$). Найти значение k, при котором выполняется равенство

$$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{PC_1}+\overrightarrow{PD_1}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{0}.$$

15.235. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Доказать, что если $\hat{C}+(\widehat{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}})=180°$, то

$$|CA|^2+|CB|^2=2|AB|^2.$$

15.236. Доказать, что если для треугольника ABC имеет место равенство $a^2+b^2=2c^2$, то

$$a\cdot m_b+b\cdot m_a=2c\cdot m_c,$$

где m_a, m_b, m_c — длины медиан треугольника, a, b, c — длины его сторон.

15.237*. Даны два неколлинеарных единичных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Доказать, что для любого третьего единичного вектора $\vec{c}$, компланарного с $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длина вектора $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ постоянна.

15.238. Доказать, что луч CM, где C — вершина прямого угла треугольника ABC, а M — центр квадрата, построенного на гипотенузе и лежащего вне его, есть биссектриса прямого угла C.

15.239. Дан пятиугольник $ABCDE$. Точки M, N, P и Q — середины его сторон AB, BC, CD, DE. Доказать, что если U и V — середины MP и NQ, то вектор $\overrightarrow{UV}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AE}$ Вычислить отношение $|AE|:|UV|$.

15.240. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями, пересекающимися в точке P. Доказать, что середины сторон AB и CD центр O и точка P являются вершинами параллелограмма.

15.241. В тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра попарно равны. Доказать, что прямые, проходящие через середины пар противоположных ребер, попарно перпендикулярны.

15.242. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Доказать, что если A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC, то прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке G. Вычислить отношения, в которых эта точка делит отрезки A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1.

15.243. В треугольнике ABC проведена медиана CC_0. Прямая l, параллельная CC_0, пересекает прямые BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что

$$\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}.$$

15.244*. Через произвольную точку P плоскости грани ABC тетраэдра $OABC$ проведена прямая l, параллельная прямой OG, где G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Прямая l пересекает плоскости граней OBC, OCA, OAB соответственно в точках U, V, W. Доказать, что

$$\overrightarrow{PU}+\overrightarrow{PV}+\overrightarrow{PW}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}.$$

15.245*. Даны четыре компланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$, из которых $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также $\vec{c}$ и $\vec{d}$ неколлинеарны. Доказать, что если p_1 и q_1 — коэффициенты разложения $\vec{c}$ по $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а p_2 и q_2 — коэффициенты разложения $\vec{d}$ по $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то отношение $p_1q_2 : p_2q_1$ совпадает с отношением $p'_1q'_2 : p'_2q'_1$, где p'_1, q'_1 и p'_2, q'_2 — коэффициенты разложения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно по $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

15.246*. В сферу вписан правильный тетраэдр $ABCD$. Доказать, что для каждой точки M сферы сумма $|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2+|MD|^2=8R^2$, где R — радиус сферы.

15.247. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, не лежащие в одной плоскости; M и N — середины сторон AC и BC, а M_1 и N_1 — середины сторон A_1C_1 и B_1C_1. Доказать, что если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$, то векторы $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{NN_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ компланарны.

15.248. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$; стороны BC, CA и AB треугольника ABC разделены соответственно точками A_0, B_0 и C_0 в отношениях, равных k, по обходу его границы. Доказать, что сумма векторов $\overrightarrow{A_1A_0}$, $\overrightarrow{B_1B_0}$ и $\overrightarrow{C_1C_0}$ не зависит от k.

15.249. Даны два треугольника $A_1A_2A_3$ и $A_4A_5A_6$, не лежащие в одной плоскости. Доказать, что векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RS}$ компланарны, если M, N, P, Q, R и S — соответственно середины отрезков A_1A_2, A_4A_5, A_2A_3, A_5A_6, A_3A_4, A_6A_1.

Задачи на применение геометрических преобразований

15.250. Найти угол между осями симметрии a и b, если

$$S_a \circ S_b \circ S_a = S_b \circ S_a \circ S_b.$$

15.251. Доказать, что композиция шести центральных симметрий Z_A, Z_B, Z_C, Z_A, Z_B, Z_C есть тождественное преобразование.

15.252. Даны две различные параллельные прямые a и b. Через центр симметрии M этих прямых проведены два луча s и t с началом M, не принадлежащие одной прямой, причем луч s пересекает a, а луч t пересекает b. Построить прямую m, пересекающую прямые a, b и лучи s, t в четырех точках, являющихся концами трех конгруэнтных отрезков.

15.253. Доказать, что композиция трех осевых симметрий, оси которых проходят через одну точку, есть осевая симметрия.

15.254. Доказать, что композиция любого нечетного числа центральных симметрий есть центральная симметрия.

15.255. Найти условие, при котором композиция осевой симметрии и переноса есть осевая симметрия.

15.256. Даны перенос $\vec{a}$ и осевая симметрия l, причем $\vec{a} \circ S_l = S_l \circ \vec{a}$. Доказать, что $\vec{a} \parallel l$.

15.257. Даны два поворота R_A^α и R_B^β, $0 < \alpha < 360°$, $0 < \beta < 360°$, $\alpha + \beta \neq 360°$. Доказать, что композиция $R_B^\beta \circ R_A^\alpha$ есть поворот. Построить центр этого поворота и найти угол поворота.

15.258. Даны центральная симметрия Z_A и осевая симметрия S_a. Доказать, что необходимое и достаточное условие принадлежности точки A прямой a выражается равенством

$$S_a \circ Z_A = Z_A \circ S_a.$$

15.259. Две равные окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Доказать, что если $R_A^\alpha(\omega_1) = \omega_2$, причем при этом повороте точка $M_1 \in \omega_1$ отображается на точку $M_2 \in \omega_2$, то прямая M_1M_2 проходит через точку B.

15.260. Две равные окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку $P_2 \in \omega_2$ проведены прямые P_2A и P_2B, пересекающие ω_1 в точках P_1 и P_1'. Доказать, что хорды P_1P_1', соответствующие различным точкам P_2, лежат на параллельных прямых.

15.261. Три конгруэнтные окружности ω_1, ω_2 и ω_3 имеют общую точку M и вторично пересекаются в трех точках A, B и C. Доказать, что окружность, проходящая через эти точки, конгруэнтна данным.

15.262. На сторонах CA и CB треугольника ABC вне его построены квадраты. Доказать, что если O_1 и O_2 — центры квадратов, а M — середина отрезка AB, то отрезки MO_1 и MO_2 перпендикулярны и равны.

15.263. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC вне его построены квадраты соответственно с центрами O_3, O_1 и O_2. Доказать, что отрезки CO_3 и O_1O_2 конгруэнтны и ортогональны.

15.264. На сторонах CA и CB треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники CAB_1 и CBA_1. Доказать, что если M — середина стороны AB, а O — центр треугольника CAB_1, то угол OMA_1 — прямой.

15.265. Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$, вписанный в окружность. Доказать, что композиция центральных симметрий Z_{A_1}, Z_{A_2}, ..., Z_{A_5} есть центральная симметрия Z_A, где A — точка пересечения касательных к окружности в вершинах A_1 и A_5.

15.266. Дан правильный шестиугольник $A_1A_2 \ldots A_6$. Доказать, что композиция шести осевых симметрий $S_{(A_1A_2)}$, $S_{(A_2A_3)}$, ..., $S_{(A_6A_1)}$ есть перенос $\vec{t}$, причем $|\vec{t}| = 6|A_1A_2|$.

15.267. На сторонах CA и CB равностороннего треугольника ABC даны точки B_1 и A_1 такие, что $|AB_1|:|B_1C| = |CA_1|:|A_1B|$. Найти угол AMB_1, где $M = (AA_1) \cap (BB_1)$.

15.268. Два квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ориентированные одинаково, имеют общий центр. Доказать, что прямые AB_1 и BC_1 перпендикулярны.

15.269. Отрезки AB и A_1B_1 конгруэнтны. Поворот с центром M отображает A на A_1, B на B_1, а поворот с центром N отображает A на B_1, B на A_1. Доказать, что если S — середина отрезка AB, то $\widehat{MSN} = 90°$.

15.270. На сторонах BC и CA равностороннего треугольника ABC отложены конгруэнтные отрезки BM и CN. Найти величину угла ASB, где $S=[AM]\cap[BN]$.

15.271. Даны две концентрические окружности ω_1 и ω_2. Пересечь эти окружности прямой l в точках $A\in\omega_1$, $B\in\omega_2$, $C\in\omega_2$, $D\in\omega_1$ так, чтобы $|AB|=|BC|=|CD|$.

15.272. Дан квадрат $ABCD$ с центром O и в его плоскости точка M. Через точку A проведен перпендикуляр a к прямой MB, через B — перпендикуляр b к (MC), через C — перпендикуляр c к (MD) и через D — перпендикуляр d к (MA). Доказать, что прямые a, b, c и d пересекаются в одной точке N и что отрезки OM и ON перпендикулярны и равны.

15.273. Даны три различные параллельные прямые a, b, c. Построить равносторонний треугольник ABC так, чтобы $A\in a$, $B\in b$, $C\in c$.

15.274. Через точку M, лежащую вне окружности ω, провести прямую, пересекающую ω в двух точках A и B так, чтобы $|MA|=|AB|$.

15.275. Даны две пересекающиеся прямые a и b. Через данную точку M провести прямую l, пересекающую a и b в точках A и B так, чтобы $|AM|=|MB|$.

15.276. Даны две окружности ω_1 и ω_2. Построить точки $A\in\omega_1$ и $B\in\omega_2$ так, чтобы $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, где $\overrightarrow{a}$ — данный вектор.

15.277. Даны две перпендикулярные прямые p и q, пересекающиеся в точке M. Через точку M проведены две произвольные прямые l и s. Из точек $P\in p$ и $Q\in q$ проведены к l и s перпендикуляры, пересекающие l и s соответственно в точках P_1, P_2 и Q_1, Q_2. Доказать, что угол между l и s равен углу между (P_1P_2) и (Q_1Q_2).

15.278. Даны две концентрические окружности. Пересечь эти окружности прямой так, чтобы длины x, y, z трех образовавшихся на ней последовательно расположенных отрезков были пропорциональны длинам данных отрезков.

15.279. Две неконгруэнтные окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке M. Через точку $A_1\in\omega_1$ проведена прямая A_1M, пересекающая ω_2 в точке A_2. Доказать, что если точка B_2 диаметрально противоположна точке A_2 на ω_2, то прямая A_1B_2 проходит через точку S, положение которой не зависит от выбора точки A_1 на ω_1.

15.280. Окружность ω касается неконгруэнтных окружностей ω_1 и ω_2 в точках A_1 и A_2. Через точку $M_1 \in \omega_1$ проведена прямая MA_1, пересекающая ω в точке M_2, а через M_2 — прямая M_2A_2, пересекающая ω_2 в точке M_3. Доказать, что прямая M_1M_3 проходит через точку S, положение которой не зависит от выбора точки A_1 на ω_1.

15.281. Построить треугольник ABC, если заданы оси симметрии, при которых вершина A отображается на B, вершина B — на вершину C, вершина C — на вершину A.

15.282. Построить треугольник, если заданы три прямые, на которых лежат биссектрисы этого треугольника.

15.283. Стороны одного треугольника перпендикулярны сторонам другого. Доказать, что если эти треугольники вписаны в одну и ту же окружность, то они конгруэнтны.

15.284. На окружности, описанной около треугольника ABC, дана точка M. Доказать, что проекции точки M на прямые BC, CA и AB принадлежат одной прямой.

15.285. Дан квадрат $ABCD$. Прямая l пересекает прямые AB и CD в точках M и N, а прямая s, перпендикулярная к l, — прямые BC и AD в точках P и Q. Доказать, что $|MN|=|PQ|$.

15.286*. Даны четыре точки P, Q, R и S. Построить квадрат $ABCD$ так, чтобы $P \in (AB)$, $Q \in (BC)$, $R \in (CD)$, $S \in (DA)$.

15.287. Даны две концентрические окружности. Построить квадрат, две смежные вершины которого принадлежат одной окружности, а две другие вершины — другой.

15.288. Дан поворот R_O^α и некоторая точка S. Найти множество таких точек A, что прямая AB, где $B=R_O^\alpha(A)$, проходит через точку S.

15.289. Две окружности пересекаются в точках A и B. Доказать, что если M и N — центры гомотетий этих окружностей, то $\widehat{MAN}=\widehat{MBN}=90°$.

15.290. Дан равносторонний треугольник ABC. Доказать, что при композиции осевых симметрий $S_{(BC)}$, $S_{(CA)}$, $S_{(AB)}$ прямая l, проходящая через середины сторон BC и AB, отображается на себя. Найти расстояние от середины стороны AB до ее образа при этой композиции, если $|AB|=a$.

15.291. На сторонах CA и CB треугольника ABC вне его построены квадраты $CAPQ$ и $CBRS$. Вычислить расстояние между серединами отрезков AB и PR, если $|AB|=c$.

15.292. На прямой l даны два отрезка AB и CD. Построить на этой прямой такую точку M, что $\overrightarrow{MB}=k\cdot\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MD}=k\cdot\overrightarrow{CM}$.

15.293. Дан четырехугольник $ABCD$; точки P, Q, R и S — середины его сторон AB, BC, CD, DA. Найти отношение площадей четырехугольников $ABCD$ и $PQRS$.

15.294. Доказать, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то и биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна им.

15.295. Угол между диагоналями прямоугольника $ABCD$ равен φ. Из вершин A и C проведены перпендикуляры к диагонали BD, а из вершин B и D — к диагонали AC. Доказать, что основания перпендикуляров являются вершинами прямоугольника и найти отношение его площади к площади данного прямоугольника.

15.296. Продолжения боковых сторон AD и BC равнобочной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке S. Доказать, что окружности, описанные около треугольников ACS и BDS, пересекаются в центре окружности, описанной около данной трапеции.

15.297. Доказать, что если поворот, отличный от центральной симметрии, отображает прямые одного пучка параллельных на прямые другого пучка параллельных, то соответствующие при повороте пары прямых пересекаются в точках, принадлежащих одной прямой.

15.298. Доказать, что композиция шести поворотов последовательно вокруг вершин правильного шестиугольника на углы по $60°$ есть тождественное преобразование.

15.299. Даны два поворота R_M^α и R_N^β, причем

$$R_M^\alpha(A)=A_1,\quad R_M^\alpha(B)=B_1;\quad R_N^\beta(A)=B,\quad R_N^\beta(A_1)=B_1.$$

Доказать, что $M=N$.

15.300. Даны четыре поворота $R_A^{90°}$, $R_B^{90°}$, $R_C^{90°}$, $R_D^{90°}$ с различными центрами. Доказать, что если композиция $R_D^{90°}\circ R_C^{90°}\circ R_B^{90°}\circ R_A^{90°}$ есть тождественное преобразование, то отрезки AC и BD конгруэнтны и ортогональны.

Глава 16
СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

16.001. Найти два числа x и y, зная, что их сумма, разность и произведение соответственно пропорциональны числам $a+1$, $a-1$ и $\sqrt{a^2-1}$.

16.002. Найти точку пересечения графика функции

$$y=\left(3,6^{1+\log_{3,6}(10+x)}\right)^{\log (5-x)}$$

с осью ординат.

16.003. Найти точку пересечения графиков функций

$$y=\log_2(x+14) \text{ и } y=6-\log_2(x+2).$$

16.004. Найти абсциссу той точки графика функции

$$y=\log_2 \log_6\left(2^{\sqrt{x}+1}+4\right),$$

ордината которой равна единице.

16.005. Решить уравнение

$$(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\ldots+(x^2+20x+39)=4500.$$

16.006. Установить, сколько знаков содержит число $2^{20}\cdot 3^{30}\cdot 6^{60}$, если десятичные логарифмы чисел 2 и 3 равны соответственно 0,3010 и 0,4771.

16.007. Решить уравнение $|x^2-8x+12|=x^2-8x+12$.

16.008. Найти значения x из того условия, что третье слагаемое разложения $(x+x^{\lg x})^5$ равно 10^6.

16.009. Сократить дробь

$$\frac{x^3-9x^2+25x-25}{x^2-2x-15}.$$

16.010. В каких точках график функции

$$y=\log_3\left(\sqrt{x^2+21}-\sqrt{x^2+12}\right)$$

пересекает ось Ox?

16.011. Доказать, что число k^3+5k делится на 3 при $k \in N$.

16.012. Найти k $(k \in N)$ из того условия, что

$$2^2\cdot 2^4\cdot 2^6 \ldots 2^{2k}=0,25^{-28}.$$

16.013*. При каких значениях p и q многочлен

$$x^5-3x^4+px^3+qx^2-5x-5$$

делится без остатка на двучлен x^2-1?

16.014. Решить уравнение $x^2-3|x|+2=0$.

16.015. Для каких значений x выполняется равенство

$$\left|\frac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}\right|=\frac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}?$$

16.016. Решить уравнение

$$(x^2+1)+(2x^2+3)+(3x^2+5)+\ \ldots\ +(10x^2+19)=45.$$

16.017. Составить уравнение третьей степени, корнями которого являются $\left\{1;\ -\frac{1}{2}+\sqrt{5};\ -\frac{1}{2}-\sqrt{5}\right\}$.

16.018. Решить уравнение

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+\ \ldots\ +(x+9)(x+10)=$$
$$=1\cdot2+2\cdot3+\ \ldots\ +9\cdot10.$$

16.019*. Найти комплексное число z, для которого

$$|z|\,i+2z=1.$$

16.020. Решить уравнение $1+2x+4x^2+\ \ldots\ +(2x)^n+\ \ldots=3{,}4-1{,}2x$ в предположении, что $|x|<0{,}5$

16.021. Разложить на множители выражение

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y).$$

16.022. Решить уравнение

$$x^2+2x-3|x+1|+3=0.$$

16.023*. Найти комплексное число a из условия

$$(a+i)(1+2i)+(1+ai)(3-4i)=1+7i.$$

16.024. В каких точках график функции

$$y=\sqrt{-x+9}-\sqrt{-x+4}$$

пересекается с прямой $y=1$?

16.025. Найти два числа, если их среднее арифметическое и среднее геометрическое соответственно равны 0,615 и 0,600.

16.026. Выразить $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$ и с помощью полученной формулы вычислить $\sin 54°$, если известно, что $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

16.027. Найти x из того условия, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3+\sqrt{x}}{2},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{3-\sqrt{x}}{2},\quad \text{а}\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}.$$

16.028. Решить уравнение $x^2\cdot2^x+8=2x^2+2^{x+2}$.

16.029. Показать, что множество решений системы

$$\begin{cases}2^{\log_2 x}-3^{\log_3 y}=1,\\ 2x-3y=4\end{cases}$$

является пустым.

16.030. Найти два рациональных числа, если их сумма на шесть меньше суммы их квадратов и в семь раз меньше суммы их кубов.

16.031. Трехзначное число написано рядом еще раз. Показать, что полученное шестизначное число делится на 13, на 11, на 7.

16.032. Доказать, что при любых значениях p ($p \in R$) и $a \neq 0$ уравнение

$$\frac{1}{x+p}+\frac{1}{x-p}=\frac{1}{a}$$

имеет корни.

16.033. Показать, что если

$$x=a\cos\alpha\sin\beta,\ y=a\sin\alpha\sin\beta,\ z=a\cos\beta,$$

то $x^2+y^2+z^2=a^2$.

16.034. Не находя x и y в отдельности, вычислить сумму x^3y+ $+xy^3$, если $x-y=4$ и $xy=3$.

16.035. Вычислить сумму кубов двух чисел, если их сумма и произведение соответственно равны 11 и 21.

16.036. Найти $D(f)$, если

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}.$$

16.037. При каких значениях постоянной величины a графики функций $y=2ax+1$ и $y=(a-6)x^2-2$ не пересекаются? Дать решение в общем виде. Выбрать произвольно подходящее частное значение a и построить соответствующие графики на одном чертеже.

16.038. При каких значениях a уравнение

$$x^2-2x-\log_{1/3}a^2=0$$

имеет корни?

16.039. При каком значении k многочлен

$$x^2+2(k-9)x+(k^2+3k+4)$$

можно представить в виде полного квадрата?

16.040. Найти наибольшее значение a ($a \in Z^-$), при котором уравнение $(2a+1)x^2-3(a+1)x+(a+1)=0$ имеет корни.

16.041. При каких a ($a \in R^+$) неравенство $z^2+(z-1)\log_2 a<0$ имеет решением $z \in \varnothing$?

16.042. При каких a система

$$\begin{cases} ax-4y=a+1, \\ 2x+2ay=-1 \end{cases}$$

имеет решения $x \in R^+$, $y \in R^-$?

16.043. При каких значениях x график функции $y=\lg|\operatorname{tg}x|$ расположен ниже оси абсцисс?

16.044. Найти отношение двух чисел, если отношение их среднего геометрического к среднему арифметическому равно 3/5.

16.045. Выразить x и y через a и b так, чтобы значение величины $\frac{ax+by}{x+y}$ было средним арифметическим между x и y и средним геометрическим между a и b.

16.046. Решить уравнение $|x-1|\cdot|x+2|=4$.

16.047. Решить уравнение $|x|+|x-1|=1$.

16.048. Решить неравенство $|x+1|>2|x+2|$.

16.049. Найти $\{x\}$, $x \in Z$ из $D(f)$, где

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-\sin x}}{\lg(-3x^2+10x-3)}.$$

16.050. При каких значениях a уравнение

$$x^2-(2^a-1)x-3(4^{a-1}-2^{a-2})=0$$

имеет равные корни?

16.051. При каких значениях x член разложения $\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}+\operatorname{ctg} x\right)^6$, содержащий наибольший коэффициент, равен 60?

16.052. Найти $\{x\}$, $x\in N$, удовлетворяющих неравенствам

$$0{,}000729^3<0{,}3^{x^2-5x+4}<11\frac{1}{9}.$$

16.053. Найти $\{x\}$, для всех элементов которого функции

$$y=x^4-29x^2+100 \text{ и } y=x^4-9x^2$$

имеют положительные значения.

16.054*. При каких значениях x комплексные числа

$$\lg(2x^2+x+1)+i\cdot 4^x \text{ и } \lg(x^2+1)+i(2^{x+1}-3)$$

будут взаимно сопряженными?

16.055. Найти a из неравенства $x^2-2^{a+2}\cdot x-2^{a+3}+12>0$, $\forall x\in R$.

16.056. Решить неравенство

$$\sqrt[15]{32^{3x^2-8x}}<(0{,}1(3))^{\log_{7,5}0{,}5},\ \forall x\in R+\cup 0.$$

16.057. При каких положительных значениях p уравнение

$$9^{x+1}+3^{x+2}=9p^2-3p-2$$

имеет корни $x\in R+\cup 0$?

16.058. При каких значениях m может выполняться равенство

$$\cos\varphi=\frac{m^2-4m-4}{m^2+1}, \text{ если } 0<\varphi<\frac{\pi}{3}?$$

16.059. При каких значениях a равенство $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{2a^2+2a}{a^2-6a-9}$ возможно, если $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$?

16.060. При каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases}(m+1)x-my=4,\\ 3x-5y=m\end{cases}$$

имеет такие решения (x, y), для которых $x-y<2$?

16.061. При каких значениях p система уравнений

$$\begin{cases}px+3y=-p,\\ 3x+py=8\end{cases}$$

имеет решения $\{x;\ y\}\subset R+\cup 0$.

16.062. Число 19 представить в виде разности кубов натуральных чисел. Показать, что такое представление единственно.

16.063. Найти два натуральных числа из того условия, что их отношение заключено между 1 и 2, а произведение — между 4 и 7.

16.064*. Найти действительную и мнимую части комплексного числа a, если известно, что $a^2=3+4i$.

16.065. Биномиальные коэффициенты третьего и седьмого слагаемых разложения $\left(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}\right)^n$ равны друг другу При каких значениях x сумма этих слагаемых равна числу 7?

16.066*. Многочлен $x^4-x^3-11x^2+31x-20$ разложить на множители, если известно множество его корней $\{-4;\ 1\}$.

16.067. Доказать, что если для чисел x, y, z, m, n, p выполняются равенства $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$, $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}+\frac{p}{z}=0$, то для них выполняется также и равенство

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1.$$

16.068. Решить уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$, если его коэффициенты a, b, c и d в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию со знаменателем q.

16.069. Найти $\log_{24} 54$, если $\log_2 3=a$.

16.070. Проверить, что число $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-1}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-1}}$ является корнем уравнения $x^3-3x-2a=0$.

16.071. Определить, при каких значениях λ неравенство

$$\frac{x^2+3x+\lambda}{x^2+x+1}<2$$

выполняется для всех значений x, кроме одного.

16.072. При каких значениях x и y возможно равенство $3^{\lg(2x-y)}=1$, если известно, что $x^2-y^2>0$?

16.073. Найти x, если известно, что

$$\operatorname{tg}\alpha=x+1,\ \operatorname{tg}\beta=x-1,\ \operatorname{tg}(2\alpha+2\beta)=-4x/3.$$

16.074. Каково наибольшее значение функции $y=\sin x+\cos x$? При каких значениях x оно достигается?

16.075. Длины катетов некоторого прямоугольного треугольника служат корнями уравнения $Ax^2+Bx+C=0$ Не решая этого уравнения, найти длину гипотенузы треугольника.

16.076*. Сократить дробь $\frac{z^4-4z^3+4z^2-4z+3}{z^4-5z^3+5z^2-5z+4}$, убедившись в том, что ее числитель и знаменатель обращаются в нуль при $z=\pm i$.

16.077*. Определить коэффициенты p и q многочлена $x^5+3x^3+px^2+qx+3$, если известно, что при делении его на x^2+2 в остатке получается $x+1$.

16.078. Найти $D(f)$, где $f(x)=\sqrt{\log_x 2-\log_2 x}$.

16.079. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y|=5, \\ xy=-6. \end{cases}$$

16.080. Решить уравнение $|x^2-3|x|+1|=1$.

16.081. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен 120°, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5°. Определить число сторон этого многоугольника.

16.082. Найти значения x, при которых график функции $y=\log_{1/3}(x^2-8x)+2$ расположен не ниже оси абсцисс.

16.083. Указать такие значения x, при которых неравенство $y^2-(5^x-1)(y-1)>0$ выполняется для всех значений y.

16.084. Решить уравнение

$$(3, (1)-1, (3))^{\log_{9x} x}=(4, (2)-2, (4))^{\log_x 9x}.$$

16.085. Решить неравенство $\log_2(x+1)>\log_{x+1} 16$.

16.086. Показать, что график функции $y=\frac{\lg 5+\lg(x^2+1)}{\lg(x-2)}-2$ ни в одной точке не пересекает ось Ox.

16.087. Решить неравенство $\left(\frac{5}{4}\right)^{|\operatorname{ctg} x-1|}<\frac{5}{4}$.

16.088. При каких значениях x график функции $y=0{,}7^{\lg(x^2-8x+8)}$ расположен не ниже прямой $y=1$?

16.089. При каких a $(a\in Z^+)$ выполняется неравенство

$$2\log_{0,5} a-3+2x\log_{0,5} a-x^2<0, \quad \forall x\in R?$$

16.090. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{1+7x+49x^2+\ldots+(7x)^k+\ldots}}+\frac{1}{\sqrt{1-9x+81x^2+\ldots+(-9x)^k+\ldots}}=2$$

(предполагается, что $|x|<1/9$).

16.091. Найти углы α, β и γ первой четверти, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию с разностью $\pi/12$, а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию.

16.092. Указать все точки на оси Ox, в которых функция $y=\sqrt{3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3}$ не определена.

16.093. Длины сторон остроугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию с разностью в 5 см. Найти наибольшее число, обладающее следующим свойством: длина большей стороны любого треугольника указанного выше типа больше этого числа.

16.094. Найти длины наименьших сторон всех тупоугольных треугольников, у которых длины сторон выражаются целыми числами и составляют арифметическую прогрессию с разностью 3 см.

16.095. Найти точки пересечения графика функции $y=(x^{\lg x})^{\lg x}-10\,000x^2$ с осью абсцисс.

16.096. Определить, при каком значении k график функции $y=\lg kx-2\lg(x+1)$ имеет только одну общую точку с осью абсцисс.

16.097. Многочлен x^8-16 представить в виде произведения многочленов второй степени.

16.098. Решить неравенство $\log_{0,5}(2^x-1)>x-1$.

16.099. Решить неравенство $\log_{x-3}(x-1)<2$.

16.100. Какое наименьшее целое число градусов может содержать плоский угол трехгранного угла, обладающего следующим свойством: каждый из плоских углов содержит целое число градусов, причем эти три числа составляют арифметическую прогрессию с разностью 50?

16.101. Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равны $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$. Выразить через a, b и c сумму

$$a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta).$$

16.102. Найти $\sin 2x$, если $\cos x=\dfrac{\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}}{2}$, x принадлежит первой четверти и $0<m\leqslant 1$.

16.103*. Число $x=-3$ является двукратным корнем уравнения $x^3+x^2+ax+b=0$. Найти a и b и отыскать еще один корень данного уравнения.

16.104. Решить уравнение

$$\left(3\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\right)\right)^{\log_a x}=\left(20\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\ldots\right)\right)^{\log_x a}.$$

16.105*. Найти коэффициенты a, b и c многочлена x^3+ax^2+bx+c, если известно, что он нацело делится на трехчлен x^2-3x+2, а при делении на двучлен $x+1$ дает в остатке -24.

16.106. Найти такие значения λ, при которых оба корня трехчлена $(\lambda-1)x^2+(\lambda-3)x+(\lambda-2)$ положительны.

16.107. Найти x из уравнения

$$2^{x+2}+2^{x+1}+2^x+2^{x-1}+\ldots=3^{x+3}+3^{x+2}+3^{x+1}+3^x+\ldots.$$

16.108. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}+2+\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2},\\ |x+y|=5.\end{cases}$$

16.109. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots}+\sqrt{1+y+y^2+\ldots+y^k+\ldots}=5,\\ \sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}=5/6\end{cases}$$

(предполагается, что $|x|<1$, $|y|<1$).

16.110. Найти корни уравнения

$$(x-1)(x^9+x^8+\ldots+x^2+x+1)=x^5+991.$$

16.111. Исключить p и q из равенств

$$a=1+p+p^2+\ldots+p^k+\ldots\quad(|p|<1),$$
$$b=1+q+q^2+\ldots+q^k+\ldots\quad(|q|<1),$$
$$c=1+pq+(pq)^2+\ldots+(pq)^k+\ldots.$$

16.112. Для каких значений x график функции $y=x+3+\sqrt{(x+1)(x+7)}$ расположен ниже оси абсцисс?

16.113. Определить, при каких значениях k один из корней уравнения

$$x^3-(k^2-k+7)x-(3k^2-3k-6)=0$$

равен -1. Найти два остальных корня при этих значениях k.

16.114. Определить z, если известно, что

$$\operatorname{tg}\alpha=3^z,\quad \operatorname{tg}\beta=3^{-z}\quad\text{и}\quad \alpha-\beta=\pi/6.$$

16.115. Найти коэффициенты m и n квадратного трехчлена x^2+mx+n, если известно, что его остатки при делении на двучлены $x-m$ и $x-n$ соответственно равны m и n.

16.116. Составить уравнение второй степени с корнями $x_1=2\alpha+3\beta$ и $x_2=3\alpha+2\beta$, если α и β являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$.

16.117*. Проверить, что при $x=3+4i$ равенство

$$x=\left(2-\frac{x+1}{x-7}\right)^2$$

является верным.

16.118. Одна из сторон пятиугольника имеет длину 30 см. Длины остальных сторон выражаются в целых числах и составляют арифметическую прогрессию с разностью 2 см, причем длина меньшей из сторон не превышает 7 см. Найти длины сторон всех пятиугольников, для которых выполняется это условие.

16.119. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x+1\geqslant\sqrt[3]{x^3+91}, \\ \sqrt{x-3}\leqslant\sqrt[4]{x-1}. \end{cases}$$

16.120. Для каких значений m неравенство

$$x^2-(8m-2)x+15m^2-2m-7>0$$

выполняется: а) при всех значениях x; б) при всех значениях x, кроме одного?

16.121. Исключив u и v из равенств

$$u-v=a,\quad u^2-v^2=b,\quad u^3-v^3=c,$$

найти соотношение между a, b и c.

16.122. Если

$$\log_a \sin 40^\circ+\log_a \operatorname{tg} 40^\circ+\log_a \cos^{-1} 40^\circ=b,$$

то чему равняется

$$\log_a \sin 50^\circ+\log_a \operatorname{tg} 50^\circ+\log_a \cos^{-1} 50^\circ?$$

16.123*. Найти все значения x, для которых мнимое число

$$(\log_{0,5}\log_4\log_5(x^2+9)-1)\,i$$

изображается точкой, лежащей на верхней части мнимой оси.

16.124. Показать, что

$$\log_2 \cos 20^\circ+\log_2 \cos 40^\circ+\log_2 \cos 80^\circ=-3.$$

16.125. На графике функции $y=0,8\,|x|\cdot\dfrac{x^2+1}{x+1}$ найти точку, ордината которой в два раза больше ее абсциссы (сам график строить не обязательно).

16.126. Проверить, что число $x=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$ является корнем уравнения $x^3+12x-8=0$.

16.127. Найти отношение двух положительных чисел, если отношение среднего арифметического этих чисел к их среднему геометрическому равно $\frac{m^2+n^2}{2mn}$, где m и n — известные числа.

16.128. Вычислить без таблиц $\log_2 \sin 18^\circ + \log_2 \cos 36^\circ$.

16.129. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |2x+3y| = 5, \\ |2x-3y| = 1. \end{cases}$$

16.130. Показать, что если отношение корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ равно трем, то коэффициенты a, b и c связаны условием $3b^2-16ac=0$.

16.131. Решить уравнение $\log_x \sin 54^\circ + \log_x \cos 72^\circ = -2$.

16.132. В угол, содержащий 60°, вписаны пять окружностей так, что каждая последующая окружность (начиная со второй) касается предыдущей. Во сколько раз сумма площадей всех пяти соответствующих кругов больше площади меньшего круга?

16.133. Найти такое натуральное число, для которого сумма обратных величин его первой, второй и третьей степеней равна 0,875.

16.134. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7\cdot 3^x - 3\cdot 2^{z+y-x+2} = 15, \\ 2\cdot 3^{x+1} + 3\cdot 2^{z+y-x} = 66, \\ \lg(x+y+z) - 3\lg x - \lg yz = -\lg 4. \end{cases}$$

16.135. При каких значениях a и b трехчлен $16x^2+144x+(a+b)$ представляет собой полный квадрат, если известно, что $b-a=-7$?

16.136. Найти такое значение величины x, при котором трехчлен $a^2+ax(x-1)+36$ был бы полным квадратом. Будет это квадрат суммы или разности?

16.137. Функциональная зависимость между y и x задана в следующем виде:

$$\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha, \\ y = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha. \end{cases}$$

Выразить y как функцию x, исключив параметр α.

16.138. Дана последовательность с общим членом $u_n = \frac{3n+4}{n+2}$.

а) Показать, что эта последовательность возрастает; б) доказать, что любой член последовательности меньше числа 3; в) найти предел последовательности; г) определить номер того члена последовательности, начиная с которого разность между пределом последовательности и каждым из следующих ее членов будет меньше 0,01.

16.139. Показать, что сумма $x^2+y^2-4x+6y+13$ обращается в нуль только при одном значении x и одном значении y. Найти эти значения x и y.

16.140. Доказать, что число p^5-p делится на 5 при любом натуральном значении p.

[16.141.] Доказать, что при любых значениях a, b, c, d таких, что $a+c=b+d$, выражение $ab^{2n}+cd^{2n}$, $n \in N$ делится на $a+c$, следовательно, и на $b+d$.

16.142. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

16.143. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2+ax+a-2=0$ будет наименьшей?

16.144. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x-y=a(1+xy), \\ xy+x+y+2=0 \end{cases}$$

имеет решения.

16.145. Многочлен $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ разложить на множители.

16.146. Показать, что

$$\log_{0,5}\sin 70^\circ+\log_{0,5}\sin 50^\circ+\log_{0,5}\sin 10^\circ=3.$$

16.147. Доказать, что если три различных числа a, b, c удовлетворяют уравнениям

$$a^3+pa+q=0, \quad b^3+pb+q=0, \quad c^3+pc+q=0,$$

то $a+b+c=0$.

16.148. На биссектрисе первого координатного угла найти точку, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}=\sqrt[3]{2}.$$

16.149. Два квадратных трехчлена с одинаковыми старшими коэффициентами не имеют общих корней. Корни первого трехчлена по очереди подставлены во второй и результаты перемножены; корни второго трехчлена подставлены в первый и результаты тоже перемножены. Найти отношение получающихся при этом двух чисел.

16.150*. Найти все корни многочлена x^8-16.

16.151. Исключить m и n из равенств

$$a=m^2-n^2, \quad b=2mn, \quad c=m^2+n^2.$$

16.152. Преобразованием левой части проверить, что

$$\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1.$$

16.153. Если корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ составляют геометрическую прогрессию, то один из них $x_1=-\sqrt[3]{c}$. Доказать.

16.154*. Коэффициенты уравнения пятой степени, расположенного по убывающим степеням искомой величины, составляют геометрическую прогрессию со знаменателем q. Найти все пять корней этого уравнения.

16.155. Показать, что условие $a^3c=b^3$ является необходимым и достаточным для того, чтобы корни уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ составляли геометрическую прогрессию.

16.156. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\log_y z}+z^{\log_y z}=512, \\ y^{\log_z x}+x^{\log_z y}=8, \\ z^{\log_x y}+y^{\log_x z}=2\sqrt{2}. \end{cases}$$

16.157. Даны два кубических многочлена с одинаковыми старшими коэффициентами. Все три корня первого многочлена по очереди подставлены во второй и результаты перемножены. Затем все три корня второго многочлена по очереди подставлены в первый и результаты подстановки также перемножены. Найти сумму полученных таким образом произведений.

16.158*. Найти α и β для комплексных чисел $x=\alpha+\beta i$, делающих верным высказывание $x^3-3x+(3+i)=0$.

16.159. Известно, что $\lg 2=0{,}3010$ и $\lg 3=0{,}4771$. При каких целых значениях x величина $(1{,}44)^x$ имеет четырехзначную целую часть?

16.160. Известно, что все три корня уравнения $x^3+a(x^2+1)=0$ положительны. Доказать, что в таком случае они могут быть истолкованы как тангенсы углов некоторого остроугольного треугольника.

16.161*. Известно, что $a^2+a+1=0$. Найти $a^{2k}+a^k+1$.

16.162. Показать, что число $y=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ является корнем уравнения

$$y^3-5y^2+4=0.$$

Найти остальные корни этого уравнения.

16.163. Решить уравнение

$$x^3-3\sqrt{2}\,x^2+5x-\sqrt{2}=0,$$

если известно, что его корни составляют арифметическую прогрессию.

16.164. Доказать, что если корни уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

составляют арифметическую прогрессию, то один из них равен $-a/3$.

16.165*. Найти действительную и мнимую части по меньшей мере одного комплексного числа z, для которого $z^3=2-11i$.

16.166. Найти x ($x\in Z$), если $\left(\sqrt[3]{0{,}5}+\sqrt[3]{4}\right)^x=13{,}5$.

16.167*. Решить уравнение

$$x^4+(2a+6)x^3+(a^2+8a+13)x^2+$$
$$+(2a^2+12a+14)x+(2a^2+8a+6)=0,$$

если известно, что одним из его корней является число $-1+i$.

16.168. Решить уравнение $64x^3-24x^2-6x+1=0$, если известно, что его корни образуют геометрическую прогрессию.

16.169. Для каких значений x выполняется равенство

$$\left|\frac{x^3}{x^2-1}\right|=\frac{x^3}{1-x^2}?$$

16.170*. Показать, что если коэффициенты членов кубического уравнения, расположенных в порядке убывания степеней искомой величины, составляют геометрическую прогрессию, то и корни уравнения также составляют геометрическую прогрессию со знаменателем i (i — мнимая единица).

16.171. Решить уравнение

$$4(\log_2\cos x)^2+\log_2(1+\cos 2x)=3.$$

16.172. Проверить преобразованием левой части, что

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2.$$

16.173. Показать, что если график функции $y=x^3+px^2+qx+r$ проходит через точки (2; 0), (1; —1) и (0; —4), то ось абсцисс он пересекает только в первой из них.

16.174. Проверить, что число $2-\sqrt{3}$ является корнем уравнения

$$x^2+41=14x+\frac{10}{x}$$

и найти все остальные его корни.

16.175. Найти все значения a, при которых один корень уравнения

$$(a-1)^2x^2+(2a-3)x-a=0$$

больше единицы, а другой — меньше единицы.

16.176*. Проверить, что число $x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ является корнем уравнения $\operatorname{arctg} x=\pi/12$.

16.177*. Проверить, что число $x=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ является корнем уравнения $\operatorname{arctg} x=\pi/24$.

16.178. Показать, что если $a_1a_2=2(b_1+b_2)$, то по меньшей мере одно из уравнений

$$x^2+a_1x+b_1=0$$

или $x^2+a_2x+b_2=0$ имеет корни.

16.179. Указать все значения x, для которых выполняется неравенство $x^{1+\log_a x}>a^4x$ (рассмотреть два случая: $a>1$ и $0<a<1$).

16.180. Выяснить, для каких значений x справедливо равенство

$$\sqrt[4]{x^8-4x^4+6-4x^{-4}+x^{-8}}=x^{-2}-x^2.$$

16.181. Показать, что

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

16.182. Показать, что

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}.$$

16.183. Показать, что $\forall x \in [1;\ 2]$ сумма

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

сохраняет одно и то же постоянное значение.

16.184. Число 2 разложить на сумму четырех различных положительных дробей, имеющих в качестве числителя единицу, а в качестве знаменателя — натуральное число.

16.185. Даны три равенства

$$\frac{y}{z}-\frac{z}{y}=a,\quad \frac{z}{x}-\frac{x}{z}=b,\quad \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=c,\quad \{x;\ y;\ z;\}\subset R+.$$

Выразить зависимость между a, b, c (иными словами, из данных равенств исключить x, y, z).

16.186. Найти произведение корней уравнения $z^{\log_5 3z} = 25\sqrt[3]{z^4}$.

16.187. Найти коэффициенты a, b и c многочлена

$$x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c,$$

если известно, что он без остатка делится на многочлен

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

16.188. Если остатки от деления некоторого многочлена на двучлены $x+1$ и $x-1$ равны соответственно -1 и 1, то чему равен остаток от деления того же многочлена на x^2-1?

16.189. Решить уравнение $|x+1|+|x-1|=2x^3$.

16.190*. Найти значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\left|\frac{1+i\sqrt{7}}{4} - \cos x\right| < 1$$

(i — мнимая единица).

16.191*. Найти значения x, удовлетворяющие неравенству

$$|4i - 1 + \log_{0,5} x| \geqslant 5$$

(i — мнимая единица).

16.192. В конечной геометрической прогрессии известны ее первый член a, последний член b и сумма S всех ее членов. Найти сумму квадратов всех членов этой прогрессии.

16.193. Показать, что для всякой арифметической прогрессии при любом n выполняется равенство

$$S_{2n} = S_n + \frac{1}{3} S_{3n}$$

(S_k — сумма k первых членов прогрессии).

16.194. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3|y| = 1, \\ |x| + 2y = 4. \end{cases}$$

[16.195.] Найти пересечение множеств, на которые отображают отрезок $[-1; 1]$ производные функций $y_1 = \ln\cos x$ и $y_2 = (x-4)\sqrt[3]{x}$.

16.196*. Найти значения x; удовлетворяющие неравенству

$$1 + \log_{0,5} \frac{|x+1+2i| - 2}{\sqrt{2} - 1} \geqslant 0$$

(i — мнимая единица).

16.197*. Решить неравенство

$$|1 + 4i - 2^{-x}| \leqslant 5$$

(i — мнимая единица).

16.198*. Доказать, что ни при каких значениях m комплексное число $\log_2(m^2 - 13m + 44) - 2 + i\sqrt{\log_2 m - 3}$ не может быть чисто мнимым.

16.199*. Показать, что уравнение

$$\log_{\operatorname{arctg} x} \operatorname{tg} x = 1$$

имеет бесконечно много корней, из которых только один меньше числа 1,6.

Решить уравнения (16.200—16.202):

16.200. $1-2x-x^2=\operatorname{tg}^2(x+y)+\operatorname{ctg}^2(x+y)$.

16.201. $x^2+6x\sin 3xy+9=0$.

16.202. $6-4x-x^2=\dfrac{5}{\left|\sin\dfrac{y}{x}\cdot\cos\dfrac{y}{x}\right|}$.

16.203. При каких значениях x функция

$$y=2(1+\sin 2x\sin 3x)-\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 6x)$$

достигает наименьшего значения? Каково это значение?

16.204. Найти наибольшее значение функции

$$y=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{4\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

16.205. Дано уравнение $x^2+\alpha x+\beta=0$. Не вычисляя корней этого уравнения, составить второе квадратное уравнение, корни которого были бы равны квадратам корней данного уравнения. Доказать, что если α — рациональное и $\alpha\neq 0$, то из иррациональности корней данного уравнения следует иррациональность хотя бы одного из корней составленного уравнения.

16.206. Решить уравнение $5^{\sin\frac{x}{2}}-0{,}04^{\sin^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=-0{,}8$.

16.207. Решить неравенство $10^{|\sin x|}>10^{|\cos x|}$.

16.208. Решить неравенство $\left(\dfrac{7}{6}\right)^{|\sin x|}>\left(\dfrac{7}{6}\right)^{1-|\cos x|}$.

16.209. Определить, при каких значениях a уравнение

$$x^3-ax+(2a-8)=0$$

имеет решение.

16.210. Решить систему неравенств $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|\sin x|}<1$.

16.211. При каких значениях m трехчлен

$$y=\left(\log_{1/3}\frac{m-1}{m+1}-2\right)x^2-2\left(2+\log_{1/3}\frac{m-1}{m+1}\right)x+2+\log_{1/3}\frac{m-1}{m+1}$$

принимает отрицательные значения $\forall x\in R$?

16.212. Вычислить $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}$, если известно, что $\cos x=\dfrac{a}{b+c}$, $\cos y=\dfrac{b}{c+a}$, $\cos z=\dfrac{c}{a+b}$ и что $a+b+c\neq 0$.

16.213. Дана правильная несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$. Доказать, что из равенства $\dfrac{a}{b}+\dfrac{p}{q}=1$ следует, что $\dfrac{a}{b}$ — несократимая дробь.

16.214. Не возводя чисел $a=\sqrt[4]{25}+\sqrt[4]{9}$ и $b=\sqrt[4]{240}$ в четвертую степень, выяснить, какое из них больше.

16.215. 1) Пусть x_1, x_2 и x_3 — длины ребер, выходящих из одной вершины некоторого прямоугольного параллелепипеда. Составить уравнение третьей степени с корнями x_1, x_2 и x_3 и выяснить геометрический смысл его коэффициентов.

2) Найти длины ребер такого прямоугольного параллелепипеда, у которого сумма всех ребер, полная поверхность и объем соответственно равны 48 см, 88 см^2 и 48 см^3.

16.216. Решить уравнение

$$|\lg^2(1-9x)+\lg(1-9x)-2|=2-\lg(1-9x)-\lg^2(1-9x).$$

16.217. При помощи цифр a и b, таких, что a^2 и b^2 также являются цифрами, составлены две десятичные периодические дроби $0,(ab)$ и $0,(b^2a^2)$. Найти a и b из того условия, что $0,(ab)=4/33$, а $0,(b^2a^2)=41/99$.

16.218. Решить уравнение $36x^3-72x^2+47x-10=0$, воспользовавшись тем, что его корни являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника.

16.219. При каких значениях x функция

$$y=\frac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{ctg}^2 x+1$$

достигает наименьшего значения? Найти это значение.

16.220. Длины ребер, исходящих из общей вершины некоторого прямоугольного параллелепипеда, являются корнями уравнения ax^3+ $+bx^2+cx+d=0$. Определить длину диагонали этого параллелепипеда.

[16.221.] Найти образ отрезка $[-1;\ 1]$ при отображении, заданном производной функции

$$y=\frac{x}{2}(x-4)+2(x-2)\ln(2-x).$$

16.222*. Дана окружность с центром в начале координат. На окружности взяты три точки на равных расстояниях друг от друга. Показать, что комплексные числа, соответствующие этим точкам, образуют геометрическую прогрессию. Найти знаменатель этой прогрессии.

16.223. Показать, что для всякого натурального числа n выполняется равенство $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$, и с его помощью решить уравнение

$$(1+3+5+\ldots+(2n+1)):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}\right)=342.$$

16.224. Длины катетов некоторого прямоугольного треугольника являются корнями уравнения $Ax^2+Bx+C=0$ $(A>0)$. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

16.225. В уравнении $x^3-12x^2+mx-60=0$ найти коэффициент m из того условия, что корни этого уравнения являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника.

16.226. Доказать, что функция $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ является нечетной.

16.227. Среднее арифметическое двух положительных чисел a и b $(a>b)$ в m раз больше их среднего геометрического. Доказать, что

$$\frac{a}{b}=\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}.$$

16.228. Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения

$$Ax^2+Bx+C=0.$$

[16.229.] Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $h(t)=6+7t-5t^2$ (м). Найти скорость тела в момент соприкосновения с землей. (Ускорение g считать равным 10 м/с^2.)

16.230. Выяснить, каким условиям должны подчиняться числа a и b, чтобы графики функций

$$y=a\cdot 2^x+b, \quad y=b\cdot 2^{-x}+a,$$

имели бы: 1) только одну общую точку (и найти эту точку); 2) две общие точки (и найти эти точки).

16.231. Составить уравнение квадратичной параболы с осью, параллельной оси ординат, если эта парабола проходит через точки $(-2; -3)$, $(-1; 2)$ и $(1; 0)$. Показать, что она пересекает ось абсцисс по разные стороны от оси ординат.

16.232*. Найти действительное число b из того условия, что точки, изображающие комплексные числа $3-5i$, $1-i$ и $-2+bi$, лежат на одной прямой.

16.233. Квадратичная парабола, ось которой параллельна оси ординат, проходит через точки $(-1; 6)$, $(0; 6)$ и $(1; 4)$. Найти точки пересечения параболы с осью абсцисс.

16.234. Доказать, что графики функций

$$y=m\cdot 3^x+n, \quad y=n\cdot 3^{-x}+m$$

при условии $mn<0$ пересекаются в двух точках, из которых одна лежит на оси абсцисс, а другая на оси ординат.

16.235. Найти такие значения a, для которых корни уравнения

$$\log_2(x+3)-2\log_4 x=a$$

были бы расположены между числами 3 и 4.

16.236. Величину $A=\dfrac{1-\log_{0,3}x}{\log_{0,3}x}+\dfrac{1}{1-\log_{0,3}x}$ сравнить с нулем в точках $x_1=0,2$, $x_2=0,7$ и $x_3=1,2$.

16.237*. Определить, при каких значениях a и b многочлен $x^4-3x^3+x^2+ax+b$ делится на многочлен x^2-2x+2: 1) без остатка; 2) с остатком, равным 1; 3) с остатком, равным x.

16.238*. Выяснить, делится или не делится многочлен $x^4+2x^2+4(1+i)$ на $x-1+i$.

16.239*. Не производя деления, выяснить, делится или не делится многочлен $x^4-11x^3+42x^2-64x+32$ на многочлен $x^3-6x^2+11x-6$.

16.240*. Решить неравенство $\arcsin x<\arccos x$.

16.241*. Решить неравенство $\arcsin x<\sqrt{x^2-1}$.

16.242. Найти площадь поверхности сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, три измерения которого являются корнями уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$.

16.243. Найти все четырехзначные числа, обладающие следующим свойством: если в этом числе зачеркнуть вторую слева цифру, то оставшиеся цифры, расположенные в прежнем порядке, образуют трехзначное число, равное квадрату двузначного числа, записанного двумя первыми цифрами искомого числа.

16.244*. Решить неравенство $\lg(x^2+0,91)\cdot\arcsin x\leqslant 0$.

16.245. Доказать, что графики функций

$$y=4^x-3\cdot2^x \quad \text{и} \quad y=-(5\cdot2^{-x}+1)$$

общих точек не имеют.

16.246. Если $\log_b a=m$ и $\log_c b=n$, то чему равен $\log_{bc} ab$?

16.247. Показать, что если $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию, то $\log_a b=\log_b c$.

16.248. В некоторой геометрической прогрессии, содержащей $2n$ положительных членов, произведение первого члена на последний равно 1000. Найти сумму десятичных логарифмов всех членов прогрессии.

16.249. Вычислить

$$(1+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+\ldots+199^2)-$$
$$-(2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2+\ldots+200^2).$$

16.250. Даны два квадратных трехчлена, у которых старшие коэффициенты равны. Определить сумму остатков, получающихся при делении первого трехчлена на второй и второго на первый.

16.251. Показать, что если длины сторон некоторого треугольника составляют геометрическую прогрессию, то и длины построенных высот треугольника также составляют геометрическую прогрессию.

16.252. Найти $\{x\}$, $x\in Z$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} (\log_3 x)^{\log_9 x}\leqslant 1, \\ x>1. \end{cases}$$

16.253. Найти сотый член последовательности, начинающейся с числа 100, у которой разности между последующим членом и ему предшествующим составляют последовательность четных чисел, начинающуюся с числа 2.

16.254. Найти числа x, которые удовлетворяют уравнению $x^3+4x^2+x-6=0$ и неравенству $\log_{x^2+1} 64>3$.

16.255*. Решить неравенство $\dfrac{\arccos x-2}{\arcsin x}<-1$.

16.256. При каких значениях коэффициента A уравнение

$$A\sin^4 x+A\cos^4 x+1=0$$

имеет решение?

16.257. Найти значения x, которые удовлетворяют уравнению $9^{-\cos^2 x}-3^{\cos 2x}=\dfrac{2}{3}$ и системе неравенств $-2<x<3$.

16.258. Решить уравнение $\cos^2 x-\sin^2\left(x\sqrt{3}\right)=1$.

16.259. Упростить

$$\left(\sqrt[\log_2 N]{N}\cdot\sqrt[\log_4 N]{N}\cdot\sqrt[\log_8 N]{N}\ldots\sqrt[\log_{512} N]{N}\right)^{1/15}.$$

(Основания логарифмов, являющихся показателями корней, представляют собой подряд идущие натуральные степени числа 2.)

16.260. Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин всех медиан составляет 150% от квадрата длины его гипотенузы.

16.261. Известно, что корни x_1, x_2, x_3 уравнения

$$x^3-6x^2+px+q=0$$

удовлетворяют соотношению $x_1:x_2:x_3=1:2:3$. Найти эти корни, а также коэффициенты p и q.

16.262. Определить, между какими двумя наиболее близкими друг к другу целыми числами расположены коэффициенты p и q уравнения $x^2+px+q=0$, если его корни x_1 и x_2 удовлетворяют неравенствам $-5<x_1<-4$, $2<x_2<3$.

16.263. Решить неравенство

$$\log_2 \log_4 x+\log_4 \log_2 x\leqslant -4.$$

16.264. Найти номер наибольшего слагаемого в разложении $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{100}$.

16.265*. Положив $\sqrt{a+bi}=u+vi$ $(b>0)$, выразить u и v через a и b (иными словами, получить формулу для извлечения квадратного корня из комплексных чисел с положительной мнимой частью). То же для случая $\sqrt{a-bi}$, $b>0$.

16.266. Решить уравнения

$$36 \log_2^3 x-7 \log_2 x+1=0$$

и

$$400 \log_4^3 x-21 \log_4 x+1=0,$$

если известно, что они имеют общий корень.

16.267. Числа a и b связаны равенством $a^{2b}-4^b=(2a)^b$. Выразить a через b и b через a

16.268. Доказать, что если N — число целых чисел, десятичные логарифмы которых имеют одну и ту же положительную хар ктеристику n, а M — число целых чисел, десятичные логарифмы которых имеют одну и ту же отрицательную характеристику $-m$, то

$$\lg N-\lg M=n-m+1.$$

16.269. Найти числа a и b из того условия, что равенство

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{x}{x^2-1}$$

выполняется для всех допустимых значений x.

16.270. Решить уравнение $2\log_4^3 x-3\log_4^2 x+1=0$.

16.271. Если $\log_2\left(\sqrt{3}+1\right)+\log_2\left(\sqrt{6}-2\right)=A$, то чему равна сумма $\log_2\left(\sqrt{3}-1\right)+\log_2\left(\sqrt{6}+2\right)$?

16.272. Найти φ и m, если они удовлетворяют следующим условиям:

$$3\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{m^2-2m+3},\qquad 2\cos 2\varphi=2m-3,\qquad 0<\varphi<\pi/2.$$

16.273. Найти корни уравнения $|x|^3+|x-1|^3=9$.

16.274. Найти точки пересечения параболы $y=x^2+1$ и кривой $y=|3x^2-5|$.

16.275. Найти точки пересечения кривой $y=12x^2-5|x|-36$ и параболы $y=6x^2-5x-12$.

16.276. Сколько трехзначных чисел, состоящих из различных цифр и кратных 45, можно составить из цифр 0, 3, 4, 5, 6, 9?

16.277. В каком выпуклом многоугольнике число диагоналей равно числу сторон?

16.278. Доказать, что сумма длин высот треугольника меньше его периметра.

16.279. Пусть n — число сторон выпуклого многоугольника, а d — число его диагоналей. Указать все значения n, для которых $n>d$.

16.280. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна S. Найти границы возможных значений длины его гипотенузы c.

16.281. Показать, что если $\operatorname{tg}\alpha=3\operatorname{tg}\beta$, то $\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)\leqslant 1/3$.

16.282. Решить неравенство

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2 2x<1-4\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 2x.$$

16.283. Даны числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ одного и того же знака. Показать, что

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{k-1}}{x_k}+\frac{x_k}{x_1}\geqslant k.$$

16.284. Решить неравенство $\sin x+\sin 3x<4\sin 2x$.

16.285. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x+3}+1}}{x^2-5x+6}>0$.

16.286. Решить неравенство $1+\cos 4x\leqslant 2\sin^2 x$.

16.287. Решить неравенство $\cos x<\cos^2\dfrac{3}{4}x$.

16.288. Доказать неравенства

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a\cos\alpha+b\sin\alpha\leqslant\sqrt{a^2+b^2}.$$

16.289. Найти все значения x, принадлежащие первой четверти, для которых выполняется неравенство $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x>4$.

16.290. Показать, что

$$\log_{30}^2 2+\log_{30}^2 3+\log_{30}^2 5\geqslant 1/3.$$

[16.291.] При каких значениях a верно равенство

$$\lg\sqrt{3a-\sqrt{9a^2-1}}=-\lg\left(3a+\sqrt{9a^2-1}\right)?$$

[16.292.] Доказать тождество

$$\sin 3\alpha=4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right).$$

[16.293.] В правильной треугольной пирамиде боковая грань имеет заданную постоянную площадь и составляет с плоскостью основания угол, величина которого равна α. При каком значении α расстояние от центра основания пирамиды до ее боковой грани будет наибольшим?

[16.294.] Величина угла при вершине A трапеции $ABCD$ равна α. Длина боковой стороны AB вдвое больше длины меньшего основания BC. При каком значении α величина угла BAC будет наибольшей? Чему равно это наибольшее значение?

[16.295.] В правильную четырехугольную пирамиду с ребром основания a и высотой H вписана правильная четырехугольная призма так, что ее нижнее основание лежит в основании пирамиды, а вершины верхнего основания — на боковых ребрах. Найти длину ребра основания и длину высоты призмы, имеющей наибольшую боковую поверхность.

[16.296.] Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\frac{2m}{1+m^2}$ и $\frac{1-m^2}{1+m^2}$, а вектор $\vec{b}$ — координаты $\frac{1-k^2}{1+k^2}$ и $\frac{2k}{1+k^2}$.

1) Доказать, что оба вектора — единичные: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$.

2) Опираясь на свойство скалярного произведения

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,$$

доказать истинность неравенства

$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{(m+k)(1-mk)}{(1+m^2)(1+k^2)}\leqslant\frac{1}{2}.$$

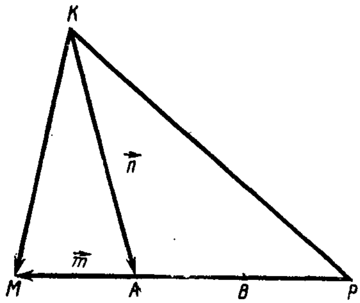

Рис. 16.1

[16.297.] Дано: $\triangle MKP$, $A\in[MP]$, $B\in[MP]$, $|MA|=|AB|=|BP|$; $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$, $\overrightarrow{KA}=\vec{n}$ (рис. 16.1).

1) Выразить $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{KP}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

2) Вычислить скалярное произведение $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KP}$, если $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=5$ и $(\widehat{\vec{m},\ \vec{n}})=120^\circ$.

[16.298.] Пусть точки M и N делят отрезки AB и CD соответственно в равных отношениях так, что $|AM|:|MB|=|CM|:|ND|=m:n$. Доказать, что при этом выполняется равенство

$$\overrightarrow{MN}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BD}.$$

[16.299.] Доказать, что сумма квадратов длин всех ребер параллелепипеда равна сумме квадратов длин всех его четырех диагоналей.

[16.300.] Дана окружность $x^2+y^2+ax+by=0$. Доказать, что прямая $ax+by=0$ касается этой окружности. Записать уравнение окружности, симметричной данной относительно прямой $ax+by=0$.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.001. 20. 1.002. 1. 1.003. 32. 1.004. 0,5. 1.005. 5. 1.006. 1. 1.007. 3. 1.008. 1. 1.009. 9. 1.010. 1. 1.011. 2. 1.012. 4. 1,013. 12. 1.014. 1. 1.015. 4. 1.016. 2. 1.017. 8. 1.018. 3. 1.019. 2. 1.020. 3. 1.021. 0,5. 1.022. 1. 1.023. 10. 1.024. 1. 1.025. 3. 1.026. 3. 1.027. 6. 1.028. 2. 1.029. 3. 1.030. 0,5. 1.031. 5/6. 1.032. 11. 1.033. 1. 1.034. 5/3. 1.035. 9. 1.036. 16. 1.037. 17/27. 1.038. 5. 1.039. 12. 1.040. 15/14. 1.041. 1. 1.042. 1/3. 1.043. 5. 1.044. 5. 1.045. 25. [1.046.] 1.

Глава 2

2.001. $x-1$. **2.002.** $\dfrac{2(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}{p-q}$. **2.003.** $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b}$. **2.004.** 0,2. **2.005.** 0. **2.006.** $1/(ab)$. **2.007.** $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$. **2.008.** y^2. **2.009.** $(t+1)/t$. **2.010.** -4. **2.011.** $\dfrac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}$. **2.012.** $x+1$. **2.013.** $\sqrt{a-1}$. **2.014.** $\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$. **[2.015.]** $\sqrt[m]{y}$. **2.016.** $|z^{1/p}-z^{1/q}|$. **2.017.** $\sqrt{x}$. **2.018.** 0,04. **2.019.** 16. **2.020.** $2\sqrt[6]{a^5}/a$. **2.021.** $1/\sqrt{x^2-1}$. **2.022.** $x\in]0;2[\Rightarrow-\sqrt{x}$; $x\in]2;\infty[\Rightarrow\sqrt{x}$. **2.023.** $\sqrt{6x}$. **2.024.** $\sqrt[3]{20x}$. **2.025.** 1. **2.026.** $1/\sqrt[12]{a^2b}$. **2.027.** $\sqrt[6]{2}$. **2.028.** $2/(x^2-a^2)$. **2.029.** $2\sqrt[3]{r}/r$. **2.030.** -1. **2.031.** $1/a$. **2.032.** 5. **2.033.** $4p-\sqrt{4p^2-1}$. **2.034.** $\sqrt{a^2-1}$. **2.035.** $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$. **2.036.** $-3n(m+p)$. **2.037.** $-\sqrt{x}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)$. **2.038.** $\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$. **2.039.** -4. **2.040.** 0,1. **2.041.** $-\dfrac{1}{a^2+a+1}$. **2.042.** 1. **2.043.** $\left(\dfrac{m}{n}\right)^{m+n}$. **2.044.** 1. **2.045.** $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$. **2.046.** -1. **2.047.** $\dfrac{b+1}{b-2a}$. **2.048.** 0,5. **2.049.** $q(p+q)$. **2.050.** $1+3x^2$. **2.051.** 5. **2.052.** $1-x^2$. **2.053.** $\dfrac{2}{1-p^4}$. **2.054.** 1. **2.055.** $\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}$. **2.056.** 1/2. **2.057.** $\dfrac{x-y}{x+y}$. **2.058.** 1. **2.059.** $\dfrac{1}{xy}$. **2.060.** $\dfrac{24}{5y-2x}$. **2.061.** 20. **2.062.** $2a+3$. **2.063.** $1+2x$.

2.064. $\frac{a-b}{a+b}$. 2.065. $x+y$. 2.066. $-\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)$. 2.067. $a^{5/6}$. 2.068. 1.

2.069. $a^{1/3}+b^{1/3}$. 2.070. $a-b$. 2.071. $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m}$. 2.072. $\sqrt[3]{a^2}-$ $-\sqrt[3]{b^2}$. 2.073. 1. 2.074. $\frac{1}{a\left(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a}\right)}$. 2.075. $\frac{x^{1/m}+3x^{1/n}}{x}$.

2.076. 6. 2.077. 1/4. 2.078. 2. 2.079. $\sqrt{2}(m+3)$. 2.080. $a-b$.

2.081. $\frac{\sqrt{t^2-4}}{t+2}$. 2.082. -1. 2.083. $2x-1$. 2.084. 1. 2.085. 1.

2.086. -25. 2.087. $-\sqrt{ac}$. 2.088. $\sqrt{1+x}$. 2.089. 2. 2.090. 3.

2.091. $\frac{x^{1/3}+y^{1/3}}{\sqrt[6]{x^5y^2}}$. 2.092. $\frac{1}{x^2-1}$. 2.093. $2\sqrt{3}$. 2.094. 0. 2.095. $z^{1/(p-3)}$.

2.096. $\frac{a^2}{4(a^2-x)}$. 2.097. $\frac{2(x-4)}{x}$. 2.098. 1. 2.099. -1. 2.100. $z(z+1)\times$ $\times(z+2)$. 2.101. $-\frac{\sqrt{2}}{2a}$. 2.102. $a\in]-\infty;-1[\Rightarrow 1-a$; $a\in]-1;0[$ $\cup]0;1[\cup]1;\infty[\Rightarrow a-1$. 2.103. $a/2$. 2.104. $(a+b)\sqrt[3]{b^2-2a^3}$.

2.105. -1. 2.106. 29/35. 2.107. $-7/24$. 2.108. 100. 2.109. 1/3.

2.110. $\frac{a^3}{2(a-1)}$. 2.111. $\frac{1}{ab}$. 2.112. $\frac{\sqrt[3]{8-t^3}}{\sqrt{2}}$. 2.113. $\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}$.

2.114. $16a^2$. 2.115. $(a+b)^2$. 2.116. $1/m^2$. 2.117. $-a^2$. 2.118. 1/2.

2.119. 3/5. 2.120. 31/3. 2.121. $\sqrt[12]{32}$. 2.122. $2\sqrt[6]{18}$. 2.123. 0. 2.124. 0.

2.135. 0. 2.136. 0. 2.137. $\frac{a+b}{ab}$. 2.138. $-3/4$. 2.139. 3/4. 2.140. 0,2.

2.141. 6. 2.142. $-\sqrt{6}/2$. 2.143. $a-b$. 2.144. $a+b$. 2.145. 1.

2.146. $2\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)$. 2.147. $\left(\sqrt[4]{13}+\right.$ $\left.+\sqrt[4]{9}\right)\left(\sqrt{13}+3\right)$. 2.148. $\frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(5+3\sqrt{3}\right)}{-2}$. 2.149. $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{2}$. 2.150. $\frac{\left(2\sqrt{6}+1\right)\left(3-4\sqrt{2}\right)}{23}$. 2.151. $\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)\left(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\right)}{a}$. 2.153. 6. 2.154. 5. 2.156. $\sqrt{a^2-1}$.

2.157. $a\in]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]0;\sqrt{3}[\Rightarrow -2a$; $a\in]-\sqrt{3};0[\cup$ $]\sqrt{3};\infty[\Rightarrow 2a$.

2.158. $a\in]-1;\ 1[\Rightarrow -\frac{\sqrt{a+1}}{a+3};\ a\in]1;\ \infty[\Rightarrow \frac{\sqrt{a+1}}{a+3}$. **2.159.** $\frac{1}{ab}$.

2.160. 1. **2.161.** $\frac{(a-2)\sqrt{a+1}}{(a+2)\sqrt{a-1}}$. **2.162.** $a\in]-\infty;\ 0[\Rightarrow -2;$

$a\in]0,\ \infty[\Rightarrow 2$. **2.163.** $16a^4/x^2$. **2.164.** $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$. **2.165.** $-\sqrt{\frac{t+2}{t-2}}$.

2.166. $b\in]0;\ 1[\Rightarrow \frac{b^2-1}{\sqrt{b}};\ b\in]1;\ \infty[\Rightarrow \frac{b^2+3}{\sqrt{b}}$. **2.167.** $m\in]-\infty;\ 0[$

$\cup]0;\ 1[\Rightarrow -\left(m^2+m\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right);\quad m\in]1;\ \sqrt[3]{2}[\cup]\sqrt[3]{2};\ \infty[$

$\Rightarrow \frac{m^3}{m-\sqrt[3]{2}}$. **2.168.** $x\in]-\infty;1[\cup]1;\ 3[\Rightarrow -(x^2+x+1);\ x\in]3;\ \infty[$

$\Rightarrow x^2+x+1$. **2.169.** mn. **2.170.** $a\in]-\infty;\ -2[\Rightarrow -\frac{a}{2};\ a\in]-2;\ \infty[$

$\Rightarrow \frac{a}{2}(a-1)$. **2.171.** $\frac{x+y}{2}$. **2.172.** $\frac{4a-16}{a+4}$. **2.173.** $m\in]-\infty;\ 0[$

$\cup]3;\infty[\Rightarrow \frac{1}{m+2};\ m\in]0;\ 3[\Rightarrow -\frac{1}{m+2}$. **2.174.** $x\in]-\infty;0[\cup]0;\ 1[$

$\cup]1;\ 2[\Rightarrow -\frac{1}{x};\ x\in]2;\ 3[\cup]3;\ \infty[\Rightarrow \frac{1}{x}$. **2.175.** $x\in[1;\ 2[\Rightarrow -1;$

$x\in]2;\ \infty[\Rightarrow 1$; **2.176.** $a\in]-\infty;-3[\cup]-3;-1[\cup]-1;\ 2[\Rightarrow \frac{1}{a+1};$

$a\in]2;\ \infty[\Rightarrow \frac{1}{a+3}$. **2.177.** $x\in]-\infty;\ 0[\Rightarrow \frac{x+3}{x^2-x};\quad x\in]0;\ 1[$

$\Rightarrow \frac{2x^2+x+3}{x+x^3};\ x\in[1;\ \infty[\Rightarrow \frac{3}{x}$. **2.178.** $\frac{a+2}{a-1}$. **2.179.** $\frac{a^2+1}{a-1}$. **2.180.**

$x\in]-\infty;\ 0[\Rightarrow \frac{1}{1-3x};\quad x\in[0;\ \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3};\ 1[\Rightarrow \frac{x+1}{(x-1)(3x-1)};$

$x\in]1;\ \infty[\Rightarrow \frac{1}{x-1}$. **2.181.** $\sqrt[6]{a^2-1}$. **2.182.** $a^2x^2-b^2y^2$. **2.183.**

$x\in]-\infty;\ -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2};\ 0[\cup]0;\ 3[\Rightarrow \frac{3}{x(2x+3)};\ x\in]3;\ \infty[\Rightarrow \frac{1}{x}$.

2.184. $a\in]-\infty;\ -5[\Rightarrow -\frac{1}{a};\quad a\in]-5;\ 0[\cup]0;\ \frac{5}{3}[\cup]\frac{5}{3};\ \infty[$

$\Rightarrow \frac{a+5}{a(3a-5)}$. **2.185.** $x\in]-\infty;\ -1[\Rightarrow \frac{x+1}{-x};\ x\in[-1;\ 0[\Rightarrow \frac{x+1}{2-x};$

$x\in]0;\ 2[\cup]2;\ \infty[\Rightarrow \frac{x+1}{x-2}$. **2.186.** p. **2.187.** $\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1}$. **2.188.** $x\in$

$]0;\ 1[\Rightarrow \frac{1}{x-x^2};\ x\in]1;\ \infty[\Rightarrow \frac{1}{x^2-x}$. **2.189.** $r\in]-\infty;0[\Rightarrow \frac{r^2-r}{r^2+1},$

$r\in[0;\,1[\Rightarrow\frac{r}{1-r}$; $r\in]1;\ \infty[\Rightarrow\frac{r}{r-1}$. **2.190.** $\frac{1}{z+2}$. **2.191.** $\frac{1}{1+\sqrt[3]{a}}$.

2.192. $\frac{a}{a+1}$. **2.193.** $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$. **2.194.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a}}$. **2.195.** $\frac{a+2}{a^2(a-1)^2}$.

2.196. $x\in]-\infty;\ -1]\Rightarrow 2$; $x\in]-1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}[$ $\cup]\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1[\Rightarrow\frac{2x^2}{2x^2-1}$; $x\in]1;\ \infty[\Rightarrow 0$. **2.197.** $\frac{1}{\sqrt{b+2}}$.

2.198. $\frac{1-b}{1+b}$. **2.199.** $\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}$. **2.200.** $\sqrt[4]{x}$, если $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}>0$; $-\sqrt[4]{x}$, если $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}<0$. **2.201.** $\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}}$.

2.202. $\frac{m-8}{2}$. **2.203.** $\frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}$. **2.204.** 0. **2.205.** $\frac{x^2-1}{2x-b}$.

2.206. $\frac{\sqrt[3]{x-y}}{x+y}$. **2.207.** $\frac{1}{3x}(x^2-3x+2)$. **2.208.** 1. **2.209.** $x\in[0;\ 9[$ $\Rightarrow 3-2\sqrt{x}$; $x\in]9;\ \infty[\Rightarrow -3$. **2.210.** $a\in]0;\ 1[\Rightarrow 2$; $a\in]1;\ \infty[$ $\Rightarrow 2/3$. **2.211.** $\frac{z^2}{z^2+z+1}$. **2.212.** 5. **2.213.** $x\in]-\infty;\ 0[\Rightarrow -1/2$; $x\in]0;\ \infty[\Rightarrow 1/2$. **2.214.** $x\in]-\infty;\ 0[\Rightarrow -2$; $x\in]0;\ \infty[\Rightarrow 2$. **2.215.** $z\in]-3;\ 3[\Rightarrow\frac{1}{9z}(z^2+9)(z-3)$; $z\in]3;\ \infty[\Rightarrow\frac{2}{3}(z-3)$. **2.216.** $m/2$.

2.217. $\frac{1}{a(3a+b)}$ **2.218.** $x\in[2;\ 4[\Rightarrow 2\sqrt{2}$; $x\in[4;\ \infty[\Rightarrow 2\sqrt{x-2}$. **[2.219.]** 5. **2.220.** 1. **2.221.** $x\sqrt{2}$. **2.222.** $\sqrt{5}/5$. **2.223.** $a\in]2;\ 3[$ $\Rightarrow -1/\sqrt{a-2}$; $a\in]3;\ \infty[\Rightarrow -\sqrt{a-2}$. **2.224.** $x\in]-\infty;\ -2[$ $\Rightarrow\frac{3-x^2}{x+2}$; $x\in]-2;\ 2[\Rightarrow\frac{5-x^2}{x+2}$; $x\in[2;\ \infty[\Rightarrow\frac{x^2-3}{x+2}$. **2.225.** $x\in]-\infty;\ -1/3[\cup]-1/3;\ -1/5[\cup]-1/5;\ 3[\Rightarrow -(x+3)$; $x\in[3;\ \infty[$ $\Rightarrow x+3$. **2.226.** $x\in]-\infty;\ -3[\cup]-3;\ 0[\Rightarrow -3x$; $x\in]0;\ \infty[\Rightarrow 3x$.

2.227. $\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}$. **2.228.** $\left(y-\frac{2}{y}\right)^2$. **2.229.** $\sqrt{2}$. **2.230.** 2. **2.231.** $\sqrt{3}/3$. **2.232.** $2\sqrt{3}/3$. **2.233.** 4. **2.234.** $-2-4\sqrt{3}$. **2.235.** $a\in]0;\ 1[\Rightarrow\frac{1-a}{2a}$; $a\in]1;\ \infty[\Rightarrow\frac{a-1}{a}$. **2.236.** $m\in]0;\ 1[\Rightarrow\frac{m-1}{2m}$; $m\in[1;\ \infty[\Rightarrow\frac{1-m}{2}$. **2.237.** $a\in]0;\ 1[\Rightarrow\frac{1-a}{\sqrt{a}}$; $a\in]1;\ \infty[\Rightarrow\frac{a-1}{\sqrt{a}}$.

2.238. 1. 2.239. $-\sqrt[4]{2}$. 2.240. 1. 2.241. $\sqrt[3]{4-x^2}$. 2.242. 1. 2.243. $\frac{x}{x-2}$. 2.244. $a-b$. 2.245. $-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$. 2.246. $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}$. 2.247. $1+\sqrt[3]{a}$. 2.248. $\sqrt{2}$. 2.249. $-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2})$. 2.250. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a+1}-\sqrt{a}}$.

2.251. $2\sqrt[4]{\frac{y}{x}}$. 2.252. 2,4. 2.253. $x\in[1/8;\ 1/4[\Rightarrow -1;\ x\in]1/4;\ \infty[\ \Rightarrow 1$. 2.254. 3. 2.255. $2x$. 2.256. $2\sqrt{3}$. 2.257. $\frac{1}{\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}}$.

2.258. $\frac{1}{2\sqrt{b}}$. 2.259. 0. 2.260. $\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{\sqrt{p}}$ 2.261. $x\in]0;\ 1]\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{1-x}{3x}}$.

2.262. 1,25. 2.263. x^2+1. 2.264. $\frac{x+3}{x-1}$. 2.265. 1,1. 2.266. 4/9. 2.267. $1/(2y^3)$ при $y<2x$; $-1/(2y^3)$ при $y>2x$. 2.268. $\sqrt{x}+1$. 2.269. $-(a^3+\sqrt[4]{a^3})$. 2.270. $x\in]4;\ 8[\Rightarrow\frac{4}{\sqrt{x-4}}-1$; $x\in[8;\ \infty[\ \Rightarrow 1$. 2.271. 4. 2.272. $\frac{1}{\sqrt[8]{p-q}}$. 2.273. $x\in\left]0;\ 2/3\right[\Rightarrow-\sqrt{x}$; $x\in\left]2/3;\ \infty\right[\Rightarrow\sqrt{x}$. 2.274. 2. 2.275. $x^2\sqrt[3]{y}$. 2.276. $\frac{\sqrt[3]{a}-1}{4}$. 2.277. 1.

2.278. $\sqrt[3]{\frac{2n}{1+n}}$. 2.279. $-2b(a+3\sqrt{ab})$. 2.280. $\sqrt{\frac{a}{a+4b}}$. 2.281. $\sqrt[4]{a}/6$. 2.282. -1. 2.283. 1. 2.284. $\sqrt[4]{a/b}$. 2.285. 1. 2.286. $\sqrt{2}$. 2.287. 3. 2.288. $\sqrt{3}$. 2.289. $\frac{1}{x-\sqrt{2x}+1}$. 2.290. $x^3\sqrt[4]{a}$. 2.310. $A=1$, $B=2$, $C=0$. 2.311. $x\in]-\infty;\ -1[\cup]0;\ 1[\cup]1;\ \infty[\Rightarrow\frac{x+1}{x}$; $x\in]-1;\ 0[\Rightarrow-\frac{x+1}{x}$. 2.312. $x\in]-\infty;\ -1[\Rightarrow-1$; $x\in[-1;\ 0[\cup]0;\ 1[\ \Rightarrow\frac{2+x-x^3}{x^3+x}$; $x\in[1;\ \infty[\Rightarrow 1$. 2.313. $x\in]-\infty;\ -1]\Rightarrow-(x+1)$; $x\in[-1;\ 1[\Rightarrow x+1$; $x\in[1;\ \infty[\Rightarrow 2x^2+x-1$. 2.314. $x\in[1;\ 2[\ \Rightarrow 2\sqrt{x-1}$; $x\in[2;\ \infty[\Rightarrow 2$. 2.315. $x\in]-\infty;\ 0[\Rightarrow 6$; $x\in[0;\ 6[\ \Rightarrow 6-2x$; $x\in[6;\ \infty[\Rightarrow -6$. 2.316. $x\in[2;\ 4[\Rightarrow\frac{2\sqrt{2}}{4-x}$; $x\in]4;\ \infty[$

$\Rightarrow \dfrac{2\sqrt{x-2}}{x-4}$. **2.317.** $m-n$ при $m>2n$; $n-m$ при $n<m<2n$. **2.318.** $2x^2-a^2$ при $x<-|a|$; $-a^2$ при $x>|a|$. **2.319.** $x\in]-\infty;\ -1[$ $\Rightarrow x-2$; $x\in]-1;\ 1[\Rightarrow \dfrac{x^2+4}{x-2}$; $x\in]1;\ 2[\Rightarrow -(x+2)$; $x\in]2;\ \infty[$ $\Rightarrow x+2$. **2.320.** $x\in]-\infty;\ 0[\Rightarrow \dfrac{-2x^2+2x-3}{x}$; $x\in]0;2[\Rightarrow \dfrac{3+2x}{x}$; $x\in[2;\ \infty[\Rightarrow \dfrac{2x^2-2x+3}{x}$. **2.321.** $a\in[0;\ \sqrt{2}[\Rightarrow 6-4a$; $a\in[\sqrt{2};\ \infty[$ $\Rightarrow 2a^2-4a+2$. **2.322.** $y\in]-\infty;\ 3[\Rightarrow -4$; $y\in[3;\ 9[\Rightarrow 2y-10$; $y\in[9;\ \infty[\Rightarrow 8$. **2.323.** $x\in]0;\ 4[\Rightarrow \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$; $x\in[4;\ \infty[\Rightarrow \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x}}$.

2.324. $x\in]-\infty;\ -1[\cup]0;\ 1[\Rightarrow \dfrac{1+x-x^2}{x+1}$; $x\in[1;\ \infty[\Rightarrow \dfrac{x^2+x-1}{x+1}$; $x\in]-1;\ 0[\Rightarrow \dfrac{1-x-x^2}{x+1}$. **2.325.** $\dfrac{n+1}{n}$. **2.326.** $1/\sqrt{a}$ при $\sqrt{2a}>5\sqrt[3]{b}$; $-1/\sqrt{a}$ при $\sqrt{2a}<5\sqrt[3]{b}$. **2.327.** $x\in]-\infty;\ -1[\Rightarrow \dfrac{x+1}{1-x}$; $x\in[-1;\ 0[\Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1}$; $x\in[0;\ \infty[\Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1}$. **2.328.** $x\in]-\infty;\ -2[$ $\Rightarrow \dfrac{2-x}{2}$; $x\in[-2;\ 0[\Rightarrow -\dfrac{x^2+2x+8}{2x}$; $x\in]0;\ \infty[\Rightarrow \dfrac{x^2+2x+8}{2x}$.

2.329. $x\in]-\infty;\ -1[\Rightarrow \dfrac{x}{x-1}$; $x\in]-1;\ 0[\Rightarrow \dfrac{x}{1-x}$; $x\in[0;\ 1[$ $\Rightarrow -\dfrac{x}{x+1}$; $x\in]1;\ \infty[\Rightarrow \dfrac{x}{x+1}$. **2.330.** $m\in[0;\ 1/2]\Rightarrow \sqrt{1-m}-\sqrt{m}$; $m\in]1/2;\ 1]\Rightarrow \sqrt{m}-\sqrt{1-m}$. **2.331.** $z\in]-\infty;2[\Rightarrow \dfrac{z^2-5z+6}{1-z}$; $z\in]2;\ \infty[\Rightarrow z-2$. **2.332.** $x\in]-\infty;0[\cup[1;\ \infty[\Rightarrow \dfrac{x-1}{x}$; $x\in]0;\ 1[$ $\Rightarrow \dfrac{1-x}{x}$. **2.333.** $z\in]-\infty;\ -1[\cup]0;\ 1[\Rightarrow -\dfrac{z+1}{z}$; $z\in[-1;\ 0[\cup]1;\ \infty[$ $\Rightarrow \dfrac{z+1}{z}$. **2.334.** $a\in]-\infty;\ -1[\cup[1;\ \infty[\Rightarrow a$; $a\in[-1;\ 0[\cup]0;\ 1[$ $\Rightarrow 1/a$. **2.335.** $a\in]-\infty;\ -1[\cup[1;\ \infty[\Rightarrow 1/a$; $a\in[-1;\ 1[\Rightarrow a$. **2.336.** 1) $x\in]0;\ \infty[$; $y\in]0;\ \infty[\Rightarrow \sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$; 2) $x\in]0;\ \infty[$; $y\in]-x/2,\ 0[\Rightarrow -\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)$. **2.337.** $a\in$ $]3;\ \infty[\Rightarrow 2a$; $a\in]0;\ 3[\Rightarrow -2a$. **2.338.** $1/\sqrt[3]{y}$. **2.339.** $\dfrac{4a^2+3}{9(a^2+1)}$. **2.340.** 2. **2.341.** 1.

2.342. $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}\right[\Rightarrow -\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$; $x\in\left[\dfrac{3}{2};\ \infty\right[\Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2}$.

2.343. $1/\sqrt{x}$ при $0 \leqslant y < 4x^2$; $-1/x$ при $y > 4x^2$. 2.344. $t \in]1/6;\ 1/3[\cup [1;\ \infty[\Rightarrow \frac{t-1}{3t-1}$; $t \in]1/3;\ 1[\Rightarrow \frac{1-t}{3t-1}$. 2.345. $x \in]-\infty;\ -\sqrt{2}[\cup]0;\ \sqrt{2}[\Rightarrow -1/x$; $x \in]-\sqrt{2};\ 0[\cup]\sqrt{2};\ \infty[\Rightarrow 1/x$. 2.346. $x \in [0;\ 1[\Rightarrow 1-\sqrt{x}$; $x \in [1;\ \infty[\Rightarrow \sqrt{x}-1$. 2.347. $x \in]0;\ 1/2[\Rightarrow x$; $x \in]1/2;\ \infty[\Rightarrow -x$. 2.348. $x \in]-\infty;\ 2[\Rightarrow x^2-4x-12$; $x \in]2;\ \infty[\Rightarrow (x+2)^2$. 2.349. $x^2+\sqrt{2}$. 2.350. $x \in]-\infty;\ 0[\Rightarrow \frac{9-2x}{x}$; $x \in]0;\ \frac{3}{2}[\Rightarrow \frac{2x-9}{x}$; $x \in]\frac{3}{2};\ \infty[\Rightarrow \frac{2x+3}{x}$. 2.351. x^4. 2.352. $-\frac{2\sqrt{x}}{3}$. 2.353. $a \in [\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}[\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{1-3a}$; $a \in]\frac{1}{3};\ \infty[\Rightarrow \frac{\sqrt{12a-2}}{3a-1}$. 2.354. $p \in]-\frac{1}{2};\ 0[\Rightarrow -\frac{1}{4p^2}\left(\sqrt{1-4p^2}+1\right)^2$; $p \in]0;\ \frac{1}{2}[\Rightarrow -1$. 2.355. $\left|\sqrt[4]{a}-\sqrt[6]{b}\right|$. 2.356. $x \in]4;\ 8[\Rightarrow \frac{4x}{x-4}$; $x \in [8;\ \infty[\frac{2x}{\sqrt{x-4}}$. 2.357. $x \in]0;\ 1[\Rightarrow -x$; $x \in]1;\ \infty[\Rightarrow x$. 2.358. $a \in [1;\ 2[\Rightarrow \frac{2}{2-a}$; $a \in]2;\ \infty[\Rightarrow \frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$. 2.359. $x \in]-\infty;\ 1[\Rightarrow \frac{4-x^2}{x^2+4x-4}$; $x \in [1;\ 2[\Rightarrow \frac{x+2}{2-x}$; $x \in]2;\ \infty[\Rightarrow \frac{x+2}{x-2}$. 2.360. $z \in]-\infty;\ -1/2] \cup]0;\ 1/2[\Rightarrow -9z^3$; $z \in]-1/2;\ 0[\cup [1/2;\ \infty[\Rightarrow 7z^3+2$. 2.361. $(x-y)(z-x)(y-z)$. 2.364. $a^3+b^3+c^3=5abc$. 2.365. $9a(a^5-c^5)=5(a^3-b^3)(2a^3+b^3)$.

Глава 3

3.063. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha+\pi}{4}\right)$. 3.064. $-\sin^2\alpha$. 3.065. 1/8. 3.066. $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}$. 3.067. $2\sin\alpha$. 3.068. $\sin 2\alpha$. 3.069. $-\frac{\sin 8\alpha}{2}$. 3.070. $\frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{2}$. 3.071. $\sin\alpha\sin 4\beta$. 3.072. $\cos^{-3}2x$. 3.073. $-\sin 2\alpha\times\sin 4\beta$. 3.074. $-\cos 2\alpha\cos 4\beta$. 3.075. $4\sin^2\frac{\alpha+2\beta}{2}$. 3.076. $-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{tg}\alpha$. 3.077. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. 3.078. $2\operatorname{tg}\alpha$. 3.079. $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$. 3.080. $\operatorname{tg}\frac{m+n}{2}\alpha$. 3.081. 2. 3.082. $\frac{1}{2\cos^2\alpha}$. 3.083. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$. 3.084. $\operatorname{ctg}^4\alpha$. 3.085. $0{,}5\sin^{-2}\frac{\alpha}{2}$. 3.086. $\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{2}$. 3.087. 1. 3.088. 1. 3.089. 1.

3.090. $\sin^2\alpha$. 3.091. $\frac{\sin^2 2\alpha}{4}$. 3.092. $-\cos\alpha$. 3.093. $\operatorname{ctg}^2\alpha$. 3.094. $\operatorname{tg}^2 2\alpha$. 3.095. $-\frac{\sin 8\alpha}{4}$. 3.096. $\frac{2}{\sin^3 2\alpha}$. 3.097. $\frac{2}{\cos^2\alpha}$. 3.098. 0. 3.099. $-\operatorname{tg}^4\alpha$. 3.100. $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$. 3.101. $\cos 4\alpha$. 3.102. $4\cos 2\alpha$. 3.103. $\operatorname{ctg} 2\alpha$. 3.104. $\cos 4\alpha$. 3.105. 2. 3.106. $\operatorname{ctg} 2\alpha$. 3.107. $\operatorname{tg} 4\alpha$. 3.108. $\sin^2\alpha$. 3.109. $\operatorname{tg} 2\alpha$. 3.110. $\operatorname{ctg} 4\alpha$. 3.111. $\frac{\operatorname{ctg}^4\alpha}{2}$. 3.112. $2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 3.113. $2\cos\alpha$. 3.114. $\sqrt{2}\sin(4\alpha-45^\circ)$. 3.115. $4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin^{-1}\alpha$. 3.116. $-16\operatorname{ctg} 2\alpha\sin^{-3}2\alpha$. 3.117. $\operatorname{tg}^8\alpha$. 3.118. $4\sin(\alpha-60^\circ)\times$ $\times\sin(\alpha+60^\circ)\sin^{-2}\alpha$. 3.119. $4\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)\cos^{-2}\alpha$. 3.120. $4\cos 2\alpha\sin^{-2}2\alpha$. 3.121. $4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)$. 3.122. $4\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)$. 3.123. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$. 3.124. $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$. 3.125. $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. 3.126. $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)}{\cos 3\alpha}$. 3.127. $2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$. 3.128. $2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. 3.129. $2\cos\alpha\cos 3\alpha$. 3.130. $4\cos\alpha\times$ $\times\cos 2\alpha\cos 3\alpha$. 3.131. $\frac{2\sqrt{2}\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos 4\alpha}$. 3.132. $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\operatorname{ctg} 3\alpha$. 3.133. $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. 3.134. $\operatorname{tg} 5\alpha$. 3.135. $2\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 6\alpha$. 3.136. $2\cos 2\alpha\sin 6\alpha\sin 10\alpha$. 3.137. $\operatorname{ctg}\frac{17\alpha}{2}$. 3.138. $-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}$. 3.139. $-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{9\alpha}{2}$. 3.140. $\operatorname{tg}\frac{29\alpha}{2}$. 3.141. $4\sin 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha$. 3.142. $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}$. 3.143. $4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos 2\alpha\cos\frac{17\alpha}{2}$. 3.144. $8\cos^4 2\alpha$. 3.145. $2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\times$ $\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. 3.146. $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$. 3.147. $4\sin 3\alpha\times$ $\times\sin 2\alpha\sin\alpha$. 3.153. 2. 3.154. 4. 3.155. $2\sqrt{3}$. 3.156. 7/25. 3.157. $2\sqrt{3}$. 3.158. $-17\sqrt{2}/26$. 3.159. $7\sqrt{2}/26$. 3.160. 65/113. 3.161. 26/87. 3.162. 0,96. 3.163. $1-p^2$. 3.164. 57/5. 3.165. 2. 3.166. $-22/9$. 3.167. $\pi-\operatorname{arctg}(2/3)$. 3.169. $\pi-\operatorname{arctg} 5$. 3.170. 23/32. 3.171. $3\pi/4$. 3.172. $\sqrt{5}/20$. 3.174. $-4\sqrt{6}/23$. 3.176. $\alpha+$

$+\beta=\pi/4$. **3.177.** 2. **3.178.** 2. **3.181.** $x-y=xy$. **3.184.** $1+\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}$. **3.185.** a^4-4a^2+2. **3.240.** $2|\operatorname{ctg}\alpha|$. **3.241.** $-0{,}5\sin 2\alpha$. **3.242.** $|\sin\alpha-\sin\beta|$. **3.243.** -1. **3.244.** 1. **3.245.** $-\sqrt{3}\operatorname{ctg}2\alpha$. **3.246.** $\operatorname{tg}2\alpha$. **3.247.** 1. **3.248.** $\sin 4x\cos^{-2}4x$. **3.249.** $-\cos^2 4\alpha$. **3.250.** $-2\sin^2 2\alpha$. **3.251.** $\cos(40^\circ+2\alpha)$. **3.252.** $\operatorname{tg}^4 2\alpha$. **3.253.** $\operatorname{tg}\alpha$. **3.254.** $\sin 4\alpha$. **3.255.** $\cos 8\alpha$. **3.256.** $-\sin 4\alpha$. **3.257.** $\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$ **3.258.** $2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ **3.259.** $-1/2$. **3.260.** $-2\operatorname{ctg}^2\alpha$. **3.261.** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$. **3.262.** $8\sqrt{3}$. **3.263.** $\sqrt{3}/2$. **3.264.** $\operatorname{tg}5x$. **3.265.** $\sin 3x$. **3.266.** $\cos 3x$. **3.267.** $2|\sin^{-1}2\alpha|$. **3.268.** $\operatorname{tg}\alpha$. **3.269.** $\operatorname{tg}(\alpha+30^\circ)\operatorname{tg}(\alpha-30^\circ)$. **3.270.** $2\sin 2\alpha$. **3.271.** $2|\operatorname{ctg}4\alpha|$. **3.272.** $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. **3.273.** $1/4$. **3.274.** $\sin(\alpha+\beta)$. **3.275.** 1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **3.276.** $-\sin 2\alpha$. **3.277.** $\sin 4\alpha$. **3.278.** 1) $-2\operatorname{tg}\alpha$; 2) $2\operatorname{tg}\alpha$. **3.279.** $\cos\frac{\alpha}{2}$. **3.280.** $\operatorname{tg}^4 2\alpha$. **3.281.** $\frac{1}{8}\sin 8\alpha\sin 4\alpha$. **3.282.** 1. **3.283.** $-\sin 6\alpha$. **3.284.** 1, если $\operatorname{ctg}x>0$; -1, если $\operatorname{ctg}x<0$. **3.285.** $2\sin(6\alpha-60^\circ)$. **3.286.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(4\alpha-60^\circ)$. **3.287.** $-8\cos 4\alpha$. **3.288.** $\frac{4\sqrt{2}\sin(x-45^\circ)}{\cos^3 x}\ldots\to$

$\ldots\to\frac{\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)}{\cos^3 x}$. **3.289.** $\frac{8\sin(x-45^\circ)\times}{\cos^4(x)}\ldots\to$

$\ldots\to\frac{\times\sin(x+45^\circ)\sin(x-60^\circ)\sin(x+60^\circ)}{\cos^4 x}$. **3.290.** $-8\cos(2\alpha+60^\circ)\cos(2\alpha-60^\circ)$. **3.291.** $2\sin\frac{\alpha}{4}$. **3.292.** $8\cos(2\alpha+60^\circ)\cos(2\alpha-60^\circ)$. **3.293.** $\sin^2(\alpha-\beta)$. **3.294.** $\frac{\cos(2\alpha+\beta)}{\cos 4\alpha}\cdot\operatorname{tg}2\alpha$. **3.295.** $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. **3.296.** $-2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha-2\beta)$ **3.297.** $-2\sin 2\alpha\sin\beta\cos(2\alpha-\beta)$. **3.298** $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$. **3.299.** $4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$. **3.300.** $-\frac{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin 8\alpha}$. **3.301.** $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$. **3.302.** $2\operatorname{ctg}4\alpha$. **3.303.** $\cos^2(\alpha-\beta)$. **3.304.** $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$. **3.305.** $8\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. **3.306.** 1) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **3.307.** $2\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

3.308. $2\sin\alpha\sin(2\beta-\alpha)\cos 2\beta$. 3.309. $4\cos 4\alpha\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\times$ $\times\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. 3.310. $4\sin 4\alpha\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)$. 3.311. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. 3.112. $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-4\alpha\right)$. 3.313. $\frac{1}{2\cos 2\alpha}$. 3.314. $\operatorname{tg}(\alpha-15^\circ)\operatorname{ctg}(\alpha+15^\circ)$. 3.315. $4\sin 4\alpha\sin(\alpha+$ $+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)$. 3.316. $-\sin 4\alpha$. 3.317. $\operatorname{ctg}^3\alpha$. 3.318. $\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(30^\circ+\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha$. 3.319. $2\sqrt{2}\sin 2\alpha\sin(4\alpha-45^\circ)$. 3.320. $\dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. 3.321. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$. 3.322. $\frac{4\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$.

3.323. $\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)$. 3.324. $4\cos 4\alpha\sin(15^\circ-\alpha)\cos(15^\circ+\alpha)$. 3.325. $4\sin(30^\circ+2\alpha)\sin(30^\circ-2\alpha)$. 3.326. $\cos\frac{(m+n)\alpha}{2}\cos\frac{(m-n)\alpha}{2}$.

3.327. $\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$. 3.328. $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$. 3.329. $\sin 4\alpha$. 3.330. $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$. 3.331. $\frac{8}{\sqrt{3}}\sin 70^\circ$. 3.355. 3/2. 3.356. 3/16. 3.357. 1/4. 3.358. 1. 3.359. 1. 3.360. 0. 3.361. 1. 3.362. $-85/44$. 3.363. $-50/7$. 3.364. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{7}{\sqrt{130}}$ и $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{9}{\sqrt{130}}$. 3.365. $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{27}{7\sqrt{130}}$. 3.366. $\frac{3n-n^3}{2}$.

3.367. $-9/4$. 3.375. 1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1/3$. 3.376. $\frac{1-m}{1+m}$. 3.377. $\frac{m^2-1}{2}$. 3.378. $\frac{p+q}{p-q}\operatorname{ctg}\alpha$. 3.379. $\frac{1+6m^2-3m^4}{4}$.

3.380. $\sin 2\alpha=\frac{2pq}{p^2+q^2}$; $\cos 2\alpha=\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}$; $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2pq}{q^2-p^2}$. 3.381. 1) $-3/5$; 2) $4/5$. 3.382. 1) $4/5$; 2) $3/5$. 3.383. $\frac{q-p}{q+p}\operatorname{ctg}\alpha$. 3.384. -2. 3.386. -1. 3.387. $-2/3$. 3.388. 1/2. 3.390. $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-$ $-3\cos\alpha$; $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$. 3.392. 1/3. 3.393. $f(\alpha)=p+2$. 3.394. $f(\alpha)=7/9$. 3.410. $\frac{3}{4}\sin 8\alpha$. 3.411. $2\sin^3 2\alpha$. 3.412. $-\cos^2 2x$.

3.413. $\frac{3}{4}\sin 4\alpha$. 3.414. $\dfrac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha}$. 3.415. $8\cos 16\alpha\cos^3 2\alpha$. 3.441. $-a/b$. 3.442. $-b/a$. 3.443. $-2\sqrt[4]{2}/3$.

3.444. —0,007. 3.445. 6/25. 3.446. 6/25. 3.447. $3\pi/4$. 3.448. $-\pi/4$. 3.449. $\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}$. 3.450. 0,009. 3.451. 1/8. 3.452. $(1-\sqrt{5})/2$. 3.453. $\sqrt{10}-3$. 3.454. 0,98. 3.455. —119/120. 3.456. 1/5. 3.457. —2. 3.458. 11/2. 3.459. $-2\sqrt{5}/5$. 3.460. $-2\sqrt{5}/5$. 3.461. $2a/b$. 3.462. —1/2. 3.463. 1) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=3-2\sqrt{2}$. 3.465. $\frac{2m}{1+m^2}$. 3.466. $(3m^2+1)/4$. 3.467. $m(m^2+1)/2$. 3.468. $2(1-m^2)$. 3.469. —38/125. 3.475. $2+\cos 2\alpha$. 3.476. $1/\sqrt{2}$ при $\alpha=\pi/16$. 3.477. 2 при $\alpha=\pi/16$. 3.481. 2 при $\alpha=\pi/8$. 3.482. 1/2 при $\alpha=\pi/4$. 3.484. —76/125. 3.485. 4 при $\alpha=\pi/4$. 3.486. 2 при $\alpha=\pi/4$. 3.487. 41/125. 3.490. 1/4 при $\alpha=\pi/4$. 3.491. 1/2 при $\alpha=\pi/4$. 3.492. $f(x)=\sin^2\alpha$. 3.493. $\frac{\sin(n+1)2\alpha\cos 2n\alpha}{\sin 2\alpha}$. 3.495. 2.

Глава 4

4.001. 9. 4.002. 119/3. 4.003. 21 раз. 4.004. 1) 2, —1, —4, —7, ...; 2) —10, —7, —4, —1, ... 4.005. 7: 1) 1, 6, 11; 2) 7, 10, 13. 4.006. За 8 ч. 4.007. 3, 4. 4.008. 7, —14, 28, —56. 4.009. 1/8. 4.010. 3, 3/2, 3/4. 4.011. 1/3, 2/3, 1. 4.012. 44. 4.013. 120. 4.014. 1, 9, 17. 4.015. $x_1=1/3$, $x_2=2/3$. 4.016. 1) 7, —28, 112, —448; 2) $-11\frac{2}{3}$, $-46\frac{2}{3}$, $-186\frac{2}{3}$, $-746\frac{2}{3}$. 4.017. 3, —6, 12, —24. 4.018. 5. 4.019. 1) 6, 1/4; 2) —6, —1/4. 4.020. 5, 405. 4.021. 5, 15, 25. 4.022. 1) 3, 4; 2) 48, 1/4. 4.023. $x_1=1/2$, $x_2=-7/9$. 4.024. 9 или 31. 4.025. 3/16, 1/4. 4.026. 1, 2, 3, 4, ... 4.027. Да; $n+m$. 4.028. 6. 4.029. 810. 4.030. 1/5. 4.031. 3/5. 4.032. 1) 1, 3, 9; 2) 1/9, 7/9, 49/9. 4.033. 6, 3, 3/2, ... 4.034. 3, 9, 15. 4.035. 4, 12. 4.036. 1) 3, 2; 2) 12, 1/2. 4.038. 1) 75/2; 2) 105/2. 4.039. 14. 4.040. 1) 4, 5; 2) —79/7, —37/14. 4.041. 7. 4.042. 82 350. 4.043. 6, —1/2. 4.044. 1) 3, 6, 12, 18; 2) $18\frac{3}{4}$, $11\frac{1}{4}$, $6\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{4}$. 4.045. 1) 5103; 2) 7/81. 4.046. 1) 4, 8, 16; 2) 4/25, —16/25, 64/25. 4.047. 1) 8, 4, 2; 2) 2, 4, 8. 4.048. 2, 1/2. 4.049. 127/8. 4.050. 70 336. 4.051. $2n+\frac{(4^n-1)(4^{n+1}+1)}{3\cdot 4^n}$. 4.052. S_1S_2. 4.055. $\frac{S^2}{2S-1}$. 4.056. 2. 4.060. Меньше. 4.061. 7. 4.062. 1) $12+24+48+96$; 2) $\frac{9}{2}+\frac{27}{2}+\frac{81}{2}+\frac{243}{2}$. 4.063. 7. 4.064. 1) 3, 6, 12; 2) 27, 18, 12. 4.065. $3+\sqrt{3}$. 4.066. 931. 4.067. 41. 4.068. 1064. 4.069. 0,25. 4.070. $25\frac{25}{27}$. 4.072. 101. 4.074. 2; —6, 18, —54, или —54, 18, —6, 2. **4.075.** $x=\sqrt[d]{q}$; всегда. **4.076.** $2^{n+1}(n-1)+2-\frac{n(n+1)}{2}$. **4.077.** $3^{n+1}(n-1)+3$. **4.078.** $\left(\frac{S}{\sigma}\right)^{n/2}$. **4.079.** 9.

Глава 5

5.001. $x=4$. **[5.001.]** $x=7$. **5.002.** $x=5$. **5.003.** $x=5$. **5.004.** $x=5$. **[5.004.]** $x=6; 11$. **5.005.** $x=8$. **[5.005.]** $x=7$. **5.006.** $x=5$. **[5.006.]** $x=7$. **5.007.** $x=4$. **5.009.** 240; 3-е слагаемое. **[5.009.]** $C_{10}^{8}a^2=45a^2$. **5.010.** $15/28 < x < 10/13$. **5.011.** 924. **5.012.** $252ab$. **5.013.** 1547/1024. **5.014.** $x=4$. **5.015.** $A_{16}^{2}=240$. **5.016.** 5. **[5.016.]** 55 440. **5.017.** 42. **[5.017.]** 1140. **5.018.** 968. **[5.018.]** 364. **5.019.** 64. **[5.019.]** 240. **5.020.** 55. **[5.020.]** 32 760. **5.021.** $25!/20!$. **[5.021.]** 3136. **5.022.** 896. **[5.022.]** $8!$ **5.023.** $x=8$; $y=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. **5.024.** $x=10$. **5.025.** $x=7$. **5.026.** $x=5$. $y=7$. **[5.026.]** $x=5$; $y=3$. **5.027.** $x=8$; $y=3$. **5.028.** $x=7$; $y=3$. **5.029.** $x=7$; $y=3$. **[5.029.]** $x=7$; $y=3$. **5.032.** 6. **5.033.** 7290. **5.034.** $x_1=\sqrt{2}/4$, $x_2=5\sqrt{5}$. **5.035.** 252. **5.036.** $U_3=10z^2$, $V_4=20z^2$. **5.037.** 9. **5.038.** $x=2$. **5.039.** $30!/(10!)^3$. **5.040.** 42. **[5.040.]** $9!$. **5.041.** $30!-2\cdot 29!$. **5.042.** 2520. **[5.042.]** $12!/(2!)^6$. **5.043.** 204. **5.044.** $2\cdot 9!$. **[5.044.]** 2 027 025. **5.045** 5^6; $6\cdot 4^5$. **5.046.** 2^{10}. **[5.046.]** 16^{10}. **5.047.** 40. **5.048.** $80!/(3!\cdot 75!)$. **[5.048.]** $10!/48$. **5.049** 3^6; $6!$. **[5.049.]** 576. **5.050.** 15368. **5.051.** $10\cdot 15!/7!$. **[5.051.]** $28!/(7!)^4$. **5.052.** 15 015. **5.053.** 3^5. **[5.053.]** 10^3. **5.054.** $16!/(2^6\cdot 3^2)$. **[5.054.]** 420. **5.055.** 1800. **[5.055.]** 105. **5.056.** 62. **[5.056.]** $9\cdot 10^6$. **5.057.** 36. **[5.057.]** 60. **5.060.** $(n+1)!-1$. **[5.061.]** 2^{36}. **5.062.** $314\,925\cdot 10^5$; 9-е слагаемое. **5.063.** $5/8 < x < 20/21$. **5.064.** 3003. **5.065.** $2(6!)^2$. **5.066.** 2^{200}. **5.067.** 1) 8^6; 2) $8^6-13\cdot 7^5$. **5.068.** $2(11!)^2$. **5.070.** $10!/4$. **[5.071.]** 23. **[5.072.]** $2^8\cdot 8!$.

Глава 6

6.001. $x_1=5$, $x_2=-55/16$. **6.002.** $x_1=a+b$, $x_2=(a+b)/2$. **6.003.** $x_1=1$, $x_2=-5$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}$. **6.004.** $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm\sqrt[4]{24}/2$. **6.005.** $x_1=1$, $x_2=-3$. **6.006.** $x_1=\frac{m+n}{m-n}$, $x_2=\frac{m-n}{m+n}$. **6.007.** $x_{1,2}=\pm a\sqrt{b}$, $x_{3,4}=\pm b\sqrt{a}$. **[6.008.]** $x=0$. **6.009.** $y_1=0$, $y_{2,3}=a\left(-9\pm\sqrt{5}\right)/4$. **6.010.** $x_1=1$, $x_2=-\sqrt[3]{6}$. **6.011.** $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 3\sqrt{21}/7$. **6.012.** $x=-1$. **6.013.** $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=1/3$. **6.014.** $x=0$. **6.015.** $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=38/11$. **6.016.** $x_1=2$, $x_2=1/2$. **6.017.** Если $n=p$, то x — любое число, кроме n; если $n\neq p$, то $x_1=m$, $x_2=-m$, $x_3=m+n+p$. **6.018.** $x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=\left(-3\pm\sqrt{5}\right)/2$. **6.019.** $x_1=1$, $x_2=3$. **6.020.** Если $a\neq b$, то $x_1=2b-a$, $x_2=2a-b$; если $a=b$, то решений нет. **6.021.** $x_1=-1/8$, $x_2=-2$. **6.022.** $x_1=1$, $x_2=-5$. **6.023.** $x_1=0$, $x_{2,3}=-3\pm 2\sqrt{3}/3$. **6.024.** $x_1=2$, $x_2=1/2$, $x_{3,4}=\left(-11\pm\sqrt{105}\right)/4$. **6.025.** Если $a=b$, то x — любое число; если

$a \neq b$, то $x_1=0$, $x_2=a+b$. **6.026.** $x_1=a+1$, $x_2=(a+1)/a$. **6.027.** Если $a\neq 0$, то $x_1=3a$, $x_2=-2a$; если $a=0$, то решений нет. **6.028.** Если $b\neq 0$, то $x_1=a+b$, $x_2=\dfrac{a^2-b^2}{2b}$; если $b=0$, то $x=a$. **6.029.** $x_1=a$, $x_2=(1-a^2)/a$. **6.030.** $x_1=-3$, $x_2=3$. **6.031.** $x=4$. **6.032.** $x=5$. **6.033.** $x=-1$. **6.034.** $x=7$. **6.035.** $x_1=a$, $x_2=(4a-b)/3$. **6.036.** $x_1=-1$, $x_2=3$. **6.037.** $x=0$. **6.038.** $x=3$. **6.039.** $x=5/3$. **6.040.** $x=9$. **6.041.** $x_1=-61$, $x_2=30$. **6.042.** $x_1=-5$, $x_2=2$. **6.043.** $x_1=-7$, $x_2=7$. **6.044.** $x_1=6$, $x_2=-2\left(\sqrt[3]{4}+1\right)/5$. **6.045.** $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{2}$. **6.046.** $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{2}$. **6.047.** $x_1=4$, $x_2=-4$. **6.048.** $x_1=8$, $x_2=27$. **6.049.** $x=2$. **6.050.** $x_1=3$, $x_2=5$. **6.051.** $x_1=8$, $x_2=7$. **6.052.** $x=4$. **6.053.** $x=8$. **6.054.** $x=64$. **6.055.** $x=1024$. **6.056.** $x_1=-4$, $x_2=4$. **6.057.** $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$. **6.058.** $x=1$. **6.059.** $z_1=2$, $z_2=-1/511$. **6.060.** $x_1=4$, $x_2=-3$. **6.061.** $x=64$. **6.062.** $x_{1,2}=\pm 1$. **6.063.** $x=64$. **6.064.** $x=-1$. **6.065.** $x=2$. **6.066.** $x_1=6$, $x_2=-2$. **6.067.** (0,6; 0,3), (0,4; 0,5). **6.068.** (—1; 2), (2; —1). **6.069.** (1/2; 1/3), (1/3; 1/2). **6.070.** (2; 3), (3; 2). **6.071.** (2; 1), (—1; —2). **6.072.** (4; 3), (4; —3). **6.073.** (7; 3), (—7; —3). **6.074.** (4; 1), (10/3; 2/3). **6.075.** (1; 2), (2; 1). **6.076.** (1; 2) **6.077.** (1; 3), (3; 1), (—1; —3), (—3; —1). **6.078.** (2; 3), (3; 2). **6.079.** (1; 2), (2; 1). **6.080.** (3; 2), (—3; —2). **6.081.** (4; 1), (1; 4). **6.082.** (2; 1), (2; —1), $\left(1;\ \sqrt{2}\right)$, $\left(1;\ -\sqrt{2}\right)$. **6.083.** (1/4; 1/6), (1/12; 1/3), (—5/24; —7/24), (—3/8; —1/8). **6.084.** (2; 6), (1; 3). **6.085.** (2; 4), (4; 2). **6.086.** (4; 1), (1; 4). **6.087.** (2; 1), (—2; —1). **6.088.** (3; 2), (—3; —2). **6.089.** $\left(\sqrt[3]{m};\ -1\right)$, $\left(-1;\ \sqrt[3]{m}\right)$. **6.090.** Если $ab=0$, то решения нет; если $ab\neq 0$, то $x=1/a$, $y=b$. **6.091.** (5; 3) **6.092.** (—4; —4), (—6; —2). **6.093.** (2; 3; 4). **6.094.** (5; 1), (—5; —1). **6.095.** (1; 2; 3). **6.096.** (1/2; 4). **6.097.** (2; —1; 1). **6.098.** (2; —1), (—1; 2). **6.099.** (9; 1), (1; 9). **6.100.** (41; 40). **6.101.** (12; 4), (34; —30). **6.102.** (3; 1). **6.103.** (1; 4). **6.104.** (1; 64), (64; 1). **6.105.** (2; 1), (1; 2), (—1; —2), (—2; —1). **6.106.** (4; 1), (1; 4), $\left(2+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3}\right)$, $\left(2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\right)$. **6.107.** (1; 9), (9; 1). **6.108.** (5; 4). **6.109.** (1; 27), (27; 1). **6.110.** (41; 40). **6.111.** (4; 1), (1; 4). **6.112.** (1; 81), (81; 1). **6.113.** Если $a\neq 0$, то $x_1=0$, $y_1=a$; $x_2=2-a$, $y_2=2$; если $a=0$, то $x=y=2$. **6.114.** (4; 1), (1; 4). **6.115.** (1; 8), (8; 1). **6.116.** (16; 1). **6.117.** $(9a^2,\ a^2)$. **6.118.** (124; 76). **6.119.** (4; 1). **6.120.** $(b^2-2ac)/c^2$. **6.121.** $cx^2+bx+a=0$. **6.122.** $a^2x^2+(ab-ac)x-bc=0$. **6.123.** $ax^2+(b-2a)x+(c-b+a)=0$. [6.124.] $p=q=0$; $p=1$, $q=-2$. **6.125.** $A_1=1$, $B_1=-2$; $A_2=0$, $B_2=0$. **6.126.** $k=2$. **6.127.** $p=3$; $x=1$. **6.128.** $a=1$ и $a=1/2$. **6.129.** $a=-6$. **6.130.** $c=-15$. **6.131.** $a=4$. **6.132.** $p_1=-6$, $p_2=6$. **6.133.** 215/27. **6.134.** $b=2$. **6.135.** $c=1/3$. **6.136.** $x_1=1$. **6.137.** $x_1=1$, $x_{2,3}=-2\pm 2\sqrt{7}/7$. **6.138.** $x_1=x_2=3$, $x_{3,4}=3\pm 2\sqrt{5}$. **6.139.** $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 1$. **6.140.** $z_1=0$, $z_2=1$. **6.141.** $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=\left(-2\pm\sqrt{66}\right)/2$. **6.142.** $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$. **6.143.** $x_1=1$, $x_2=-3$. **6.144.** $x_1=2$, $x_2=-4$. **6.145.** $x=1$. **6.146.** $x=0$. **6.147.** $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_{3,4}=\left(-3\pm\sqrt{73}\right)/2$.

6.148. $x_1=2$, $x_2=1/2$. 6.149. $x_{1,2}=-1$. 6.150. $u_1=1$, $u_{2,3}=\left(1\pm\sqrt{33}\right)/4$. 6.151. Если $m=1$, то x — любое число, кроме ±1, ±2; если $m\neq1$, то корней нет. 6.152. $\varnothing$. 6.153. Если $a=0$, то x — любое число; если $a\neq0$, то $x_{1,2}=\pm a$. 6.154. $x_1=0$, $x_2=-2$. 6.155. Если $a=0$, то $x=0$; если $a\neq0$, то $x_1=1/a$, $x_2=-\sqrt[3]{a}$. 6.156. $x_1=3$, $x_2=2/3$. 6.157. $x_1=2a-1$, $x_2=2-a$. 6.158. $x=0$. 6.159. $x=2$. 6.160. $x=12$. 6.161. $x_1=1$, $x_2=4$. 6.162. $x_1=\dfrac{b+128}{a}$, $x_2=\dfrac{128b+1}{128a}$. 6.163. $x_1=0$, $x_2=4$. 6.164. $x=2$. 6.165. $x_1=0$, $x_2=-5$. 6.166. $x_1=2$, $x_2=-7$. 6.167. $x_1=0$, $x_2=-1$. 6.168. $x_1=1$, $x_2=-1/3$. 6.169. $x=1$. 6.170. $x=5$. 6.171. $x_1=8$, $x_{2,3}=8\pm12\sqrt{21}/7$. 6.172. $x_1=1$, $x_2=-1$. 6.173. $x=0$. 6.174. $z=-4/3$. 6.175. $x_1=1$, $x_2=3/2$, $x_3=2$. 6.176. $x=0$. 6.177. $x=1$. 6.178. $x_1=(4b-a)/3$, $x_2=(4a-b)/3$; если $a=b$, то $x\in\varnothing$. 6.179. $x=16$. 6.180. $x=0$. 6.181. $x=-(a+1)$. 6.182. $x=2$. 6.183. $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$, $\left(\dfrac{-7+\sqrt{73}}{2};\ \dfrac{-7-\sqrt{73}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-7-\sqrt{73}}{2};\ \dfrac{-7+\sqrt{73}}{2}\right)$. 6.184. $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$. 6.185. $(3;\ 2)$, $(-3;\ -2)$; $\left(\sqrt{3}/3;\ 5\sqrt{3}/3\right)$, $\left(-\sqrt{3}/3;\ -5\sqrt{3}/3\right)$. 6.186. $x=\dfrac{k(k-c)(k-b)}{a(a-c)(a-b)}$, $y=\dfrac{k(k-c)(k-a)}{b(b-c)(b-a)}$, $z=\dfrac{k(k-a)(k-b)}{c(c-a)(c-b)}$. 6.187. $(4;\ 1)$, $(1;\ 4)$. 6.188. $x=2a^2(a+b+c)+abc$, $y=ab+bc+ca$, $z=a+b+c$. 6.189. $(2;\ 1)$, $(-1;\ -2)$. 6.190. $x_{1,2}=\pm\sqrt{abc}/b$, $y_{1,2}=\pm\sqrt{abc}/c$, $z_{1,2}=\pm\sqrt{abc}/a$. 6.191. $(2;\ 2)$, $(-3;\ -3)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2};\ \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$. 6.192. $(3;\ 1)$, $(3;\ -1)$, $\left(-5/3;\ \sqrt{65}/3\right)$, $\left(-5/3;\ -\sqrt{65}/3\right)$. 6.193. $(1;\ 1;\ 1)$, $(-2;\ -2;\ -2)$. 6.194. $(5;\ 3)$, $(-5;\ -3)$. 6.195. $(1;\ 2)$, $(-239/146;\ 117/146)$. 6.196. $(3;\ 5)$, $(5;\ 3)$. 6.197. $(2;\ 2)$. 6.198. Если $ab+1=0$, то $y=\pm\sqrt{x^2+1}$, x — любое, если $ab+1\neq0$, то $x_1=\dfrac{a+b}{2}$, $y_1=\dfrac{a-b}{2}$; $x_2=\dfrac{a+b}{2ab}$, $y_2=\dfrac{a-b}{2ab}$; 6.199. $(3;\ 0;\ 5)$. 6.200. $(3;\ 2)$, $(1;\ 4)$, $(-3;\ -4)$, $(-5;\ -2)$ 6.201. $(2;\ -3)$. 6.202. $(1;\ 1;\ 1)$. 6.203. $(0;\ 0;\ 0)$, $(a-b;\ b-c;\ c-a)$. 6.204. $(2;\ 1)$, $(6;\ -3)$, $\left(6+2\sqrt{3};\ -2-2\sqrt{3}\right)$, $\left(6-2\sqrt{3};\ -2+2\sqrt{3}\right)$. 6.205. $(3;\ 1)$, $(-3;\ -1)$, $\left(14\sqrt{106}/53;\ 4\sqrt{106}/53\right)$, $\left(-14\sqrt{106}/53;\ -4\sqrt{106}/53\right)$. 6.206. $(3;\ 1)$, $(1;\ 3)$. 6.207. $(1;\ 2;\ 3)$, $(1;\ 4;\ 1)$, $(5;\ 2;\ -1)$, $(5;\ 4;\ -3)$. 6.208. $(a;\ 2a)$, $(2a;\ a)$. 6.209. $(3;\ -2)$; $(-2;\ 3)$. 6.210. $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ -2)$, $(2;\ -1)$, $(-1;\ 2)$, $(-2;\ -1)$, $(-1;\ -2)$. 6.211. $(2;\ 3)$, $(-2,\ -3)$. 6.212. $(1;\ 3;\ 5)$, $(-1;\ -3;\ -5)$. 6.213. $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $(1;\ -2)$, $(-1;\ 2)$.

6.214. (0; 0; 0), (2; —1; —1). **6.215.** (2; —5). **6.216.** (4; 4), (—5; —5), $\left(\frac{1+\sqrt{77}}{2}; \frac{1-\sqrt{77}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{77}}{2}; \frac{1+\sqrt{77}}{2}\right)$. **6.217.** (1; 3), (3; 1), (—1; —3), (—3; —1). **6.218.** (a; $2a$), ($2a$; a). **6.219.** (1; 1; 1), (7; —3; —1). **6.220.** (4; 2), (—4; —2). **6.221.** (3; —2; 1), (—1; 0; 3). **6.222.** (11; 1). **6.223.** (2; —2). **6.224.** (3; —2; 6). **6.225.** (16; 1), (1; 16). **6.226.** (1; 1). **6.227.** (—4; 5; 3). **6.228.** (4; 9), (9; 4). **6.229.** (49; 49). **6.230.** (2; 3), (13/3; —5/3). **6.231.** (5; 4), (—9; 25). **6.232.** (5; 4). **6.233.** (2; —1). **6.234.** (64; 1), (1; 64). **6.235.** (1;7), (49/64; 41/8), (7; —8). **6.236.** $(\sqrt{10}, \sqrt{6})$, $(\sqrt{10}; -\sqrt{6})$. **6.237.** (4; 1), (121/64, 169/64). **6.238.** (1; 2), (—1; —2). **6.239.** (1; 0). **6.240.** (6; 10), (10, 6). **6.241.** (5; 4); $(-\sqrt{28{,}5}; -\sqrt{12{,}5})$; $(-\sqrt{28{,}5}, \sqrt{12{,}5})$. **6.242.** (3; 3/2), (6, 3). **6.243.** (8; 64), (64; 8). **6.244.** (10; 1), (—21/2; 53/12). **6.245.** $x_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 3$. **6.246.** $ax^2+bx+\left(c+\sqrt{b^2-4ac}-a\right)=0$. **6.247.** $m=3$ и $m=-2$; при этих значениях m будет $z_1=-1$, $z_2=-3$, $z_3=4$. **6.250.** $a=-2$ и $a=1$. **6.251.** $p=3$; $x_{1,2}=\left(5\pm\sqrt{41}\right)/4$. **6.252.** $p=1$, $q=-6$ и $p=-1$, $q=-6$. **6.253.** $x^2+(4q-2p^2)x+(p^4-4p^2q)=0$. **6.254.** $21x^2-23x+6=0$. **6.256.** $x_1=-3$, $x_2=-5$. **6.257.** $u_1=1$, $u_2=a+b$, $u_3=a-b$. **6.258.** $x_1=1$, $x_2=a$, $x_3=1-a$. **6.259.** $x_1=-1$, $x_2=a$, $x_3=2a$. **6.260.** $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-2$. **6.261.** $x_1=1$, $x_2=a+\sqrt{a}$, $x_3=a-\sqrt{a}$. **6.262.** $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-3$. **6.263.** $x_1=4$, $x_2=2$. **6.264.** $x_1=-1$, $x_2=2$. **6.265.** $x_1=1$, $x_{2,3}=a\pm\sqrt{m}$. **6.266.** $x_1=a$, $x_{2,3}=a\pm\sqrt{b}$. **6.267.** $x_1=-3$, $x_2=p+1$, $x_3=-p+2$. **6.268.** $z_1=1$, $z_{2,3}=p\pm\sqrt{q}$. **6.269.** $x_1=2\sqrt{3}$, $x_2=x_3=a-\sqrt{3}$. **6.270.** $x=-1/2$. **6.271.** $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=-1$, $x_4=-1/2$. **6.272.** $x_1=x_2=2/3$, $x_3=-5/3$. **6.273.** $x_{1,2}=\pm 1/2$; $x_{3,4}=2\pm\sqrt{3}$. **6.274.** $x_{1,2}=1\pm\sqrt{19}$. **6.275.** $x=0$. **6.276.** $x_1=1$, $x_2=4$. **6.277.** $x=1$. **6.278.** $x=3$. **6.279.** $x=8$. **6.280.** $x=0$. **6.281.** $x_1=-6$, $x_2=-5{,}5$ и $x_3=-5$. **6.282.** $u=2$. **6.283.** $x=32$. **6.284.** $x_1=63/5$, $x_2=-17/5$. **6.285.** $x_1=0$, $x_2=1$. **6.286.** $x=1$. **6.287.** $x=64$. **6.288.** $x=5$. **6.289.** $x_1=1$, $x_2=2\sqrt[3]{4}$, $x_3=-3\sqrt[3]{9}$. **6.290.** $x=5$. **6.291.** $x=4$. **6.292.** $x_1=-1$, $x_2=1$. **6.293.** $x_1=1$, $x_2=-1$. **6.294.** $x_1=1$, $x_2=-6$. **6.295.** $x_1=1$, $x_2=-1$. **6.296.** $x_1=7$, $x_2=26$. **6.297.** $x=31$. **6.298.** $x_1=7$, $x_2=14$, $x_{3,4}=\frac{21}{2}\pm\frac{7\sqrt{141}}{12}$. **6.299.** $x=59$. **6.300.** $x=3$. **6.301.** $x_1=190/63$, $x_2=2185/728$. **6.302.** $x=2$. **6.303.** (3; —1), (1; —3). **6.304.** (a; b; c). **6.305.** $x=2$, $u=1$, $v=2$, $w=3$. **6.306.** (0; 0; 0), (—1; 1; 1). **6.307.** (1; 1; 1). **6.308.** (1; 2; 3), (—1; —2; —3). **6.309.** (1; —1; 2), (1; 2; —1), (—1; 1; 2), (—1; 2; 1), (2; 1; —1), (2; —1; 1). **6.310.** (2; 1), (1; 2), (—1; —2), (—2; —1), $(\sqrt{5}/5; \sqrt{5}/10)$, $(\sqrt{5}/10; \sqrt{5}/5)$, $(-\sqrt{5}/5; -\sqrt{5}/10)$, $(-\sqrt{5}/10; -\sqrt{5}/5)$. **6.311.** (2; —1), (—1; 2), (—2; 1), (1; —2). **6.312.** (1; —2; 3), (1; —3; 2), (2, —1; 3), (2; —3; 1), (3; —1; 2), (3; —2; 1). **6.313.** (2; 1), $\left(19\sqrt[3]{4}/4;\ -17\sqrt[3]{4}/4\right)$. **6.314.** (2; 2; 2). **6.315.** (1; 1). **6.316.** $(a+1;\ a;\ a-1)$, $(-a-1;\ -a;\ -a+1)$. **6.317.** (3; —2; 2), $\left(\frac{9+3\sqrt{5}}{2};\ \frac{-7-3\sqrt{5}}{2};\ \frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{9-3\sqrt{5}}{2};\ \frac{-7+3\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right)$. **6.318.** (3; 1), (1; 3), (—1; —3), (—3; —1). **6.319.** (—2; 3), (3; —2). **6.320.** (1; 2), (2; 1). **6.321.** (2; 1), (—2; —1). **6.322.** (2, 1). **6.323.** (1; 2). **6.324.** (6; 9), (9; 6). **6.325.** (4; 4; —4). **6.326.** (0; 0), (—1, —2), (—2; —1), (2/3; —1/3), (—1/3; 2/3). **6.327.** $\varnothing$. **6.328.** (2; 4), (4; 2). **6.329.** (1; 64), (64, 1). **6.330.** Если $a \neq b$, то $x_1=1/3$, $y_1=1/3$; $x_2=-4/3$; $y_2=-4/3$; если $a=b\neq 0$, то система имеет бесконечно много решений, представляющих собой координаты точек двух прямых $x-4y=-1$ и $4x-y=-1$. **6.331.** (17/12; 5/3). **6.332.** (1; 1; 1). **6.333.** (2; 3), (—2; —3), (2; —3), (—2; 3). **6.334.** (0; 0). **6.335.** (26; 10), (650; —646). **6.336.** (25/3; 16/3). **6.337.** (5; 4; 5). **6.338.** (4; 4), (4,5; 3,5). **6.339.** $\left(\sqrt{2}/4;\ -\sqrt{2}/4\right)$, $\left(-\sqrt{2}/4;\ \sqrt{2}/4\right)$. **6.340.** (5, 3), (5; 4). **6.341.** $\left(8\sqrt{26}/13;\ 27\sqrt{26}/13\right)$, $\left(-8\sqrt{26}/13;\ -27\sqrt{26}/13\right)$, $\left(-8\sqrt{26}/13;\ 27\sqrt{26}/13\right)$, $\left(8\sqrt{26}/13;\ -27\sqrt{26}/13\right)$. **6.342.** $S_{n+2}=-\frac{bS_{n+1}+cS_n}{a}$.

6.343. 1) $x^3-qx^2+prx-r^2=0$; 2) $x=\sqrt{2}$. **6.344.** $a=-52$, $b=-40$. **6.345.** $p=-60$, $q=36$. **6.346.** ab **6.348.** $x_1=2/3$, $x_2=-3/2$, $x_3=1/2$. **6.349.** $x_1=1/2$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}/3$. **6.350.** $x^3-(p^2-q)x^2+(p^2q-q^2)x-q^3=0$. **6.351.** $x_1=10$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{3}$ и $x=5$. **6.352.** $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_{3,4}=\pm 4$ и $x=-2$. **6.353.** $x_1=\sqrt{3}$, $x_{2,3}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$. **6.354.** $x_1=3/2$; $x_2=1/2$, $x_3=-5/2$. **6.355.** $acx^4+(a+c)bx^3+(a^2+b^2+c^2)x^2+(a+c)bx+ac=0$. **6.356.** $x_1=1+\sqrt{3}$, $x_2=1-\sqrt{3}$, $x_3=2+\sqrt{3}$, $x_4=2-\sqrt{3}$. **6.357.** $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}/3$, $x_3=-2\sqrt{3}$. **6.358.** $x=5$ и $x_1=10$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$. **6.359.** $x_1=-b/a$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{-d/b}$ при условии $bd<0$. **6.361.** $x_1=a$, $x_2=1/a$, $x_3=1/2$. **6.362.** $x_1=-2$, $x_2=a$, $x_3=1/a$. **6.363.** $x_1=3/2$, $x_2=1/2+\sqrt{3}$, $x_3=1/2-\sqrt{3}$. **6.364.** $x_1=x_2=1$. **6.365.** $x^4-10x^2+1=0$. **6.367.** $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$. **6.368.** $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=1/2$. **6.369.** $x=2$. **6.370.** $x_1=2+2\sqrt{2}$, $x_2=2-2\sqrt{2}$, $x_3=-1/2$; $k=-4$.

Глава 7

7.001. 10. **7.002.** 890. **7.003.** 3. **7.004.** 2. **7.005.** —11. **7.006.** 24. **7.007.** 19. **7.008.** 1. **7.009.** a^2+a+1. **7.010.** $\log_a\sqrt{a^2-1}$. **7.011.** $ab(a-b)^2$. **7.012.** $1+a$. **7.013.** $\log_a b$. **7.014.** $\log_a b$. **7.015.** $1/b$. **7.017.** 5. **7.018.** $\{z\,|\,z\geqslant 2\}$. **7.019.** 1/2. **7.020.** 2. **7.021.** $\{3;\ 81\}$.

7.022. —5/4. **7.023.** {10; 1,5}. **7.024.** —2. **7.025.** 13. **7.026.** 1/2. **7.027.** 0. **7.028.** {5; —1}. **7.029.** 3. **7.030.** 1. **7.031.** {1/100; 1/10; 10; 100}. **7.032.** 3. **[7.033.]** {5; 15}. **7.034.** 7. **7.035.** {3; —3}. **7.036.** {2; 11}. **7.037.** 1. **7.038.** {2; 6}. **7.039.** {1/9; 3}. **7.040.** 37. **7.041.** $4-\sqrt{11}$. **7.042.** 3. **7.043.** 54. **7.044.** {3; 2}. **7.045.** 29. **7.046.** {1/128; 2}. **7.047.** 10. **7.048.** 64. **7.049.** 2. **7.050.** 100. **7.051.** 5,5. **7.052.** 81. **7.053.** {—1/5; 3}. **7.054.** 25. **7.055.** 5/3. **7.056.** {1; 2}. **7.057.** {—2,5; 3}. **7.058.** $\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$. **7.059.** 2. **7.060.** 0. **7.061.** {1/2; —1/2}. **7.062.** $\{1; -1; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$. **7.063.** 3. **7.064.** 20. **7.065.** $\{3; 3\log_6 2\}$. **7.066.** {9; 1/27}. **7.067.** $\{10^{-5}; 10^{3}\}$. **7.068.** {64; 2}. **7.069.** 3. **7.070.** {—1; 1}. **7.071.** $\{100; 1/\sqrt{10}\}$. **[7.072.]** {1; —3}. **[7.073.]** $\sqrt[3]{2}$. **7.074.** {0; 2}. **7.075.** {1; 100}. **7.076.** 1. **7.077.** $\{3; 3+\sqrt{2}\}$. **7.078.** {9; 1/9}. **7.079.** 5. **7.080.** $\{a^9; \sqrt[9]{a}\}$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.081.** {—1; 7}. **7.082.** 10. **7.083.** 5. **7.084.** $\{\sqrt{2}; \sqrt[4]{2}\}$. **7.085.** 1. **7.086.** {7; —3}. **7.087.** 0. **7.088.** 9. **7.089.** 10. **7.090.** {0,1; 1000}. **7.091.** —10. **7.092.** $\{10; 10^{-9/2}\}$. **7.093.** {2; 8}. **7.094.** {4, 36}. **7.095.** 9. **7.096.** {3; 10}. **7.097.** 2. **[7.098.]** {0; 25}. **7.099.** {7; 8}. **7.100.** {2; 4}. **7.101.** $\{3; 27^3\}$. **7.102.** $\sqrt{3}$. **7.103.** —2. **7.104.** (5; 5). **7.105.** (4,5; 0,5). **7.106.** {(4; 2); (4; —2)}. **7.107.** {(2; 18); (18; 2)}. **7.108.** {(1; 2); (16; —28)}. **7.109.** {(9; 3); (3; 9)}. **7.110.** (3; 2). **7.111.** {(6; 8); (8; 6)}. **7.112.** (25; 36). **7.113.** (4; 2). **7.114.** {(5; 1); (5; —1)}. **7.115.** (3; —3). **7.116.** (1/2; —3/2). **7.117.** (4; 2). **7.118.** (4; 16). **7.119.** {(3; 3); (5; 1)}. **7.120.** (1; 1). **7.121.** {(16; 3); (1/64; —2)}. **7.122.** (3; 27). **7.123.** $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. **7.124.** (9; 16). **7.125.** (5; 1). **7.126.** $a+b$. **7.127.** 0, если $\begin{cases}0<a<1,\\0<b<1\end{cases}$ или $\begin{cases}a>1,\\b>1\end{cases}$, и $-2(\log_b a+\log_a b)$, если $\begin{cases}a>1,\\0<b<1\end{cases}$ или $\begin{cases}0<a<1,\\b>1\end{cases}$. **7.128.** $(\log_2 x+1)^3$. **7.129.** $x+1$, где $x>0$, $x\neq 1$. **7.130.** $\log_a b$. **7.131.** $3-2\log_a b$, если $0<b<a^3$, и -3, если $b>a^3>0$. **7.132.** $\frac{1}{\log_a b-1}$. **7.133.** $\frac{1}{\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}+\delta^{-1}}$. **7.134.** $\alpha=10^{\frac{1}{1-\lg\gamma}}$. **7.136.** 0. **7.137.** $\frac{3(1-a)}{b+1}$. **7.139.** $a(b+3)$. **[7.141.]** —1/2. **7.142.** 25. **7.143.** 1/25. **7.144.** 1/12. **7.145.** $\pi n/2$, $n\in Z$. **7.146.** {0; 16/9}. **7.147.** {1; 1/16}. **7.148.** {—1; —64}. **7.149.** —100. **7.150.** {1/9; 9}. **7.151.** {—1; 3}. **7.152.** 5. **7.153.** 0. **7.154.** $1/\sqrt[3]{3}$. **7.155.** 2. **7.156.** $\{1/10; 10^{(1\pm\sqrt{3})/2}\}$. **7.157.** {9; 1/3}. **7.158.** a, где $a>0$, $a\neq 1$. **[7.159.]** 0,75. **7.160.** a^6, где $a>0$, $a\neq 1$. **7.161.** $\{7; \sqrt[5]{7}\}$. **7.162.** 3. **7.163.** 2. **7.164.** $\{25; 1/25; \sqrt{5}; 1/\sqrt{5}\}$. **7.165.** m, где $m>0$, $m\neq 1$. **7.166.** 16/3. **7.167.** $\sqrt[10]{10}$. **7.168.** {8; 1/8}. **7.169.** $\sqrt{3}$. **7.170.** $\{8; 1/\sqrt[3]{4}\}$. **7.171.** {5; 1/625}. **7.172.** $\sqrt{3}$. **7.173.** 9. **7.174.** 25. **7.175.** {5; —5}. **7.176.** 6. **7.177.** 17. **7.178.**

$\{3;\ \sqrt{3}\}$. **7.179.** $\{1;\ 4;\ 1/(4\sqrt[5]{8})\}$. **7.180.** $\{2;\ 4;\ 3;\ 11\}$. **7.181.** $\{2;\ 4;\ 1/3\}$. **7.182.** $\{1;\ 3;\ 1/2;\ -1/5\}$. **7.183.** a, где $a>0$, $a\neq 1$. **7.184.** 4. **7.185.** 3. **7.186.** $\{1;\ 3\}$. **7.187.** 1/3. **7.188.** 4. **7.189.** $\{1/9;\ 9\}$. **7.190.** 0. **7.191.** 2,5. **7.192.** $\{0;\ 1;\ 2\}$. **7.193.** $\{2;\ -2\}$. **7.194.** 2. **7.195.** 1. **7.196.** -2. **7.197.** 0,01. **7.198.** $\{0;\ 1/2\}$. **7.199.** 1/3. **7.200.** $\{1;\ \log_3(3+\sqrt{29})-1\}$. **7.201.** 2. **7.202.** $\{3;\ 1/3\}$. **7.203.** 5. **7.204.** 100. **7.205.** 0. **7.206.** 1. **7.207.** 16. **7.208.** $\{4;\ \sqrt[3]{4}/2\}$. **7.209.** $\{1/a,\ \sqrt{a};\ a^2\}$. **7.210.** $\{0{,}1;\ 100;\ \sqrt{10}\}$. **7.211.** 1. **7.212.** -1000. **7.213.** $-1/2$. **7.214.** $-2\sqrt[3]{2}$. **7.215.** 256. **7.216.** $\{11;\ 1{,}1\}$. **7.217.** 1. **7.218.** 0. **7.219.** 3. **7.220.** $(-1)^n\pi/6+\pi n$, $n\in Z$. **7.221.** 3. **7.222.** 2. **7.223.** 5. **7.224.** $\{8;\ 9\}$. **7.225.** $2+\log_4\dfrac{a-27}{3-a}$, где $3<a<27$. **7.226.** a^6, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.227.** $\{1;\ 10;\ 0{,}001\}$. **7.228.** 1. **7.229.** Уравнение не имеет смысла при $a\leqslant 0$ и $a=1$; $x=4-a^2$ при $0<a<1$, $1<a<2\sqrt{2}$; $\varnothing$ при $a\geqslant 2\sqrt{2}$. **7.230.** 0. **7.231.** 4. **7.232.** $4\log_3 2$. **7.233.** 1023. **7.234.** Уравнение не имеет смысла при $a=-2$; $\varnothing$ при $a=-3$, $a=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2a-1}{a+3}$ при $a\neq -2$, $a\neq -3$ и $a\neq\dfrac{1}{2}$. **7.235.** $\{(1;\ 1);\ (\sqrt[3]{6}/3;\ 2\sqrt[3]{6}/3)\}$. **7.236.** $(2;\ 2)$. **7.237.** $(2;\ 4)$. **7.238.** $(6;\ 2)$. **7.239.** $(2;\ 1)$. **7.240.** $\{(10;\ 1{,}5);\ (0{,}2;\ 75)(15;\ 1)\}$. **7.241.** $(2;\ 4)$. **7.242.** $\{(\sqrt{3};\ 1);\ (-\sqrt{3};\ 1)\}$. **7.243.** $\{(27;\ 4);\ (1/81;\ -3)\}$. **7.244.** $\{(1;\ 9);\ (16;\ 1)\}$. **7.245.** $(-2;\ 7)$. **7.246.** $(8;\ 4)$. **7.247.** $(5;\ 2)$. **7.248.** $(16;\ 20)$. **7.249.** $\{(1;\ 0);\ (2;\ 1)\}$. **7.250.** $\{(9a;\ 2a);\ (a;\ 18a)\}$, где $a>0$ и $a\neq 1$. **7.251.** $(4;\ 1)$. **7.252.** $\{(4;\ 1);\ (-4;\ -1)\}$. **7.253.** $\{(\sqrt{2};\ 2)(\sqrt[3]{4}/2;\ -3)\}$. **7.254.** $(6;\ 6)$. **7.255.** $\{(3;\ 5);\ (6;\ 2);\ (1;\ 7)\}$. **7.256.** $\{(2;\ 4);\ (4\sqrt{2};\ 2\sqrt[4]{2})\}$. **7.257.** $(3;\ 9)$. [7.258.] $(6;\ 2)$. **7.259.** $(5;\ 5)$. **7.260.** $\{(3;\ 9);\ (9;\ 3)\}$ **7.261.** $\{(5;\ 3);\ (1;\ -1)\}$. **7.262.** $\{(-10;\ 20);\ (10/3;\ 20/3)\}$. **7.263.** $(1;\ 4)$. **7.264.** $\{(8;\ 9);\ (27\log_5^3 2;\ 4\log_2^2 5)\}$. **7.265.** $\{(4;\ 2);\ (-4;\ 2)\}$. **7.266.** $(1/2;\ 4)$. **7.267.** $(2;\ 3)$. **7.268.** $(1;\ 3)$. **7.269.** $(2/9;\ 1/9)$. **7.270.** $(6;\ 2)$. **7.271.** $\lg b$, где $b>1$. **7.272.** 2, если $1<a\leqslant b$, и $2\log_a b$, если $1<b<a$. **7.273.** $\log_n^2 p$, где $\begin{cases} n>1, \\ p>1\end{cases}$ или $\begin{cases} 0<n<1, \\ 0<p<1.\end{cases}$ **7.274.** -2, если $1<a\leqslant b$, и $-2\log_a b$, если $1<b<a$. **7.275.** $1-\log_a(a-b)$, если $\begin{cases} 0<a<1, \\ b<0\end{cases}$ или $\begin{cases} a>1, \\ 0<b<a\end{cases}$, и $\log_a(a-b)-1$, если $0<b<a<1$ или $\begin{cases} a>1, \\ b<0.\end{cases}$ **7.276.** $\log_{135}675>\log_{45}75$. **7.277.** $x=\log_{0,4}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $0<x<1$. **7.279.** $\log_n A\log_m A\log_p A\log_A(mnp)$. **7.281.** $\log_a b-\log_b a$. **7.282.** При $p=1$ и при $p\in[-1/2,\ -3/22]$. **7.283.** При $a=12$ и при $a\in\,]-\infty;\ 0[$. **7.284.** $\{1;\ 4\}$. **7.285.** 3. **7.286.** $\{1/2;\ 1/8\}$. **7.287.** 64. **7.288.** 3. **7.289.** 7. **7.290.** $\pi/2+\pi n$, где $n\in Z$.

7.291. $\left\{\dfrac{2+\sqrt{4-2\lg p}}{2};\ \dfrac{2-\sqrt{4-2\lg p}}{2}\right\}$, где $1<p\leqslant 100$. **7.292.** 4.

7.293. $\sqrt[k]{k}$, где $k \geqslant 2$. **7.294.** b^2+1, где $b>0$ и $b \neq 1$. **7.295.** $\{3;\ 1/3\}$. **7.296.** $\{1000;\ 1/10;\ 2\}$. **7.297.** 2, если $a \neq 1$, и $]\,0;\ 6\,[$, если $a=1$. **7.298.** 2, если $p \neq 1$, и $]\,-2;\ \infty\,[$, если $p=1$. **7.299.** $\{-1;\ 1;\ 2\}$. **7.300.** $\{3;\ 1\}$. **7.301.** $\{-1;\ 1;\ 2\}$. **7.302.** $\{-1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. **7.303.** $[0;\ 1]$. **7.304.** 4. **[7.305]** 100. **7.306.** $\{1;\ 17/12;\ 11/6\}$. **[7.306.]** $\{1;\ 1+\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2}\}$. **[7.307.]** $\{1/3;\ 9\}$. **7.308.** $\left\{\frac{\sqrt{5}-3}{2};\ \frac{9-\sqrt{29}}{2}\right\}$. **[7.308.]** 16. **7.309.** $(3/2;\ 1/2)$. **7.310.** $\left(a^{\frac{q}{p(q-p)}};\ a^{\frac{q}{q-p}}\right)$.
7.311. $(1/4,\ 1/3)$. **7.312.** $\{(-a^3;\ -1/a);\ (-1/a,\ -a^3)\}$. **7.313.** $\{(8,\ 2);\ (1/2;\ 1/8)\}$ **7.314.** $\{(0;\ 0);\ (8;\ -8);\ (3;\ 1/3);\ (-4;\ -2)\}$. **7.315.** $\{(3;\ 9);\ (1/9;\ 1/3)\}$.

Глава 8

8.001. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(12k+1)$. **8.002.** $x=(-1)^{k-1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.003.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.004.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.005.** $z=(-1)^k\times 10°+60°k$. **8.006.** $t=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.007.** $t_1=\pi k$, $t_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$. **8.008.** $t_1=\frac{\pi}{12}(4k-1)$, $t_2=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi k}{3}$. **8.009.** $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.010.** $z=\pm 40°+120°k$. **8.011.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. **8.012.** $x=\frac{\pi}{12}(4k-1)$. **8.013.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.014.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. **8.015.** $z_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. **8.016.** $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. **8.017.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{8}(8k\pm 3)$. **8.018.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.019.** $x=\frac{\pi}{9}(2k+1)$. **8.020.** $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.021.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.022.** $x_1=\frac{\pi}{4}\times(4k-1)$, $x_2=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$. **8.023.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi k}{5}$, $x_3=\frac{\pi}{11}(2k+1)$. **8.024.** $x=\frac{\pi k}{3}$. **8.025.** $x=15°+360°\cdot k$. **8.026.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.027.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi k}{7}$. **8.028.** $x=\frac{\pi}{4}\times(4k+1)$. **8.029.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{14}(2k+1)$. **8.030.** $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$.

8.031. $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$. 8.032. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi k}{11}$. 8.033. $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. 8.034. $x=\frac{\pi k}{8}$. 8.035. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.036. $x_1=\frac{\pi}{16}(2k+1)$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. 8.037. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{12}\times\times(6k\pm 1)$. 8.038. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.039. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\operatorname{arcctg} 5+\pi k$. 8.040. $x=\frac{\pi}{4}(4k+3)$. 8.041. $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. 8.042. $t=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.043. $z_1=35°+120°\cdot k$, $z_2=55°+120°\cdot k$. 8.044. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi k}{7}$. 8.045. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.046. $z_1=\pi k$, $z_2=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. 8.047. $x_1=\frac{2\pi k}{5}$, $x_2=\frac{2\pi k}{3}$. 8.048. $x=\frac{\pi k}{4}$. 8.049. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. 8.050. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. 8.051. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.052. $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.053. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.054. $x_1=\frac{\pi k}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+3)$. 8.055. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. 8.056. $t_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{3}(2k+1)$. 8.057. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$. 8.058. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{20}(4k+3)$. 8.059. $x_1=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\pm\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi k}{3}$. 8.060. $x=\frac{\pi k}{5}$. 8.061. $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. 8.062. $x=\pi(2k+1)$. 8.063. $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}$. 8.064. $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.065. $z_1=\frac{\pi}{4}(8k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{20}(8k+3)$. 8.066. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.067. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{18}(4k+1)$. 8.068. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}\times\times(4k+1)$. 8.069. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.070. $z_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}$, $z_2=\frac{2}{5}\operatorname{arctg} 5+\frac{2\pi k}{5}$. 8.071. $z_1=\frac{2}{3}\operatorname{arctg} 2+\frac{2\pi k}{3}$, $z_2=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\frac{2\pi k}{3}$. 8.072. $x=\pm\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}\pi k$. 8.073. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.074. $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{4}{3}\pi+4\pi k$. 8.075. $x_1=\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k$. 8.076. $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{7}(2k+1)$. 8.077. $z_1=2\operatorname{arcctg} 3+2\pi k$, $z_2=-2\operatorname{arctg} 7+$

$+2\pi k$. **8.078.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.079.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.080.** $x_1=\pi k$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.081.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=$ $=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k$. **8.082.** $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_3=\frac{\pi}{10}(4k+1)$. **8.083.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}3+\pi k$. **8.084.** $x_1=\frac{\pi}{12}(2k+1)$, $x_2=$ $=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **8.085.** $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **8.086.** $x_1=$ $=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. **8.087.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$. **8.088.** $t=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.089.** $t_1=-31^\circ+180^\circ\cdot k$, $t_2=89^\circ+180^\circ\cdot k$. **8.090.** $t=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.091.** $t_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $t_2=\pi k$. **8.092.** $x_1=100^\circ+360^\circ\cdot k$, $x_2=-20^\circ+360^\circ\cdot k$. **8.093.** $t_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $t_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$. **8.094.** $x=$ $=\pi(4k+1)$. **8.095.** $x=\frac{\pi k}{6}$. **8.096.** $x_1=\frac{\pi k}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$. **8.097.** $z_1=$ $=2\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.098.** $z_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $z_2=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.099.** $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.100.** $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(4k+1)$. **8.101.** $x_1=$ $=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(8k\pm3)$. **8.102.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.103.** $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.104.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.105.** $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. **8.106.** $x=\pm40^\circ+120^\circ\cdot k$. **8.107.** $x_1=$ $=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2=2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+2\pi k$. **8.108.** $z=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.109.** $x=$ $=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. **8.110.** $x=\frac{\pi k}{10}$. **8.111.** $x_1=75^\circ+180^\circ\cdot k$, $x_2=45^\circ\cdot k-$ $-3^\circ 45'$. **8.112.** $x_1=\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.113.** $x_1=\frac{\pi}{16}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. **8.114.** $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.115.** $z=$ $=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.116.** $x_1=135^\circ+360^\circ\cdot k$, $x_2=-105^\circ+360^\circ\cdot k$. **8.117.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(12k-1)$, $x_3=\frac{\pi}{3}(6k-1)$. **8.118.** $t_1=(-1)^k\times$ $\times\frac{\pi}{6}+\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.119.** $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. **8.120.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$,

$x_2=\frac{\pi}{5}(2k+1)$, $x_3=\frac{\pi}{7}(2k+1)$. 8.121. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.122. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi k}{5}$. 8.123. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.124. $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.125. $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(12k-1)$. 8.126. $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. 8.127. $x=\frac{\pi}{12}(1+6k)$. 8.128. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. 8.129. $x=\frac{\pi k}{4}$. 8.130. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{5}$. 8.131. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k+1)$. 8.132. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.133. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi k}{9}$. 8.134. $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.135. $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.136. $z_1=\frac{\pi}{2}\times\times(2k+1)$, $z_2=\operatorname{arctg}4+\pi k$. 8.137. $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.138. $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{4}(8k\pm 1)$. 8.139. $x_1=\frac{3\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=\pi(3k\pm 1)$. 8.140. $x=45^\circ\times\times(4k+1)$. 8.141. $x_1=\frac{\pi k}{2}-1$, $x_2=\frac{\pi}{10}(2k+1)-1$. 8.142. $x_1=\frac{\pi}{4}\times\times(4k+1)-\frac{1}{2}$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}-\frac{1}{2}$. 8.143. $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. 8.144. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. 8.145. $x_1=\frac{2\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_3=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.146. $x=60^\circ+180^\circ\cdot k$. 8.147. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.148. $x=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. 8.149. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.150. $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. 8.151. $x_1=\frac{2\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{6}(4k+1)$. 8.152. $x=\frac{\pi}{9}\times\times(3k\pm 1)$. 8.153. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.154. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{6}\times\times(6k\pm 1)$. 8.155. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.156. $x_1=\frac{2\pi k}{5}$, $x_2=\frac{2\pi}{9}(3k-2)$. 8.157. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.158. $x=30^\circ+180^\circ\cdot k$. 8.159. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.160. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}+\pi k$. 8.161. $x_1=\pi k-\operatorname{arctg}3$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.162. $x_1=\pi k$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. 8.163. $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.164. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{18}(4k+1)$. 8.165. $x=\frac{\pi k}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$. 8.166. $x=\pm\arccos 0{,}8+2\pi k$.

8.167. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.168. $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. 8.169. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.170. $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.171. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.172. $x=180^\circ\cdot k-25^\circ$. 8.173. $x_1=2\pi k$, $x_2=2\pi k-\frac{1}{\pi}$. 8.174. $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.175. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{73}-9}{2}+\pi k$. 8.176. $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.177. $x_1=\frac{\pi}{2}\times(4k+1)$, $x_2=(-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi k$. 8.178. $x=60^\circ\cdot k-40^\circ$. 8.179. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.180. $z_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $z_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.181. $t=\frac{\pi}{12}\times(6k\pm 1)$. 8.182. $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}$. 8.183. $t=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi k}{2}$. 8.184. $z_1=\frac{2\pi k}{15}$, $k\neq 15l$; $z_2=\frac{\pi}{17}(2k+1)$, $k\neq 17l+8$. 8.185. $x=\frac{\pi}{2}\times(4k+1)$. 8.186. $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.187. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. 8.188. $x=25^\circ+90^\circ\cdot k$. 8.189. $t=2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}+2\pi k$. 8.190. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+3)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.191. $t=\frac{\pi}{7}(2k+1)$, $k\neq 7l+3$. 8.192. $x_1=\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}2+\pi k$. 8.193. $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.194. $t_1=\frac{\pi k}{3}$, $t_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.195. $z=\frac{\pi}{18}(6k\pm 1)$. 8.196. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.197. $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.198. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{4}$. 8.199. $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.200. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.201. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.202. $x=\frac{\pi k}{12}$. 8.203. $x=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. 8.204. $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.205. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.206. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$ 8.207. $t=\frac{\pi}{8}\times(2k+1)$. 8.208. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.209. $x=(-1)^{k+1}\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.210. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.211. $x_1=\frac{\pi k}{5}$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.212. $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $x_2=\frac{2\pi}{9}(3k\pm 1)$. 8.213. $t=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.214. $t_1=\pi(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.215. $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.216. $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_3=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$. 8.217. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.218. $x_1=$

$=\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2}{5}\pi k$, $x_2=\pi k$. 8.219. $t=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.220. $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 8.221. $t_1=\frac{\pi k}{4}$, $k\neq 4l+2$; $t_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k$. 8.222. $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.223. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.224. $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.225. $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\pi k$, $t_3=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\pi k$. 8.226. $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.227. $t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}$, $t_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\pi(2k+1)}}{2}$, $k\in Z_0$. 8.228. $z=\frac{\pi k}{3}$. 8.229. $t_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $t_2=(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\left(1-\sqrt{3}\right)+\frac{\pi k}{2}$. 8.230. $x=\frac{\pi k}{14}$, $k\neq 14l$. 8.231. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.232. $t=\frac{\pi k}{4}$. 8.233. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.234. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. 8.235. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.236. $x=\frac{\pi}{4}(1+4k)$. 8.237. $x_1=\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{24}(2k+1)$. 8.238. $x_1=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{5\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}$. 8.239. $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$. 8.240. $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2=(-1)^k\times\frac{\pi}{4}+\pi k$. 8.241. $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.242. $x=\frac{\pi}{20}(2k+1)$, $k\neq 5l+2$. 8.243. $z=\frac{\pi}{8}(4k-1)$. 8.244. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.245. $t=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$. 8.246. $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.247. $t=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.248. $t=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.249. $x=\frac{\pi}{12}(3k+1)$. 8.250. $z=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. 8.251. $t=\frac{\pi}{6}(3k+1)$. 8.252. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.253. $t_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $t_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. 8.254. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k-1)$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi k}{2}$. 8.255. $x=\pi k-2$. 8.256. $z=\frac{\pi}{3}\times(3k\pm 1)$. 8.257. $z=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.258. $z=\frac{\pi}{8}(8k\pm 1)$. 8.259. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_3=-\operatorname{arctg}2+\pi k$. 8.260. $z_1=\frac{\pi}{14}(2k+1)$; $2k+1\neq 7l$, $z_2=\frac{\pi}{28}(3+4k)$; $3+4k\neq 7l$. 8.261. $t=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.262. $z=-20^\circ+60^\circ\cdot k$. 8.263. $x=4\pi k$. 8.264. $t=\pi k$. 8.265. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

8.266. $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.267. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+$ $+\pi k$, $x_3=\operatorname{arctg}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$. 8.268. $x_1=2\pi k$, $x_2=$ $=\pm\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+2\pi k$. 8.269. $x=\operatorname{arctg}3+\pi k$. 8.270. $x=(-1)^{k+1}\times$ $\times\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}$. 8.271. $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.272. $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.273. $z_1=\pi k$, $z_2=\pi k-\operatorname{arctg}3$. 8.274. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}\times$ $\times(2k+1)$, $x_3=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$. 8.275. $t_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\neq 3l+1$; $t_2=$ $=\frac{\pi k}{5}$, $k\neq 5l$. 8.276. $x_1=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{73}-7}{12}+\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $x_3=$ $=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k$. 8.277. $x=\frac{\pi}{32}(4k+3)$. 8.278. $x_1=\pi k$, $x_2=$ $=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. 8.279. $z=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.280. $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{12}\times$ $\times(6k\pm 1)$. 8.281. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.282. $z_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. 8.283. $x_1=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$, $x_2=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$. 8.284. $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. 8.285. $x_1=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}3+\frac{\pi k}{2}$. 8.286. $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{16}(2k+1)$. 8.287. $x=8\pi k$. 8.288. $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.289. $x_1=\frac{\pi k}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.290. $t_1=\frac{\pi k}{3}$, $t_2=\frac{\pi}{12}(4k-1)$. 8.291. $x=2\pi k$. 8.292. $t=\pi k$. 8.293. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. 8.294. $t=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.295. $x_1=$ $=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.296. $z_1=\pm\arccos\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}+\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{3}\times$ $\times(3k\pm 1)$. 8.297. $x_1=\frac{\pi k}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.298. $z_1=$ $=\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\frac{\pi k}{2}$, $z_2=\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{5}+\frac{\pi k}{2}$. 8.299. $x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi k}{2}$. 8.300. $x=\pi k$. 8.301. $z_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $z_2=\frac{\pi}{4}\times$ $\times(4k-1)$. 8.302. $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$. 8.303. $z=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.304. $x_1=$ $=\frac{\pi}{10}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. 8.305. $t_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $t_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+$

$+\pi k$. 8.306. $t_1=360°\cdot k$, $t_2=90°(4k+1)$. 8.307. $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1)$, $x_2=-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{4}$. 8.308. $z_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $z_2=\pi k$, $z_3=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.309. $t=\frac{1\pm\sqrt{9+4\pi k}}{2}$; $k\in Z_0$. 8.310. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.311. $t_1=\pi k$, $t_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\pi k$. 8.312. $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. 8.313. $x_1=\frac{\pi}{3}(6k\pm1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.314. $x=\frac{\pi}{3}\times(3k\pm1)$. 8.315. $t=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.316. $x=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. 8.317. $t=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.318. $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.319. $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 8.320. $z=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.321. $t_1=90°\cdot k$, $t_2=\pm15°+90°\cdot k$. 8.322. $x=\pi k$. 8.323. $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k$. 8.324. $x_1=\frac{\pi}{3}(6k+1)$, $x_2=\frac{2}{9}\pi(1+3k)$. 8.325. $z_1=\pi k$, $z_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.326. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.327. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.328. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.329. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.330. $x_1=\frac{\pi}{18}(6k\pm1)$, $x_2=\frac{\pi k}{2}$. 8.331. $x=\frac{\pi}{30}(6k\pm1)$. 8.332. $x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2}$. 8.333. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. 8.334. $t=\frac{\pi}{2}(1+4k)$. 8.335. $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-35°+180°\cdot k$, $x_2=-\operatorname{arctg}2-35°+180°\cdot k$. 8.336. $x_1=\pi k$; $x_2=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$; $k\neq3l+1$; $x_3=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k$. 8.337. $x_1=-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\pi k$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{1}{2}\pi k$. 8.338. $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.339. $x=2\pi k$. 8.340.. $z_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $z_2=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$. 8.341. $x_1=-5°+60°\cdot k$, $x_2=70°+90°\cdot k$. 8.342. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.343. $t_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $t_2=\frac{\pi}{8}(4k+1)$. 8.344. $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. 8.345. $t_1=\frac{\pi}{3}\times(2k+1)$, $k\neq3l+1$; $t_2=\frac{\pi}{5}(2k+1)$, $k\neq5l+2$. 8.346. $x=2\pi k$. 8.347. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.348. $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_3=2\pi k$. 8.349.

$x_1=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$, $x_2=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{157}-6}{11}+\pi k$. 8.350. $x=\frac{7}{12}\pi+\pi k$. 8.351. $x_1=\frac{\pi}{6}(6k+1)$, $x_2=\operatorname{arctg}\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\pi k$, $x_3=\pi k-\operatorname{arctg}\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. 8.352. $x_1=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(8k\pm 3)$. 8.353. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.354. $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.355. $x=\pi k$. 8.356. $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\neq 3l+1$; $x_2=\frac{\pi}{12}(2k+1)$. 8.357. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.358. $x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.359. $x_1=\pi k$, $x_2=\pi k\pm\operatorname{arctg}5$. 8.360. $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{8}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{8}(4k-1)$. 8.361. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.362. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. 8.363. $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_3=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.364. $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_3=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.365. $x_1=\frac{\pi}{4}\times(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.366. $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.367. $t_1=\pi k$, $t_2=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. 8.368. $x_1=\pi k$, $x_2=\pi k\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.369. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=(-1)^k\arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.370. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.371. $x=\pi k$ при любом a; $x=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2}$ при $-1\leqslant a\leqslant 3$. 8.372. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ при любом m; $x=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{m+1}{2}$ при $-3\leqslant m\leqslant 1$. 8.373. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)-\alpha$ при $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$; при $\alpha=\frac{\pi}{4}$ решений нет. 8.374. $x=(-1)^k\arcsin\frac{m}{8}+\frac{\pi}{6}(6k+1)$; $-8\leqslant m\leqslant 8$. 8.375. $x=\pi k-\frac{3}{2}+(-1)^k\arcsin\frac{\cos\alpha}{2\cos 1}$ при любом α. 8.376. $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 8.377. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.378. $x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.379. $x=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1)$. 8.380. $x=(-1)^k\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{6}$. 8.381. $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm 1)$. 8.382. $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 8.383. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.384. $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k$. 8.385. $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$. 8.386. $x+y=\frac{\pi}{4}\times$

$\times(4k+1)$. **8.390.** $\arcsin\frac{3}{5}$, $\arcsin\frac{5}{13}$, $\pi-\arcsin\frac{56}{65}$. **8.392.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **8.393.** $x=\pi k_1$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k_2$. **8.394.** $x_1=(-1)^k\times\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$. **8.395.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $y_1=-\frac{\pi}{12}(12k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{12}(12k-1)$, $y_2=\frac{\pi}{4}(1-4k)$. **8.396.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+3)$, $y=\frac{\pi}{6}(6k-1)$. **8.397.** $x_1=\frac{\pi}{6}+\pi(k_1-k_2)$, $y_1=\frac{\pi}{3}+\pi(k_1+k_2)$; $x_2=-\frac{\pi}{6}+\pi(k_1-k_2)$, $y_2=\frac{2\pi}{3}+\pi(k_1+k_2)$. **8.398.** $x=\frac{1}{6}(6k-1)$, $y=\frac{1}{6}(6k+1)$. **8.399.** $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $y_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi k$; $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$; $y_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi k$. **8.400.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $y=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k_1$, k и k_1 — числа одной четности. **8.401.** $x_1=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi k_1$, $y_1=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k_2$; $x_2=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k_1$, $y_2=2\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+2\pi k_2$. **8.402.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\frac{\pi}{3}(6k_1\pm1)$. **8.403.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi\times(k_1+k_2)$, $y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi(k_1-k_2)$. **8.404.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y_1=\frac{\pi}{3}\times(1-3k)$; $x_2=\frac{\pi}{3}(3k+1)$, $y_2=\frac{\pi}{2}(1-2k)$. **8.405.** $x=\frac{\pi}{6}(6k+1)$, $y=\frac{\pi}{6}(1-6k)$. **8.406.** $x=\pi k$, $y=\frac{\pi m}{2}$, $z=\frac{\pi}{6}(4n-1)$. **8.407.** $x=\pi k$. **8.408.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.409.** $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.410.** $t_1=\frac{\pi}{4}(1+8k)$, $t_2=-\operatorname{arctg}3+\pi(2k+1)$. **8.411.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.412.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_3=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k$. **8.413.** $z_1=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $z_2=\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\pi k$. **8.414.** $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.415.** $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$. **8.416.** $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=\arccos\left(\sqrt{5}-2\right)+2\pi k$. **8.417.** $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=-\operatorname{arctg}4+\pi k$. **8.418.** $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$. **8.419.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.420.** $x=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.421.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=$

$=-\operatorname{arctg} 6+\pi k$. 8.422. $x=\frac{\pi}{6}(6k\pm 1)$. 8.423. $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. 8.424. $x_1=\frac{\pi}{4}(8k+5)$, $x_2=\operatorname{arctg} 3+\pi(2k+1)$. 8.425. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=2\pi k$. 8.426. $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+3)$, $x_2=\frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}+\frac{\pi k}{4}$. 8.427. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.428. $x=\frac{\pi}{8}(8k+3)$. 8.429. $x_1=\frac{3\pi}{8}+\pi k$, $x_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 5+\frac{\pi}{2}(2k+1)$. 8.430. $t_1=\frac{1-\sqrt{1+8k}}{2}+2k$, $t_2=\frac{3+\sqrt{5+8k}}{2}+2k$, $k\in Z_0$. 8.431. $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$. 8.432. $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+3)$, $x_2=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1)$. 8.433. $x=\pi k$. 8.434. $x=\pm\arccos\frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-2}}+2\pi k$. 8.435. $x=\frac{\pi k}{6}$. 8.436. $z=\frac{\pi}{8}\times(2k+1)$. 8.437. $x=\pi k$, $y=\frac{\pi}{6}(4n+1)$. 8.438. $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. 8.439. $x_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $x_2=\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi k$. 8.440. $t=\frac{(-1)^n}{2}\times\arcsin\frac{4}{2k+1}+\frac{\pi n}{2}$; $k=3, 4, \ldots, k=-4, -5, \ldots$. 8.441. $x_1=\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\pi k$.
8.442. $x=\frac{\pi}{12}(3k\pm 1)$. 8.443. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}+2\pi k$. 8.444. $t=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.445. $t=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi k$. 8.446. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=(-1)^k\cdot\frac{1}{2}\times\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\pi k}{2}$. 8.447. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{32}(4k+1)$. 8.448. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y=\pi m$. 8.449. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.450. $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}{\sqrt{2}}+2\pi k$. 8.451. $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1)$. 8.452. $x_1=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-2}{2}+2\pi k$. 8.453. $x=\frac{\pi}{4}\times$

$\times(4k+1)$. **8.454.** $x=\frac{1\pm\sqrt{1+8\pi k}}{2}+2\pi k,\ k\in Z_0$. **8.455.** $t=\frac{\pi}{4}\times$ $\times(4k+1)$. **8.456.** $x_1=\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.457.** $x=\pi(4k+1)$. **8.458.** $t=\frac{\pi}{4}(4k-1)-\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$. **8.459.** $x=-1\pm\sqrt{1+\pi k}$; $k\in Z_0$.

8.460. $x=\pi k$. **8.461.** $x=2\pi k$. **8.462.** $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1),\ k\neq 3l+1$; $x_2=$ $=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.463.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ y=\frac{\pi}{2}(4m+1),\ z=\frac{\pi n}{3}$. **8.464.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.465.** $x=\pi(2k+1)$. **8.466.** $x=\frac{2\pi k}{5},\ k\neq 5l$. **8.467.** $x_1=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **8.468.** $t_1=0,\ t_2=$ $=\frac{1+\sqrt{1+8k}}{4},\ k>0,\ k\neq l(2l+1),\ t_3=\frac{1-\sqrt{1+8k}}{4},\ k\neq l(2l-1),$ $l>0$. **8.469.** $x=\pi(2k+1)$. **8.470.** $t=\pm 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\pi k$. **8.471.** $x=$ $=\frac{5\pi}{6}(4k+1),\ k\neq 3l+2$. **8.472.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+\pi k$.

8.473. $x=\frac{\pi}{2}(1+4k)$. **8.474.** $x_1=\pi k,\ x_2=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{5}}+\pi k$. **8.475.** $t=$ $=\frac{-2\pm\sqrt{4+2k}}{2},\ k\geqslant 1,\ k\neq 2(l^2-1)$. **8.476.** $x=\frac{\pi}{12}(4k+1),\ k\neq 3l+$ $+2$. **8.477.** $t=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **8.478.** $t=\frac{\pi}{12}(3k\pm 1)$. **8.479.** $x=\frac{\pi}{2}\times$ $\times(4k-1),\ y=\frac{\pi}{2}(2n+1)$. **8.480.** $z_1=2\pi k,\ z_2=\frac{\pi}{2}(4k-1)$. **8.481.** $t=\frac{\pi}{12}(6k+5)$. **8.482.** $t_1=\pi k,\ t_2=\frac{\pi}{8}(2k+1)$. **8.483.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$.

8.484. $z=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}+2\pi k$. **8.485.** $x=\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **8.486.** $t_1=$ $=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ t_2=\frac{\pi}{16}(4k+1)$. **8.487.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$. **8.488.** $x=\frac{\pi}{8}\times$ $\times(2k+1)$. **8.489.** $x=\frac{\pi}{6}(6k+1)$. **8.490.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **8.491.** $x=$ $=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. **8.492.** $x=\frac{\pi}{4}(8k+1)$. **8.494.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ y=\frac{\pi}{4}\times$ $\times(2k+5)$. **8.495.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k_1+1),\ y_1=\pi k_2$; $x_2=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,$ $y_2=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k_1$. **8.496.** $x_1=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad y_1=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad x_2=$

$= 2\operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi k, \quad y_2 = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi n, \quad x_3 =$ $= 2\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi k, \ y_3 = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{3}} + 2\pi n.$ **8.497.** $x = \pm\dfrac{\pi}{8}, \ y = \mp\dfrac{\pi}{8}.$ **8.498.** $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad y = \dfrac{\pi}{4} + \pi(2k_1+1).$ **8.499.** $x_1 = (-1)^{k_1}\cdot\dfrac{\pi}{6} + \pi k_1, \ y_1 = (-1)^{k_2}\cdot\dfrac{\pi}{6} + \pi k_2, \ z_1 = (-1)^{k_3}\cdot\dfrac{\pi}{6} + \pi k_3;$ k_1, k_2, k_3 — числа одной четности; $x_2 = y_3 = z_4 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k_1, \quad y_2 = z_3 = x_4 = \dfrac{\pi}{6} + \pi(2k_2+1), \quad z_2 = x_3 = y_4 = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k_3; \ x_5 = y_6 = z_7 = -\dfrac{\pi}{6} + \pi \times$ $\times (2k_1+1), \ y_5 = z_6 = x_7 = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k_2, \quad z_5 = x_6 = y_7 = \dfrac{\pi}{6} + \pi(2k_3+1).$

8.500. $x_1 = \dfrac{\pi}{6}, \ y_1 = \dfrac{\pi}{3}, \ z_1 = \dfrac{\pi}{2}; \quad x_2 = y_3 = z_4 = 0, \quad y_2 = z_3 = x_4 = 0, \quad z_2 = x_3 = y_4 = \pi.$

Глава 9

9.008.]−4; −3]. **9.010.** 2. **9.011.** 1. **9.012.** 2. **9.013.**]−1; 2]. **9.014.** {2; 3}. **9.015.**]−2; 0[. **9.016.**]−∞; −1[∪[4; ∞[. **9.017.** [−2; 1[∪]1; 2]. **9.018.**]1; ∞[. **9.019.** [2; ∞[. **9.020.**]−∞; 0[∪[2; 3]. **9.021.** [2; 4[. **9.022.**]−∞; −2[∪]2; ∞[. **9.023.**]−∞; −2[∪]5/8; ∞[. **[9.024.]**]5/3; ∞[. **9.025.**]3; 4,5[. **9.026.**]8/3; ∞[. **9.027.**]−1; 2[∪]2; 3[. **9.028.** [0; 3]. **9.029.**]−∞; 1[∪]4/3; 2[. **9.030.**]−4,5; −2[∪]3; ∞[. **9.031.**]−∞; 1/3[∪]3; 5[∪]5; ∞[. **9.032.**]−∞; −0,5]∪[5; ∞[. **9.033.**]−1,2[∪]3; 6[. **9.034.** [0; 8]. **9.035.**]−∞; −0,5]∪[0,5; ∞[. **9.036.**]−∞; 2[∪]8; ∞[. **9.037.**]$-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$[. **9.038.**]−∞; 7/3[∪]3; ∞[. **9.039.**]0; 4[. **9.040.**]−∞, 0,75[∪]4; 7[. **9.041.**]−∞; 1[∪]2; +∞[. **9.042.** {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}. **9.043.** [4; ∞[. **9.044.**]−3; 1[. **9.045.** [20/9; 4[∪]5; ∞[. **9.046.**]1; 6[. **9.047.**]−1; 5[. **9.048.**]1; 3[∪]3; 5[. **9.049.**]0; 3[∪]7; ∞[. **9.050.**]−∞; −2[∪]−1; 0]. **9.051.**]0; 2]. **9.052.**]0; 0,5[. **9.053.** $\left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$. **9.054.**]0, ∞[. **9.055.**]−∞; $1-\log_2 3$[. **9.056.**]−1; 91/9[. **9.057.**]−0,5; 2[. **9.058.**]0; 0,4[∪]1; ∞[. **9.059.**]3; ∞[. **9.060.**]3; 4[∪]4; ∞[. **9.061.**]0; 1[. **9.062.** [1; 4]. **9.063.**]−∞; 0[∪[0,5; ∞[. **[9.064.]**]−∞; 11]. **9.065.**]−1; 4[. **9.066.**]−1; 0[∪]3; 4[. **9.067.**]0; ∞[. **9.068.**]1; ∞[. **9.069.**]1; 1,04[∪]26; ∞[. **9.070.**]4; 6[. **9.071.**]2; 3[. **9.072.**]−1; 1[. **9.073.**]−1; 1[. **9.074.**]1; ∞[. **9.075.**]1/3; 3[. **9.076.**]0; 0,25[∪]4; ∞[. **9.077.**]0; ∞[. **9.078.**]−∞; 0,5[∪]1; ∞[. **9.079.**]−8; 1]. **9.080.**]−2; −1[∪]−1; 2]. **9.081.**]2; 3[. **9.082.**]−∞; −3[∪]−2; −1[. **9.083.**]−1; 1[. **9.084.**]1/lg 3; ∞[. **9.085.**]−1; 0[∪]0; 1[. **9.086.**]0; 1[. **9.087.**]2; 32[. **[9.088.]**]0; 40[. **9.089.**]1; $\sqrt[3]{5}$[. **9.090.** [0; 4[. **9.091.** [0; 0,5]. **9.092.** [0,5; 4]. **9.093.**]2; ∞[. **9.094.**]0; 27[. **9.095.**

$]-1; 2[$. **9.098.** $]2; \infty[$. **9.099.** $[1; \infty[$. **[9.100.]** $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. **9.101.** $]5/9; 1]\cup[6; \infty[$. **9.102.** $]-\infty; -3[\cup]2; 6]$. **9.103.** $]-3/2; 12/7[$. **9.104.** $]-\infty; -7/4[$. **9.105.** $\{11; 12; 14; 15\}$. **9.109.** $[-0{,}5; 0[\cup]0; 0{,}5]$. **9.110.** $[37/7; 7]$. **9.111.** 1. **9.112.** $]-6; 6[$. **9.113.** $[-5; 3[\cup]3; 5]$. **9.114.** $]-\infty; -1[\cup]3; \infty[$. **9.115.** $]-\infty; -0{,}5[$. **9.116.** $]-3; -2[\cup]1; 2[\cup]3; \infty[$. **9.117.** $]-6; 2[$. **9.118.** $]-7; 1[$. **9.119.** $]-2; -1[\cup]-1; 1[\cup]5; \infty[$. **[9.120.]** $\{2; 3\}$. **9.122.** $[5{,}5; \infty[$. **9.123.** $[0; 3[\cup]3; 4[$. **9.124.** $]0; 1/64[\cup]4; \infty[$. **9.125.** $[0; 2[\cup]4; 6]$. **9.126.** $]3; 3{,}5]\cup[5; \infty[$. **[9.127.]** $[-98; 2[\cup]2; 102]$. **9.128.** $]3; 3{,}5[\cup]3{,}5; 4[$. **9.129.** $]4; 5[\cup]5; \infty[$. **9.130.** $]-\infty; 4/3[$. **9.131.** $]0; 0{,}75[\cup]1{,}25; 2[$. **9.132.** $]1/3; 1[\cup]1; 2[$. **9.133.** $]-1; \sqrt[3]{4}[$. **9.134.** $]\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n[$, $n\in Z$. **9.135.** $]a^4; 1/a[$, если $0<a<1$, и $]1/a; a^4[$, если $a>1$. **9.136.** $]-2; 0[\cup]0; 1[$. **9.137.** $]1/8, 1/4[\cup]4; 8[$. **9.138.** $[1{,}5; 2[$. **9.139.** Если $m>3$ и $m<-3$, то $]-\infty; \frac{1}{m-3}[$; если $-3<m<3$, то $]\frac{1}{m-3}; \infty[$; если $m=3$, то $]-\infty; +\infty[$; если $m=-3$, то $\varnothing$. **9.140.** $]-\infty; 2\sqrt{5}-4[$. **9.141.** $]2; \infty[$. **9.142.** $[0; 1{,}6]\cup[2{,}5; \infty[$. **9.143.** $]2\sqrt{21}/3; \infty[$. **9.144.** $]0; 0{,}5[\cup]2; 3[$. **9.145.** $]\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n[$, $n\in Z$. **9.146.** $]\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8}(4n+1)[$, $n\in Z$. **9.147.** $]\frac{\pi}{4}(2n-1); \frac{\pi}{8}(4n-1)[\cup]\frac{\pi}{8}(4n-1); \frac{\pi n}{2}[$, $n\in Z$. **9.148.** $]-2; 0[\cup]0; 1[$. **9.149.** $]-\infty; -4/3[\cup]-79/75; 3/2[\cup]2; \infty[$. **9.150.** $]-\infty; 0[\cup]1; 2[\cup]2; 3[\cup]4; \infty[$. **9.151.** $]-\infty; 0[\cup]4{,}5, \infty[$. **9.152.** $]0; 0{,}5[\cup]\sqrt{2}; \infty[$. **9.153.** $]-3; 1[$. **9.154.** $]-\infty; -7[\cup]-1, 0[\cup]0; 1[\cup]3; \infty[$. **9.155.** $]1; 2[\cup]64; \infty[$. **9.156.** $]-\infty; -2[\cup]6; \infty[$. **9.157.** $]1; \infty[$. **9.158.** $]2; 5[$. **9.159.** $[27; \infty[$. **9.160.** $]-1/3; \infty[$. **9.161.** $]0; 1/3[\cup]243; \infty[$. **9.162.** $]-2; -5/3[\cup]0; 1/3[$. **9.163.** $]-3; -2[\cup]-1; 0[$. **9.164.** $]2/3; \infty[$. **9.165.** $]0; 0{,}5[\cup]2; \infty[$. **9.166.** $]0{,}01; \infty[$. **9.167.** $]-\infty; -1[\cup]-1; 2]$. **9.168.** $]1; 2/\sqrt{3}[$. **9.169.** $]-2; -1{,}5[\cup[1; 2[\cup[5; \infty[$. **9.170.** $]-\infty; 2[\cup[3{,}5; 4[\cup[7; \infty[$. **[9.171.]** $]-\infty; -0{,}1]\cup[-0{,}001; 0[$. **9.172.** $]-\infty; -5/6]\cup[3; \infty]$. **9.173.** $[-3; -\sqrt{6}[\cup]-\sqrt{6}; -2]\cup[2; \sqrt{6}[\cup]\sqrt{6}; 3]$. **9.174.** $]-\infty; 0[\cup]0; 3[\cup]3; 3{,}5[\cup]4; \infty[$. **9.175.** $]4^{\log_{0,8}0,2}; \infty[$. **9.176.** $]-\sqrt{14}; -3[\cup]-1; 1[\cup]3; \sqrt{14}[$. **9.177.** $]-1/2; 1/3[$. **9.178.** $[1/8; 4]$. **9.179.** $]1; 3[$. **9.180.** $]2; 8[$. **9.181.** $]-4; -3[\cup]8; \infty[$. **9.182.** $]0; 0{,}5[\cup]1; 2[\cup]3; 6[$. **9.183.** $]4; 10[$. **9.184.** $]-4/3; -1[\cup]-1; -1/2[$. **9.185.** $]-\sqrt[4]{12}; \sqrt[4]{12}[$. **9.186.** $]-\infty; -5[\cup]-3; -1[\cup]1; 2[$. **9.187.** $]1; 3[\cup]3^9; \infty[$. **9.188.** $]\frac{\sqrt{34}-1}{2}; \infty[$. **9.189.** $]1; 4[$. **9.190.** $]-\infty, -2[\cup]1; 2[\cup]3; \infty[$. **9.191.** $]2\pi n-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}+2\pi n[\cup$

$]\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{5}{4}\pi+2\pi n[$, где $n\in Z$. **9.192.** $[-1;\ \infty[$. **9.193.** $]1;\ 1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}[\cup]3;\ \infty[$. **9.194.** $]\sqrt[5]{5};\ 5[$. **9.195.** $]-\sqrt{2};\ -1[\cup]1;\ \sqrt{2}[$. **9.196.** $]0;\ \infty[$. **9.197.** $]-\sqrt{5};\ \infty[$. **9.198.** $]1;\ 5[$. **9.199.** $]5;\ \infty[$. **9.200.** $]-2;\ 13[$. **9.201.** $]1;\ 2[\cup]3;\ \infty[$. **9.202.** $]0,25;\ 1[\cup]1;\ 4[$. **9.203.** $]0,2;\ 5[$. **9.204.** $]2^{-28};\ 1[$. **9.205.** $]-3;\ -1[$. **9.206.** $]0;\ 2[$. **9.207.** $]0;\ \pi/2]$. **9.208.** $[5;\ 7]\cup\{4\}$. **9.209.** $]5;\ 8[\cup]8;\ 29[$. **9.210.** $]-8;\ -6,5[\cup]0;\ 5[$. **9.211.** $[1,75;\ 4[$. **9.212.** $]-1;\ 3[$. **9.213.** $]-2;\ 0]$. **9.214.** $]-1;\ 2[$. **9.215.** $]-\infty;\ -7[\cup]-7;\ -2]\cup]1;\ 7[\cup]7;\ 8]\cup]11;\ \infty[$. **9.216.** $]0;\ \sqrt{5}/5[\cup]1;\ 3[$. **9.217.** $]2\pi n+\arcsin\frac{1}{8};\ \frac{\pi}{6}+2\pi n[\cup]2\pi n+\frac{5\pi}{6};\ 2\pi n+\pi-\arcsin\frac{1}{8}[\cup]2\pi n-\frac{\pi}{6};\ 2\pi n[\cup]-\pi+2\pi n;\ -5\pi/6+2\pi n[$, $n\in Z$. **9.218.** $]0,8;\ 1[$.

9.219. $]0;1[\cup]1;2[$. **9.220.** $]-\infty;-2]\cup[-1;\ \frac{\sqrt{13}-1}{6}]$. **9.222.** $]-3;\ 6[$. **9.223.** $]1;\ 2[$. **9.224.** $]-5;\ -7\pi/6]\cup[\pi/6;\ 5\pi/6]$ **9.226.** $]-2,\ 4[$. **9.234.** $]\pi/2;\ 3[$. **9.236.** $]3;\ \infty[$. **9.237.** $]\log_4 13;\ 2]$. **9.238.** $]\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n]$, $n\in Z$. **9.239.** $]\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n[\cup]3\pi/2+2\pi n;\ 5\pi/3+2\pi n[$, $n\in Z$. **9.240.** $]\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n[\cup[2\pi n-\frac{3\pi}{4};\ 2\pi n-\frac{\pi}{4}[$, $n\in Z$. **9.241.** $]\pi n-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}+\pi n[$, $n\in Z$. **9.242.** $]\log_9 7;\ 1[\cup]1;\ \infty[$. **9.243.** $\{-5;\ 1\}$. **9.244.** $[0,5;\ 1[$. **9.245.** $[1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt[5]{4}[\cup]1;\ \sqrt{2}]$. **9.246.** $]-3;\ -1[$. **9.247.** $]-\infty;\ \log_4(\sqrt{3}-1)[\cup]1,5;\ \infty[$. **9.248.** $]\log_3\frac{28}{27};\ \log_3 4[$. **9.249.** Если $0<p<1$, то $]p;\ 1[\cup]1/p;\ \infty[$; если $p>1$, то $]1/p;\ 1[$. **9.250.** $]-\infty;\ -1[\cup]0;\ 1[\cup]1;\ -\infty[$. **9.251.** $]-\infty;\ 3[$. **9.252.** $]2;\ \infty[$. **9.253.** $]0;\ 1[\cup]\frac{\sqrt{5}+1}{2};\ 2[$. **9.254.** $]-\infty;\ -11[$. **9.255.** $]\frac{\sqrt{21}-3}{2};\ 1[\cup]1;\ \infty]$. **9.256.** $]-\infty;\ 0[\cup]6;\ \infty[$. **9.257.** $[-2;\ 0[\cup]0;\ 2]$. **9.258.** $]5;\ \infty[$. **9.259.** $]-\infty,\ \sqrt[3]{2}[\cup]\sqrt[3]{2};\ \infty[$ **9.260.** $]-\infty.\ -2[\cup]0;\ 1[\cup]1;\ \infty[$. **9.261.** $]-\infty;\ \frac{\sqrt{17}+1}{4}]$ **9.262.** $[5;\ \infty[$. **9.263.** $]-\infty;\ -0,5[\cup]1;\ \infty[$. **9.264.** $]\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n]$, $n\in Z$. **9.265.** $]-1;\ 0[\cup]0;\ 1[\cup]1;\ 2[$. **9.266.** $]2/3;\ 1[\cup]2;\ 6[$. **9.267.** $]3;\ \infty[$. **9.268.** $]-\infty;\ 0[\cup]5;\ \infty[$. **9.269.** $]-1;\ 0[\cup]1;\ \infty[$. **9.270.** $]0,\ 1[\cup[4/3;\ 4[$. **9.271.** $]3;\ 9[$. **9.272.** $[-1,\ -1/\sqrt{2}]\cup[1/\sqrt{2},\ 1]$.

9.273. $[0;\ 16]$, 9.274. $]-2;\ -1] \cup [-0{,}5;\ 0]$. 9.275. $]-5;\ -2[\cup]2;\ 3[\cup]3;\ 5[$. 9.276. $]\frac{2}{5}\pi n - \frac{\pi}{10};\ \frac{2}{5}\pi n - \frac{\pi}{30}[\cup]\frac{2}{5}\pi n + \frac{\pi}{10};\ \frac{2}{5}\pi n + \frac{7\pi}{30}[$, $n \in Z$. 9.277. $]180^\circ n;\ 78^\circ + 180^\circ n[\cup]156^\circ + 180^\circ n;\ 168^\circ + 180^\circ n[$, $n \in Z$. 9.278. $]-\infty;\ -1[\cup]5;\ \infty[$. 9.279. $]0;\ a^2[\cup]1;\ \infty[$. 9.280. $]0;\ 3^{\overline{\log_5 7 - \log_7 3}}[$. 9.281. $]0;\ a[\cup]1/a^4;\ \infty[$. 9.282. $]-2;\ -1] \cup [-2/3;\ 1/3[$. 9.283. $]\sqrt[5]{5};\ 5[$. 9.284. $]0;\ 3[$. 9.285. $]\pi n;\ \frac{2\pi}{9} + \pi n[\cup]\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{5\pi}{9} + \pi n[\cup]\pi n - \frac{\pi}{3};\ \pi n - \frac{\pi}{9}[$, $n \in Z$. 9.286. $]\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}[$, $n \in Z$. 9.287. $]-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n[\cup]\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n[\cup]\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n]$, $n \in Z$. 9.288. $]\frac{\pi n}{8},\ \frac{\pi}{48}(1+6n)[$, $n \in Z$. 9.289. $]\pi n - \frac{\pi}{8};\ \pi n[\cup]\frac{\pi}{8} + \pi n;\ \frac{3\pi}{8} + \pi n[\cup]\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{5\pi}{8} + \pi n[$, $n \in Z$. 9.290. $]360^\circ n - 95^\circ;\ 360^\circ n - 10^\circ[\cup]85^\circ + 360^\circ n;\ 180^\circ + 360^\circ n[$, $n \in Z$. 9.292. $[\pi n - \frac{7\pi}{12};\ \pi n - \frac{\pi}{2}[\cup]\pi n - \frac{\pi}{2};\ \pi n + \frac{\pi}{12}]$, $n \in Z$. 9.295. $]\frac{\pi}{18}(12n-7);\ \frac{\pi}{18} \times (12n+1)[$, $n \in Z$. 9.296. $]\frac{\pi}{3}(6n-1),\ \frac{\pi}{3}(6n+1)[$, $n \in Z$. 9.297. $x \neq \frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n \in Z$. **[9.301.]** $]-\sqrt{12};\ -2[\cup]2;\ \sqrt{12}[$. **[9.302.]** 3. **[9.303.]** $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$. **[9.304.]** $[-1/3;\ 0[\cup]0;\ 1]$. **[9.305.]** $]2;\ 3[$.

Глава 10

10.001. 8 и 15 см. **10.002.** $8\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5}$ см. **10.003.** 10,625 см. **10.004.** $\sqrt{2n(m+n)}$, $\sqrt{4m^2+6mn+2n^2}$. **10.005.** $\frac{4ab}{a+b}$. **10.006.** 1,5 см. **10.007.** 9 и 25 см. **10.008.** $\sqrt{10}$ см **10.009.** 8/3, 25/3 и 5 см. **10.010.** $12\sqrt{3}$ и 36 см. **10.011.** 6 см. **10.012.** 13 см. **10.013.** 8 и 10 см. **10.014.** 6,25 см. **[10.016.]** $R(\sqrt{2}-1)$. **10.017.** 12 и 6 см. **10.020.** 7,5 см. **10.021.** m, $m\sqrt{3}$, $2m$. **10.022.** 60°, 30°. **10.023.** $1{,}6R\sqrt{2}$. **10.025.** $r(\sqrt{6}+\sqrt{2})/2$, $r(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$ **10.026.** 6 см. **10.027.** $2r^2(2\sqrt{3}+3)$. **10.029.** $a(3+\sqrt{3})/6$, $a(3-\sqrt{3})/6$. **10.030.** $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/2$. **10.031.** $8\sqrt{3}/3$ **10.032.** 4 см. **10.033.** 3 см. **10.034.** 9 см. **10.036.** $9{,}9\sqrt{3}$ и 18 см. **10.038.** 15 и 30 см. **10.039.** 4,8,

$2\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$ см. **[10.040.]** α, $180°-\alpha$. **10.041.** 12, 10 и $2\sqrt{91}$ см. **10.042.** 2 см **10.043.** 3/4. **10.045.** 2, $\sqrt{2}$. **10.046.** 65/18. **10.048.** $3r$. **10.049.** 42 и 56 см. **10.050.** 29/4 см **10.051.** 2 см. **10.052.** $a\left(2-\sqrt{2}\right)$. **[10.055.]** 1) $\hat{A}=\hat{B}$; 2) $\hat{A}+\hat{B}=120°$ **[10.057.]** Средняя линия треугольника, параллельная основанию. **10.059.** $r/8$. **10.060.** 6 и 8 см. **10.061.** 10, 17, 21 и $\sqrt{337}$ см. **10.062.** 12 и 20 см **10.063.** $\frac{5}{6}\sqrt{m^2+n^2}$, $\frac{5}{4}\sqrt{m^2+n^2}$. **10.064.** 3, 4 и 5 см. **10.065.** $6r\sqrt{3}$.

10.066. 5 см. **[10.067.]** $\hat{C}=75°$. **10.069.** 18, 24 и 30 см. **10.070.** $\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$. **[10.071.]** $a^2+b^2=2c^2$. **10.072.** 10 см. **[10.073.]** Объединение хорды AB, перпендикулярного к ней диаметра и дуги окружности AOB. **10.074.** 6 см. **10.075.** 1 см. **10.076.** $\sqrt{2}-1$. **10.077.** 6 см. **10.078.** $\sqrt{5}$ см **10.079.** $9\sqrt{5}$ и $8\sqrt{10}$ см. **10.081.** $3\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[4]{27}$ см. **10.082.** $\sqrt{2S}/4$. **10.083.** $\sqrt{m^2-4S}/2$. **[10.084.]** 9 точек. **10.085.** $5R^2$. **10.086.** В 64 раза. **10.087.** 9/4 кв. ед. **10.088.** $3R^2\sqrt{3}/4$. **10.089.** $285{,}61\pi$. **10.090.** 1700 см^2. **10.091.** $\pi a^2/12$. **10.092.** $R^2\sqrt{3}/4$. **10.093.** $\pi(p-c)^2$. **10.094.** 25π м^2 **10.095.** 5, 6 и 4 см. **10.096.** 8 см. **10.097.** $\sqrt{3}$ см. **10.098.** В отношении $\left(\sqrt{6}+2\right):1$ или $\left(\sqrt{3}+1\right):2$. **10.099.** $4+2\sqrt{3}$, $4-2\sqrt{3}$ и 4 см. **10.100.** 120 см^2. **10.101.** $a^2\left(2\sqrt{3}-3\right)$. **10.102.** 96 см^2. **10.103.** 64π см^2. **10.104.** 25π см^2. **10.105.** $2\left(7+4\sqrt{3}\right)$ см **10.106.** $c^2/2$. **10.107.** $4/\left(\sqrt{3}+1\right)^2$. **10.108.** $3a^2\left(7-4\sqrt{3}\right)$ **10.109.** $a^2\left(3+\sqrt{3}\right)$ **10.110.** $2a^2\left(\sqrt{2}-1\right)$. **10.111.** $2a^2/3$. **10.112.** $8:3\sqrt{3}:6\sqrt{3}$. **10.113.** $a^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)/36$. **10.114.** $a^2(\pi-2)/8$. **10.115.** $R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)/6$. **10.116.** $\pi R^2\left(3+2\sqrt{2}\right)$ **10.117.** 48 см. **10.118.** $\sqrt{\frac{S(m^2+n^2)}{2mn}}$ **10.119.** $\frac{mnp^2}{2(m^2+n^2)}$. **10.120.** $5R^2\sqrt{3}/4$ **10.121.** $(4a+b)\,b\sqrt{3}/8$ **[10.122.]** Искомое множество есть разность объединения и пересечения кругов с диаметрами OA и OB. **10.123.** $\sqrt{2S}$. **[10.125.]** $R^2\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{3}/4\right)$. **10.126.** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3\sqrt{3}+\pi}$. **10.127.** $a^2\sqrt{3}/8$. **10.128.** $a^2\sqrt{3}$.

10.129. $2\sqrt{mn}\,(m+n)$. **10.130.** 16 см^2. **10.131.** $8Q/\pi$. **10.132.** 2:3. **10.133.** $27a^2\sqrt{3}/8$. **10.134.** 1024 см^2. **10.135.** 282,24 см^2 **10.136.** 54 см^2. **10.137.** πab. **10.138.** $r^2\left(2\sqrt{3}-\pi\right)/2$. **10.139.** $[\pi(a^2+b^2)-4ab]/8$. **10.141.** 5 см. **10.142.** 2:1. **10.143.** 3:1. **10.144.** 2,2 и 4 м^2 **10.145.** 150 см^2. **[10.146.]** $9R^2/4$. **[10.147.]** $R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)/6$ **10.148.** $h^2\sqrt{3}$.

10.149. $R^2(\pi-2)/4$. **10.150.** $\dfrac{c_1^2-c_2^2}{4\pi}$. **10.151.** $\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$. **10.152.** $\pi a^2/4$. **10.153.** $R\sqrt{1/3}$, $R\sqrt{2/3}$, R. **10.154.** $\sqrt{\dfrac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$. **10.155.** $(\pi+\sqrt{3})R^2/2$. **10.156.** $R^2\sqrt{3}/2$. **10.157.** 9. **10.158.** 84 см². **10.159.** $\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$. **10.160.** 24 и 30 м. **10.161.** 8,64 и 15,36 м². **10.162.** 75 см². **10.163.** $(65/32)^2$. **10.164.** 32 см². **10.165.** $\pi a^2/4$. **10.166.** 60 см². **10.169.** $R\left(\sqrt{4+\pi}\pm\sqrt{4-\pi}\right)/2$. **10.170.** $\pi\left(\dfrac{Ra}{R+a}\right)^2$. **10.171.** $(a^2-b^2)\left(\sqrt{3}-1\right)/4$. **10.172.** 4. **10.173.** $\pi\dfrac{a^2b^2c^2}{16S^2}$. **10.174.** $\sqrt{2S}/4$. **10.175.** $a^2\sqrt{3}/12$. **10.178.** $2mn/\sqrt{4m^2-n^2}$, $2m^2/\sqrt{4m^2-n^2}$. **10.179.** $R\sqrt{2\pi/\sqrt{3}}$. **10.180.** 168 см². **10.181.** $3a^2/8$. **10.182.** $a^2/25$. **10.184.** 450 см². **10.185.** 25. **10.186.** 13 см. **10.187.** $H^2\sqrt{3}$. **10.188.** $15a^2/32$. **10.189.** 1. **10.190.** $27\pi a^2/160$ или $3\pi b^2/40$ или $27\pi c^2/640$. **10.191.** $36/\sqrt{10}$, $12/\sqrt{10}$, $18/\sqrt{10}$ и $3\sqrt{10}$ см. **10.192.** $14\pi+12\sqrt{3}$. **19.193.** 20 и 10 см или 5 и 40 см. **10.195.** 17 см. **10.197.** 3/2, 8/3 и 25/6 см. **10.198.** 14, 12,5, 29,4 и 16,9 см. **10.199.** $4{,}5\sqrt{41}/4$ см. **10.200.** $m(p+q)/q$, $m(p+q)/p$, $p+q$. **10.201.** 2:1. **10.203.** 83/8 см. **10.204.** 6,25 см. **10.205.** 20, 12,5, 5 и 12,5 см. **10.206.** 5,5 и 6 см. **10.207.** 84/13 и 72/13 см. **10.208.** 6 и $2\sqrt{3}$ см. **10.209.** 120/17. **10.210.** $5\sqrt{2}$. **10.211.** 5 см **10.212.** 15 и 20 см. **10.213.** 12π. **10.214.** $4\sqrt{3}+6$, $6\sqrt{3}+12$. **10.215.** 10. **10.216.** 8. **10.217.** Трапеция равнобедренная, боковая сторона равна средней линии. **10.218.** 6 см **10.221.** $2\sqrt{5}$ см **10.222.** $2R^2/\sqrt{Rr}$. **10.223.** 15, 20 и 25 см. **10.224.** 6 см. **10.225.** $\pi/2$. **10.226.** 6, 8 и 10 см. **10.227** $b+c+d$. **10.228.** $15\sqrt{11}/11$ см. **10.229.** 9, 9 и $6\sqrt{2}$ см **10.230.** 26 и 30 см. **10.231.** $4r$, $10r/3$, $2r$. **10.232.** $4\sqrt{2}$ и 18 см **10.233.** $h\sqrt{3}/3$. **10.234.** 1 и 17 см. **10.235.** $m\left(\sqrt{5}+1\right)/2$, m. **10.236.** $2\sqrt{5}$, $5+\sqrt{5}$. **[10.237.]** pq **10.238.** 1/3, 2/3. **10.239.** $\sqrt{10}$ см **10.240.** 28/3 см **10.241.** $\dfrac{bm}{b-m}$ **10.242.** 4,8. **10.243.** $14\sqrt{3}/3$ см **10.244.** 7, 24 и 25 см. **10.245.** $\dfrac{ar}{a-r}$, $\dfrac{a^2r}{(a-r)^2}$. **10.246.** $18\sqrt{5}/5$ см **10.247.** $2a\sqrt{7}$. **10.248.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$. **10.252.** 3:1, 3:2 2:1 **10.253.** 130 см. **10.254.** $a\sqrt{3}/2$ **10.255.** 8 см. **10.256.** 3 см **10.257.** $\sqrt{a^2-ab+b^2}$. **10.258.** 5,8 см. **10.259.** 3 см. **10.260.** 5 см **10.261.** 1:2. **10.262.** $\dfrac{2r^2}{h-2r}$. **10.266.** $\sqrt{(a^2+b^2)/5}$. **10.268.** В середине отрезка AB. **10.270.** 3:4. **10.271.** 150 см². **10.273.** $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{Q/q}}$, $\sqrt{2(Q+q)\sqrt{q/Q}}$. **10.275.** Прямоугольный. **10.276.** 50 см. **10.277.** $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **10.278.** $a\sqrt{3}$, $5a\sqrt{3}/6$, $5a\sqrt{3}/6$. **10.279.** 20 см². **10.280.** 30°, 30°, 120°. **10.281.** 3 см. **10.282.** 1:2. **10.283.** 2 см. **10.284.** $R^2\sqrt{3}\left(6\sqrt{3}-4\right)/3$. **10.285.** $R^2\left(\pi+\sqrt{3}\right)/2$. **10.286.** $r^2\left(4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi\right)$. **10.287.** $\left(3+\sqrt{3}\right)$ см². **10.288.** $12\sqrt{5}$ см². **10.289.** $3a^2\sqrt{3}/16$.

10.290. $\frac{\pi R^2r^2}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)^4}$. **10.291.** 3,6 см². **10.292.** $2R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)/3$.

10.293. $8R^3/a$. **10.294.** $\frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$. **10.295.** $100\pi/9$ см². **10.296.** r^2+2Rr. **10.297.** $\frac{(m+n)^2}{mn}$. **10.298.** $\frac{3\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{4\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)^2}\cdot p^2$. **10.299.** $5\pi R^2/36$.

10.300. $a^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)/18$. **10.301.** 10:1. **10.302.** $2S$. **10.305.** Медиана стороны AC. **10.306.** $R^2\left(3+\sqrt{2}\right)/4$. **10.307.** $65\pi a^2/4$. **10.308.** $3a^2/2$. **10.309.** 8, 8, $8+4\sqrt{3}$ и $8-4\sqrt{3}$ см. **10.310.** 100π см². **10.311.** $25/(6\pi)$. **10.312.** $R^2\left(\pi-\sqrt{3}\right)$. **10.313.** $R^2\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)/6$. **10.314.** 4,32 см². **10.315.** $15\sqrt{7}/4$ см². **10.316.** $200/3$ см². **10.317.** 9 см². **10.318.** $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$ **10.319.** a. **10.320.** 3/4. **10.321.** 8 см². **10.323.** 8 см или 6 см. **10.324.** $8/\sqrt{3}$, $26\sqrt{3}$ и $30\sqrt{3}$ см. **10.325.** 288 см². **10.326.** 16 м². **10.327.** $\sqrt{15}/2$ см². **10.328.** 2,16, 3 и 0,84 см². **10.329.** 14 см². **10.331.** $(b-a)^2/2$.

10.332. $\frac{p^2-m^2}{p}$, $\frac{p^2+m^2\pm\sqrt{(p^2+m^2)^2-8m^2p^2}}{2p}$. **10.333.** 96 и 156 см. **10.334.** $a^2(\pi-2)/2$. **10.335.** 14 см. **10.336.** $\left(5\pi-6\sqrt{3}\right)/18$. **10.337.** $a^2\left(2\sqrt{3}-6\pi+3\pi\sqrt{3}\right)/8$. **10.338.** $3R^2\left(2\sqrt{3}-\pi\right)/2$. **10.339.** $2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$ см². **10.340.** $8R^2\sqrt{3}/3$. **10.341.** $0{,}5c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}$. **[10.342.]** 45°, 135° **10.343.** 235,2 см². **10.344.** 9,6 см². **10.345.** 24 см. **10.346.** В 9 раз **[10.347.]** $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$, $\frac{c+a}{b}$. **10.348.** 120 см². **10.349.** $2R^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.

10.350. $2S/5$. **10.351.** 16,9 см. **10.352.** $\sqrt{3}$ **10.353.** В 2,56 раза. **10.354.** $\left(9\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)/8$ см² $\approx 3{,}4$ см². **10.355.** $4\sqrt{3}/3$ и $\left(9-5\sqrt{3}\right)/3$. **10.357.** 80 см². **10.358.** $a\cdot\frac{3a-b}{a+b}$ при $b<a<3b$,

$a\cdot\frac{a-3b}{a+b}$ при $a>3b$. **10.359.** 2,4 см. **10.360.** 12 и 16. **10.361.** 10 см. **10.362.** $\frac{2r+m\pm\sqrt{m^2-4r(r+m)}}{2}$, $r\leqslant m\left(\sqrt{2}-1\right)/2$. **10.363.** 18 см. **10.364.** $\frac{2mn}{m+2n}$ см, $\frac{n(m+n)}{m+2n}$ см. **10.365.** 30°, 60°. **10.366.** 20/3 и 15/4 см. **10.367.** $R\left(\sqrt{5}-1\right)/2$. **10.368.** 10 см. **10.369.** 6 см или 4 см. **[10.370.]** $\hat{A}+\hat{B}=90°$, $|\hat{A}-\hat{B}|=90°$. **10.371.** $a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_2^2+2m_3^2-m_1^2}$, $b=\frac{2}{3}\sqrt{2m_1^2+2m_3^2-m_2^2}$, $c=\frac{2}{3}\sqrt{2m_1^2+2m_2^2-m_3^2}$. **10.372.** n см. **10.373.** 16 см. **[10.375.]** $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$. **[10.376.]** $|MN|=\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. **10.377.** 8, 4 и 6 см. **10.378.** $\frac{2Rr}{R+r}$. **10.379.** m. **10.386.** 3 и 4. **10.387.** 45°, 45°, 90°. **10.388.** $AB=AC=a\sqrt{2}/2$. **10.389.** 175/48 см. **10.390.** 33/4 см. **10.391.** 6 см. **10.392.** $R^2\left(8\sqrt{3}-9\right)/4$. **10.393.** $R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)/3$, $R^2\left(2\sqrt{3}-\pi\right)/6$. **10.395.** $a^2\left(3-3\sqrt{3}+\pi\right)/3$. **10.396.** $R^2\left(6\sqrt{3}-3\pi\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)/2$. **10.397.** $2R^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)/9$. **10.398.** $R^2\left(3-2\sqrt{2}\right)(4-\pi)$ **10.399.** $a^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)/18$. **10.400.** $\frac{l(a+b)}{4ab}\times\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$. **10.401.** $\sqrt{\frac{Q}{\pi-3}}$. **10.402.** $\pi R^2/6$. **10.403.** $2R^2/5$. **10.405.** $a\sqrt{3}(a-2b)/12$. **10.406.** Rp. **10.407.** 3:7. **10.408.** 125 см². **10.409.** Отрезок прямой внутри угла должен делиться в данной точке пополам. **10.410.** $a\sqrt{mn}\left(\frac{m+a-n}{a-n}\right)$. **10.411.** $\left(2\sqrt{3}-3\right)S$. **10.412.** r, $4r/3$, $5r/3$. **10.415.** $\frac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(a-b+c+d)(a-b+d-c)\times(c+a-b-d)(c-a+b+d)}$. **10.416.**

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\times\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)}}.$$

10.417. 5. **10.418.** 2/3. **10.419.** $3136\pi/81$ см². **10.420.** $\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{6}}{6}$ и $5a+2a\sqrt{6}$ или $\frac{a}{2}-\frac{a\sqrt{6}}{6}$ и $5a-2a\sqrt{6}$. **10.421.** $\approx 7{,}19$ см. **10.422.**

$\frac{2}{15}\sqrt{(4a^2-b^2)(4b^2-a^2)}$. **10.424.** 11/3 см². **10.425.** $S\left(1-\frac{3m^2}{(2m+n)^2}\right)$.
10.426. $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$. **10.427.** 1,6 см². **10.428.** $\frac{a^2\sqrt{6}\left(2-\sqrt{3}\right)}{12\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. **10.429.**
50 см². **10.430.** $180\sqrt{3}/19$ см². **10.432.** p^2. **10.433.** $\sqrt{42}$, $\sqrt{33}$.
[10.434.] $(ad+bc):(ab+cd)$. **10.435.** Боковую сторону.

Глава 11

11.001. $c^3\sqrt{3}/48$. **11.002.** $R^3\sqrt{6}/4$. **11.003.** $a^2/24$, $a^2\sqrt{3}\,(1+\sqrt{2})/4$. **11.004.** $Sd/2$. **11.005.** $\sqrt{3}$. **11.006.** 144 см³. **11.007.** 3. **11.008.** $ab\sqrt{6ab}/2$. **11.009.** $6V$. **11.010.** $a^2\left(\sqrt{5}+1\right)$. **11.011.** $3l^3/16$. **11.012.** $a^2\left(1+\sqrt{7}\right)/2$, $a^3\sqrt{3}/12$. **11.013.** $2a^2$. **11.014.** $3h^2\sqrt{3}/2$. **11.015.** $3a^2\sqrt{3}/4$. **11.016.** $b^3\sqrt{3}/24$. **11.017.** $\sqrt{47}/24$. **11.018.** $a^2b\sqrt{3}/12$. **11.019.** $(l^2-h^2)\,h\sqrt{3}/4$. **11.020.** $18\sqrt{2}$ дм². **11.021.** 60,375 см³. **11.022.** $a^3\sqrt{2}$. **11.023.** 26,25 дм². **11.024.** $(a^3-b^3)\times\times\sqrt{2}/6$. **11.025.** $(a^3-b^3)\sqrt{3}/12$. **11.026.** $2Q\sqrt{2}$. **11.027.** $2S\sqrt{S}/3$. **11.028.** $8r^3\sqrt{3}/3$, $24r^2$. **11.029.** $a^3/24$, $a^2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)/4$. **11.030.** $4\sqrt{3}$ см³. **11.031.** $a^3/6$, $a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$. **11.032.** 108 см³. **11.033.** $21\sqrt{55}$ см³, 84 см². **11.034.** $\frac{3d^3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}}$. **11.035.** $2d^3\sqrt{2}$. **11.036.** $a^3\sqrt{2}/3$. **11.037.** $a^2\left(4+\sqrt{3}\right)$. **11.038.** $2a^2+2a\sqrt{4b^2+a^2}$. **11.039.** $a^2\sqrt{3}$. **11.040.** 6 см³. **11.041.** $l^3\sqrt{2}/8$. **11.042.** 872 см³. **11.043.** $\sqrt{S_1S_2Q/2}$. **11.044.** $l^3\sqrt{3}/12$. **11.045.** $9d^2/64$. **11.046.** $ab\sqrt{3a^2-b^2}$. **11.047.** $2(a+b)\sqrt{3(a^2+b^2)}$. **11.048.** $3a^3/8$. **11.049.** $a^3/8$. **11.050.** $\frac{3}{2}\sqrt{(l^2-h^2)(3l^2+h^2)}$. **11.051.** $3d^3\sqrt{3}$. **11.052.** $\frac{6Q}{\sqrt{3}}+$ $+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **11.053.** $\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$. **11.054.** $\frac{mnc^2\sqrt{4b^2-c^2}}{12(m^2+n^2)}$. **11.055.** $3a^2/2$. **11.056.** $2\sqrt{P^2+Q^2}$. **11.057.** $\frac{mnpd^3}{(m^2+n^2+p^2)^{3/2}}$. **11.058.** $\frac{\sqrt{3}}{27}h^2\times\times\sqrt{9m^2-h^2}$. **11.059.** $\frac{1}{4l}\sqrt{(M+N+P)(M+N-P)(M+P-N)\times(N+P-M)}$. **11.060.** $2P+\frac{4V}{\sqrt{P}}$. **11.061.** $6h^2$. **11.062.** $l^3\sqrt{2}/12$, $l^2(2+\sqrt{2}/2$. **11.063.** $3a^2$ $a^3\sqrt{3}/6$. **11.064.** $h^3\sqrt{3}/2$. **11.065.** $S\sqrt{3}$. **11.066.** $a^3\sqrt{2}/12$. **11.067.** $18\sqrt{3}$ см³. **11.068.** $3a^2$

$a^3\sqrt{2}/3$. **11.069.** $Q\sqrt{\dfrac{Q}{3}}$. **11.070.** $\dfrac{abS}{4(a+b)}$. **11.071.** $\dfrac{3\sqrt{1833}}{47}$.
11.072. $\dfrac{mn}{m^2+n^2}\cdot Q\sqrt{Q}$. **11.073.** 3 см. **11.074.** 75,85 м³. **11.076.** $\sqrt{5}/5$.
11.077. $Sr/3$. **11.078.** $V=CS$. **11.080.** $2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)a^2$, $2\pi a^3/3$. **11.081.** $\pi R:p$. **11.082.** $1152\pi/125$. **11.083.** $4\pi h^3/81$. **11.084.** $\pi R^2\sqrt{5}$. **11.085.** $N\sqrt{\pi M}/2$, $\pi N+2M$. **11.086.** 24π. **11.088.** 3:2:1. **11.089.** $\pi R^3\sqrt{15}/3$. **11.090.** $4\pi Q$. **11.091.** 600π см², 1000π см³. **11.092.** 216π дм², 448π дм³.
11.093. $S:s=\pi:2$, $V:v=\pi\sqrt{3}:2$. **11.094.** $s:S=v:V=4:9$. **11.095.** $64\pi:27$. **11.096.** $\pi(R^2+h^2)^2/h^2$. **11.097.** 9/16. **11.098.** $\dfrac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$.
11.099. $4\pi\sqrt{3}$ см², 2π см³. **11.100.** $\dfrac{7}{27}V$. **11.101.** $\dfrac{3S}{8\pi}\sqrt{3\pi S}$.
11.102. 8 м². **11.103.** $2R\sqrt[3]{4}$. **11.104.** $a^3\sqrt{2}/18$. **11.106.** $9a^3\sqrt{11}/4$.
11.107. $32/\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **11.108.** 515 дм³. **11.109.** $a^3\sqrt{1+\sqrt{5}}/6$.
11.110. $17\sqrt{3}+\sqrt{6}$ см². **11.111.** $4S$. **11.112.** $m^2\left(4\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)/6$, $m^3\sqrt[4]{3}/6$. **11.113.** 260 дм², 312 дм³. **11.114.** 1900 м³. **11.115.** $\dfrac{S_1+S_2}{2}h$.
11.116. 12 см³. **11.117.** 906 см². **11.118.** $a^3\sqrt{3}/2$, $a^2\left(1+2\sqrt{3}+\sqrt{13}\right)$.
11.119. $\dfrac{a^3b}{12\sqrt{3a^2-4b^2}}$. **11.120.** $2\sqrt{6}/\pi^3$. **11.121.** $\sqrt{6}$. **11.122.** 37/27 см³, 152/27 см³. **11.123.** $8Q\sqrt{3}/3$. **11.124.** $a^3\left(\sqrt{2}-1\right)/8$.
11.125. $a^2\sqrt{3}\left(\sqrt{13}+2\right)/3$. **11.126.** $3a^3/4$, $3a^2\sqrt{6}/2$. **11.127.** $7a^3\left(\sqrt{2}-1\right)/3$. **11.128.** $3a^2/4$, $a^3\sqrt{2}/32$. **11.129.** $10\sqrt{19}$ см².
11.130. $1:\sqrt{2}$. **11.131.** $ab\sqrt{12a^2-3b^2}/8$. **11.132.** $S\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{27}/9$.
11.133. $a^2\sqrt{3}\left(2+\sqrt{5}\right)/4$. **11.134.** $a^3/128$. **11.135.** $(a^3-b^3)\sqrt{2}/6$.
11.136. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\dfrac{3(2n+m)}{m}}\right)$. **11.137.** $144\sqrt{3}/5$. **11.138.** 192 см². **11.139.** $\sqrt{3}\left(2\sqrt{2}+3\right):6$. **11.140.** $d^3\sqrt{2}/3$. **11.141.** $4m^2\sqrt{3}$
11.142. $S\sqrt{S}\sqrt[4]{6}/2$. **11.143.** $a^3\left(27\sqrt{2}-22\sqrt{3}\right)/2$. **11.144.** $c^3/32$.
11.145. $abc\sqrt{2}/3$. **11.146.** $a^2\left(6+3\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)/2$. **11.147.** $8\left(11+\sqrt{34}\right)$ м². **11.148.** $\dfrac{VS_2\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2}-S_1\sqrt{S_1}}$. **11.149.** 12 дм³. **11.150.** 1,9.
11.151. $a^3/2$. **11.152.** 9:1, 27:1. **11.153.** 3:4. **11.154.** $3al+a^2\sqrt{3}$.
11.155. $ab\left(\sqrt{2}+1\right)$. **11.157.** $\dfrac{ab(a^2+b^2+ab)}{3(a+b)}$. **11.158.** $a^3\sqrt{2}/12$.

11.159. 200 см³. 11.160. $d_1\sqrt{16Q^2-d_1^2d_2^2}/12$. 11.161. $2PQ/(3a)$. 11.162. $a^2\sqrt{4b^2-2a^2}/12$. 11.163. $2pl+\frac{2l}{h}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $2p=a+b+c$. 11.164. $a^3/8$, $3a^2\sqrt{3}/4$. 11.165. $\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}+\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}+\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$. 11.166. $abc\sqrt{2}/2$. 11.167. $36\sqrt{2}$ куб. ед. 11.168. $S\sqrt{S}/3$. 11.169. $\sqrt{6}$. 11.170. $\frac{18a^3b^3}{(a^2-b^2)\sqrt{4b^2-a^2}}$. 11.171. $\frac{2}{3}R^3\sqrt{\frac{2}{3}}$. 11.172. $27\sqrt{2}/8$ куб. ед.

11.173. $12R^2\sqrt{3}$. 11.174. $21R^3/16$. 11.175. $3ab$. 11.176. $2r^2\left(R+\sqrt{R^2-r^2}\right)/3$ или $2r^2\left(R-\sqrt{R^2-r^2}\right)/3$. 11.177. SL. 11.178. $(1/a):(1/b):(1/c)$. 11.180. $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S^2+4Q^2}{\pi S}}$. 11.181. $\pi S\sqrt{5S}/21$. 11.182. $\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^2R^3}{(\pi^2-1)}$. 11.183. 5:1. 11.184. $\frac{6m-3n}{4n}$. 11.185. $64\pi/9$ см². 11.186. $\pi h^3/24$. 11.187. $\pi a^2/6$. 11.188. πl^2, $2\pi R(l^2-R^2)/3$. 11.189. 3,75 см. 11.190. $\pi R^3\sqrt{2}/6$. 11.191. $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m^2+mn+n^2}{mn}$. 11.192. $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{10\pi+3\sqrt{3}}$. 11.193. $10\pi h^3/9$. 11.194. $2\pi dp$. 11.195. $\pi R^3\sqrt{15}/3$.

11.196. $a^3\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)$. 11.197. $a^3/4$. 11.198. 336 см³, 396 см². 11.199. $m^2n^2/(2l)$. 11.200. 12:113. 11.201. $a^3/12$. 11.202. 3. 11.203. $a^3/6$. 11.204. $\frac{16a^3b^3}{3(a^2-b^2)\sqrt{2b^2-a^2}}$ $\left(b<a<\sqrt{2}\,b\right)$. 11.205. $a^3\sqrt{2}/54$.

11.206. $\frac{\sqrt{9m^2-3a^2+6am}}{a-m}$. 11.207. $2a^3\left(\sqrt{2}-1\right)$. 11.208. $2a^2\sqrt{3}$, $a^3/3$. 11.209. 20,25 см². 11.211. $a^3\sqrt{6}/18$. 11.212. $18d^2$. 11.213. 24 см³. 11.214. $9\sqrt{39}/4$ см³. 11.215. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\times\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. 11.218. $h(2ab+2a_1b_1+ab_1+a_1b)/6$. 11.219. $9a^3/64$.

11.220. $\frac{a+\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$. 11.222. $2\pi a^2$, $a^3\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 11.223. $q^2(2-q)/4$ при $q<2$; при $q\geqslant 2$ задача не имеет решения. 11.224. $\pi R^2\frac{\left(4-\sqrt{7}\right)}{2}$.

11.225. $\pi h^3/l$. 11.226. 12/19 м. 11.227. $\dfrac{2ab^2}{a^2-2b^2+a\sqrt{a^2+4b^2}}$.

11.229. $a^3\left(5+\sqrt{5}\right)/24$. 11.230. $3H^2\sqrt{3}$.

Глава 12

12.001. $\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi+\alpha}{4}\cos\dfrac{\pi-3\alpha}{4}}$. 12.002. $\sin 2\alpha \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. 12.003. $\cos\dfrac{\alpha}{2}:\cos\dfrac{\alpha}{6}$. 12.004. $\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$. 12.005. $h\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. 12.006. $\dfrac{1}{3}\sqrt{S\sin 2\alpha}$.

12.007. $\dfrac{k^2+k+1}{(k+1)^2}$. 12.008. $\dfrac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}$, $\dfrac{a\sin\alpha}{b+a\cos\alpha}$. 12.009. $\dfrac{a\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ+\dfrac{3\alpha}{4}\right)}$.

12.010. $\dfrac{8R}{\sin\alpha}$. 12.012. $\arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$. 12.013. $\dfrac{1}{2k}$ 12.014. $\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$. 12.015. $\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. 12.016. $\dfrac{\sqrt{h_1^2+h_2^2+2h_1h_2\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

12.017. $2d\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi(3m+n)}{4(m+n)}$. 12.018. $\arccos\dfrac{k-1}{k}$ и $\pi-\arccos\dfrac{k-1}{k}$; $k>1$. 12.019. $2\sqrt{\dfrac{S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{3}}$. 12.020. $\dfrac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{4}}$.

12.021. $\dfrac{4r\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$. 12.022. $2\arccos\dfrac{(a+b)l}{2ab}$. 12.023. $\dfrac{a}{4}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+9}$.

12.024. $\dfrac{4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$. 12.025. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\alpha-\dfrac{\pi}{2}}$.

12.026. $2\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b\sin\alpha}$ и $\pi-2\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b\sin\alpha}$.

12.027. $\dfrac{4R^2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}$. 12.028. $\dfrac{r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$. 12.029. $\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}\times\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. 12.030. $\dfrac{2\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}$. 12.031. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. 12.032.

$r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi-\alpha}{4} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **12.033.** $\frac{P\sin\alpha}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.034.** $\frac{2\sin 2\alpha\sin^2\alpha}{\pi}$.

12.035. $\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$. **12.037.** $2\cos^2\frac{\alpha}{4}$. **12.038.** 30°. **12.040.** $\frac{h^2\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 16. **12.041.** $\sqrt{b^2+c^2\pm 1{,}2bc}$. **12.042.** $R^2(\alpha+\sin\alpha)$. **12.043.** $\frac{b\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$.

12.044. $2d^2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$. **12.045.** $\frac{1}{3}\pi d^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **12.046.** $\frac{l\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **12.047.** $\frac{7}{54}\pi l^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$. **12.048.** $2\arcsin\frac{\alpha}{2\pi}$.

12.049. $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **12.050.** $\frac{1}{7}$. **12.051.** $\frac{a^2\sin 2\alpha}{2\cos\varphi}$.

12.052. $\frac{\pi}{3}ab(a+b)\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. **12.053.** $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$.

12.054. $\frac{\pi H^3}{12}\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$. **12.055.** $\frac{a^2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. **12.056.** $\frac{8\pi r^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\alpha}$. **12.057.** $\frac{d^3\sin\beta\sin 2\beta\sin 2\alpha}{8}$. **12.058.** $\sqrt[3]{\frac{4V\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\pi}}$. **12.059.** $\arccos\frac{1}{9}$. **12.060.** $\frac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{6}$. **12.061.** $\frac{(a^2-b^2)(a-b)\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta}{8}$. **12.062.** $\sqrt[3]{\frac{2V}{\operatorname{ctg}^2\beta\sin\alpha}}$. **12.063.** $\frac{2h^3\operatorname{tg}^2\alpha\sin\beta}{3}$. **12.064.** $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$. **12.065.** $\frac{\sqrt{3}\,l^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{8}$. **12.066.** $\frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **12.067.** $\frac{1}{8}l^3\sin 2\beta\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **12.068.** $\arcsin\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}$; $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. **12.069.** $\frac{\pi S}{\sin\frac{\pi n}{m+n}}$. **12.070.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **12.071.** $\frac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}$.

12.072. $\frac{H^3}{3}\operatorname{ctg}^2\beta\sin 2\alpha$. **12.073.** $2\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. **12.074.** $1-k$. **12.075.**

$2\operatorname{arctg}\frac{4m}{\pi n}$. 12.076. $\operatorname{arctg}\frac{k}{2\sin\alpha}$. 12.077. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}$.
12.078. $2\arcsin\frac{k}{\sqrt{3}}$; $0<k<\sqrt{3}$. 12.079. $\arcsin\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$. 12.080.
$\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. 12.081. $\operatorname{arcctg}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$. 12.082. $2\operatorname{arctg}(\cos\alpha)$.
12.083. $2\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. 12.084. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 12.085. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.
12.086. $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$. 12.087. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
12.088. $\arcsin\frac{\sqrt{12cV}}{c^2}$. 12.089. $\frac{1}{8}(P^2-4l^2\sin^2\alpha)\,l\cos\alpha$. 12.090.
$\frac{\pi l^3\sin 2\beta\cos\beta}{8\cos^2\alpha}$. 12.091. $2\pi a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$. 12.092. $V\sin^2\frac{\alpha}{4}$.
12.093. $\cos 2\alpha$, считая от основания. 12.094. $V\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.
12.095. $\operatorname{arctg}(2\operatorname{ctg}\alpha)$. 12.096. $\frac{\pi l^3}{12}\sin^3 2\alpha$. 12.097. $\frac{n(a^2-b^2)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{4\cos\alpha}$.
12.098. $\frac{\pi S\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{3\sin^2 2\alpha\cos^3\alpha}$. 12.099. $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$. 12.100.
$\frac{a^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{2}$. 12.101. $\frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. 12.102. $\frac{2V\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\pi}$. 12.103.
$\frac{\sin\alpha}{4\pi\cos\beta\cos^2\frac{\beta}{2}}$. 12.104. $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$. 12.105. $\frac{\pi h^3}{3\sin^2\beta}\Big(\cos^2\beta+$
$+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\Big)$. 12.106. $\frac{3H^2\sqrt{3}\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. 12.107. $\arccos\frac{1}{3}$. 12.108.
$\operatorname{arctg}\frac{2m}{m+n}$. 12.109. $\frac{H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$. 12.110. $\frac{8\sqrt{3}\pi r^2}{3\sin^2\alpha}$. 12.111.
$\frac{a^3\operatorname{ctg}\varphi\sin\alpha\sin\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$. 12.112. $\frac{\pi d^2}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}$. 12.113. $\arccos\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$,
$\arcsin\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$. 12.114. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. 12.115. $\frac{7}{25}$. 12.116. $\frac{aS}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\times$

$\times\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$. 12.117. $\frac{2\sin\alpha}{\pi}$ 12.118. $-\frac{1}{3}$. 12.119. $\frac{\pi r^3\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$.

12.120. $\frac{m^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3}$. 12.121. $\frac{a}{3\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

12.122. $\frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$. 12.123. $\frac{\pi a^3\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}{6\cos^4\frac{\alpha}{2}}$. 12.124. $\frac{d^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

12.125. $\frac{4S\sqrt[4]{3}}{3}\sin\alpha\sqrt{S\cos\alpha}$. 12.126. $\frac{R}{2}\sqrt[3]{\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}}$. 12.127. $\frac{d^2\sin\alpha}{2}$. 12.128. $\frac{3\sqrt{2}\,l^2\sin^2 2\alpha}{8\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. 12.129. $\frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\alpha$. 12.130. $\frac{a^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$. 12.131. $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. 12.132. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\times$ $\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; при $\alpha=\frac{\pi}{4}$. 12.133. $\frac{\sin\alpha}{2\alpha-\sin\alpha}$. 12.134. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha}}{2\sin 2\alpha}$. 12.135. $\frac{2\alpha\cos^4\frac{\pi-\alpha}{4}}{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. 12.136. $\frac{p^2+ap-q^2}{p}$.

12.137. $\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. 12.138. $-\cos 2\alpha$. 12.139. $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$. 12.140. $\frac{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha}$, считая от вершины. 12.141. $\frac{h\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

12.142. $\frac{R^2}{4}$. 12.143. $\frac{1}{13}$. 12.144. $\frac{72}{97}$. 12.145. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}$. 12.146. $\operatorname{arctg}\frac{n\sqrt{3}}{2m+n}$. 12.147. $\frac{7}{18}$. 12.148. $\operatorname{arctg}\frac{3k}{2}$. 12.149. $\frac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$.

12.150. $\frac{1}{k-1}$; $k\geqslant 2$. 12.151. $\frac{\pi}{4}\pm\arcsin\frac{\sqrt{2}\,(k-1)}{2(k+1)}$. 12.152. $\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k^2}$; $\pi-\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k^2}$, $\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k}$.

$\pi-\arcsin\frac{2(1+k)}{\pi k}$; $k>\frac{2}{\pi-2}$. **12.153.** $2R\left(1+\arcsin\frac{r}{R-r}\right)$. **12.154.** $2\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ и $\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. **12.155.** $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}$. **12.156.** $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$. **12.157.** $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}$. **12.158.** $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$. **12.159.** $\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$ и $\pi-\arccos\frac{(p^2+q^2)(n^2-m^2)}{2pq(n^2+m^2)}$. **12.160.** $\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$ и $\pi-\arcsin\frac{4-k^2}{k^2}$; $\sqrt{2}\leqslant k<2$. **12.161.** $\frac{1}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **12.162.** $\frac{R}{2\cos^2\frac{(\pi+2)R-l}{4R}}$. **12.164.** $\frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **12.165.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}$. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}+\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{4S}{a^2}$. **12.166.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3}$ и $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3}$; $0<k\leqslant\frac{3}{4}$. **12.167.** $\frac{R^2\sin\alpha}{8}\left(\sqrt{4-\sin^2\alpha}-\cos\alpha\right)$. **12.168.** $\sqrt{a^2+2ah\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. **12.169.** $3-\sqrt{5}$. **12.170.** $\frac{S\sin(\alpha-\gamma)}{2\sin(\alpha+\gamma)}$. **12.171.** $\frac{3\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$. **12.172.** $\frac{\pi}{2\sin^2\alpha\sin 2\beta}$. **12.173.** $\frac{a\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cos\beta}$. **12.174.** $\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}$. **12.175.** $\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$. **12.176.** $\frac{a}{2}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$. **12.177.** $\sqrt{a^2-b^2}\sin\alpha-b\cos\alpha$. **12.178.** $\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\pi+\alpha}{4}}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.179.** $\frac{4}{5}$. **12.180.** $\frac{5}{13}$. **12.181.** $\arcsin\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$, $\alpha\leqslant 120°$. **12.182.** $\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha}$. **12.183.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **12.184.** $\frac{m}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. **12.185.** $\sqrt{a^2+4S\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. **12.186.** $\frac{\pi}{6}$. **12.187.**

$=\frac{1}{2}S\operatorname{ctg}\alpha\sin 4\alpha$. 12.188. $P_a>P_b>P_c$. 12.189. $\pi-\arcsin\left(\frac{m+n}{2}\times\right.$ $\left.\times\sqrt{\frac{3}{m^2-mn+n^2}}\right)$. 12.190. $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$ и $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{14}$. 12.191. $a(\pi-\alpha-\beta)\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 12.192. $2\arccos\frac{(a+b)\,l}{2ab}$. 12.194. 2. 12.196. $\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\alpha$. 12.197. $\frac{1}{4}\sin 2\alpha\sin 2\beta$. 12.198. $\frac{h}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}$. 12.199. $\frac{\pi a^2}{18}(2-\sqrt{3})$. 12.200. $\frac{a\sin\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. 12.201. $\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin^3 15^\circ}\times$ $\times\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 12.202. $\frac{4}{3}\pi R^3\times$ $\times\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$. 12.203. $\frac{1}{12}a^3\operatorname{tg}\varphi$ и $\frac{a^2}{4}\sqrt{3(4\operatorname{tg}^2\varphi+1)}$. 12.204. $\frac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$. [12.205.] $\frac{a\sqrt{\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{2\sin\alpha}$. 12.206. $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$ и $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{48}$.

12.207. $\frac{9p^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{4\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$. 12.208. $\frac{\sqrt{3}\,p^3\sqrt{(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^3}}{8\operatorname{tg}^2\alpha}$. 12.209. $2h^2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$ и $\frac{h^3}{2}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. 12.210. $\frac{a^3}{8}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 12.211. $\frac{4r^3\operatorname{tg}\beta}{3\sin\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}}$. 12.212. $\frac{b\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}$. 12.213. $\frac{\sqrt{3}\,a^3\sqrt{(4\operatorname{tg}^2\alpha+1)^3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$.

12.214. $\frac{a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{3}$ и $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi}$. 12.215. $\frac{16}{3}S\operatorname{ctg}\alpha\times$ $\times\sqrt{\frac{2S\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\alpha}}$. 12.216. $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. 12.217. $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$. 12.218. $\frac{a^3\sin^2\beta\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{6\sin^2(\alpha+\beta)}$. 12.219. $\frac{4}{5}$. 12.220. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$. 12.221. $\frac{l}{3}\sqrt{5-4\cos 2\alpha}$. 12.222. $2\sqrt{\frac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}}$. 12.223.

$\dfrac{2S}{3\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{S\operatorname{ctg}\beta\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. 12.224. $\dfrac{\sin\alpha}{3}\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}$. 12.225.

$\dfrac{1}{2}H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{1+16\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 12.226. $\dfrac{S\sqrt{2S\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}}{6\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. 12.227.

$\dfrac{2a^2\sin\alpha\cos^2\dfrac{\beta}{2}}{\cos\beta}$. 12.228. $\dfrac{\sqrt{S\sqrt{3}\cos\alpha}}{6\cos\alpha}$. 12.229.

$\dfrac{4na^2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{n}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$. 12.230. $\dfrac{1}{3}\pi R^3\cos^3\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha$. 12.231.

$\dfrac{4\cos\alpha\cos\beta}{\pi(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}$. 12.232. $\dfrac{2\pi}{\sin 2\alpha}$. 12.233. $\dfrac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}$. 12.234.

$\dfrac{a(3+\cos 2\alpha)}{4\sin 2\alpha}$. [12.235.] $\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{5}+1}$. 12.236. $\sin^4\dfrac{\alpha}{4}\left(2+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

12.237. $\dfrac{\pi c^3}{6}\sin 2\alpha\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 12.238. $\arcsin\dfrac{4}{5}$. 12.239. $\dfrac{4-k}{4+k}$,

$0<k<4$. 12.240. $\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2}$; $0<k\leqslant\dfrac{1}{8}$. 12.241.

$\dfrac{6\pi R^2\sin^2 2\alpha}{(1+2\operatorname{ctg}\alpha)^2}$. 12.242. $2\sin^2 2\alpha\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$. 12.243.

$\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}(4\operatorname{ctg}^2\alpha+3)$. 12.244. $-\dfrac{\pi r^3\operatorname{tg}2\alpha}{24\cos^6\alpha}$. 12.245.

$2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}}$; $k>2$. 12.246. $2\operatorname{arcctg}\pi$. 12.247.

$\dfrac{9\sin 2\alpha\cos\alpha}{8\pi\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)}$. 12.248. $2\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$. 12.249.

$\dfrac{\sqrt{2(1+\sin^2\alpha)}\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha\cos\beta}$. 12.250. $\dfrac{\pi\operatorname{tg}\dfrac{\pi+\alpha}{4}}{4\sin\alpha\cos^3\dfrac{\alpha}{2}}$. 12.251.

$\pi-\arccos\dfrac{n^2}{m^2}$. 12.252. $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{k}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}$; $0<k\leqslant 2\sin\dfrac{\pi}{n}$. 12.253.

$\frac{\cos^3\alpha\cos^3\beta}{3\sin\alpha\sin\beta\cos^2(\alpha+\beta)}$. 12.254. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sqrt[3]{6V\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta}$. 12.255. $\frac{l}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta+\cos^4\frac{\alpha}{2}}$. 12.256. $\frac{2}{3}R^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha$. 12.257. $\frac{2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\pi(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)}$. 12.258. $\frac{a^3\sqrt{2}\operatorname{ctg}^2\varphi}{(\operatorname{ctg}\varphi+2\operatorname{ctg}\alpha)^3}$. 12.259. $\frac{a(a-b)\operatorname{tg}\alpha}{3a-b}$. 12.260. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$. 12.261. $\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right)$. 12.262. $\sin(\alpha\pm\beta)\sqrt{\frac{S}{2\sin\alpha\sin 2\beta}}$. 12.263. $\frac{H^3\sqrt{3}}{4\sin^2\alpha}$. 12.264. $\frac{2(m+n)H^2}{m-n}\times$ $\times\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 12.265. $\frac{2\pi a^3}{3\cos\alpha\sin 2\alpha\cos^2\frac{\pi q}{p+q}}$. 12.266. $\arccos(\sqrt{3}-1)$ и $\frac{\pi}{2}-\arccos(\sqrt{3}-1)$. 12.267. $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{\pi}{k}$; $k>\pi$. 12.268. $\frac{H^3\cos\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{2\sin^2\alpha}$. 12.269. $\frac{1}{4}\pi a^2\times$ $\times(3\sin^2\alpha+1)\operatorname{ctg}\alpha$. 12.270. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 12.271. $\frac{l}{2}\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 12.272. $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. 12.273. $\frac{\pi l^3\sin 2\alpha\cos^3\alpha}{8\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. 12.274. $\operatorname{arcctg}\left[\sqrt{2}(k-1)\right]$. 12.275. $\frac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$. 12.276. $\frac{2V\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$. 12.277. $\frac{l^3\sin\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\beta}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}$. 12.278. $\frac{S\operatorname{tg}\beta}{6}\sqrt{S\sin\alpha}$. 12.279. $\sqrt{-k}$; $-1<k<0$. 12.280. $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$. 12.281. $16k^2=1$. 12.282. $\arccos\frac{\sqrt{5}}{30}$. 12.283. $\frac{a^2}{\sqrt{-\cos\alpha}}$. 12.284.

$2\operatorname{arctg}\left(2k\sqrt{3}\right)$. **12.285.** $\dfrac{\arccos\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{\pi-\arccos\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}$. **12.286.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}$.

12.287. $\dfrac{24}{65}$. **12.288.** $\dfrac{3k}{k^2-2}$. **12.289.** $\arccos\dfrac{1}{k-1}$; $k>2$. **12.290.** $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{t^2-2t}\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$. **12.291.** $\dfrac{1+k}{2}$. **12.292.** $2\operatorname{arcctg}(2\cos\alpha)$.

12.293. $\dfrac{a^3\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{2\cos\dfrac{\pi-\alpha}{4}}$. **12.294.** $2a^3\cos^3\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **12.295.** $2r^3\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. **12.296.** $\arccos\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}$. **12.297.** $\dfrac{a\sqrt{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **12.298.** $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$.

12.299. $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$ и $\arcsin(\cos\alpha\sin\beta)$. **12.300.** $\dfrac{1}{4}$. **12.301.** $\dfrac{a^3\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\cos\left(\varphi+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\varphi-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. **12.302.** $S\operatorname{tg}\varphi\times\sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$. **12.303.** $\dfrac{abc}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}}$. **12.304.** $l^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. **12.305.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\alpha}$. **12.306.** $\dfrac{a^2b\sin\alpha}{2(a+b)\cos\beta}$. **12.307.** $l^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. **12.308.** $\dfrac{a^2b}{2}\times\sqrt{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)}$, $\alpha>\dfrac{\pi}{6}$. **12.309.** $\arccos\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}$.

12.310. $\dfrac{R}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\dfrac{3\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{3\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}$. **12.311.** $\dfrac{\pi H^2\cos^4\alpha}{4\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}$.

12.312. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3\cos\dfrac{\alpha}{2}}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\alpha$. **12.313.** $2H\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$.

12.314. $\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-8}}{2}$. **12.315.** $\dfrac{\pi a^3}{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

12.316. $\arcsin\frac{6}{\pi k}$ и $\pi-\arcsin\frac{6}{\pi k}$; $k>\frac{6}{\pi}$. 12.317. $\frac{\pi a^3}{12}\sin^6\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

12.318. $\dfrac{R\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{8}\right)}$. 12.319. $\dfrac{n\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha\sin\frac{2\pi}{n}}{4\pi}$.

[12.320.] $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. 12.321. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}\sin^3 2\alpha}{128\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$. [12.322.]

$\dfrac{\pi l^3\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{3\sin^2\alpha}$. 12.323. $\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3}V^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}}$. 12.324.

$\dfrac{a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$. 12.325. $-\dfrac{b^2\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\cos 3\alpha}$. 12.326. $\pi n^2a^2\sin\frac{\alpha}{2}$.

12.327. $\dfrac{\pi l^3\sin^2 2\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$. 12.328. $\frac{\pi a^3}{6}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-3\operatorname{ctg}\alpha\right)$.

12.329. $8\pi a^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 12.330. $\frac{\sqrt{2}}{12}r^3\times$

$\times\operatorname{tg}\beta\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$. 12.331. $\dfrac{\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. 12.332. $2\sqrt{\dfrac{2S}{\sin 2\alpha}}\times$

$\times\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}$. 12.333. $p^3\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. 12.334.

$8a^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. 12.335. $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\beta\sin^2\beta\sin\alpha$.

12.336. $\dfrac{l\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}}{\cos\frac{\beta}{2}}$. 12.337.

$\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3V\cos\frac{\alpha}{2}}{S}\sqrt{\dfrac{2\sin\alpha}{S}}\right)$. 12.338. $\dfrac{V^2}{V^2+a^6}$. 12.339. $\dfrac{\sin\alpha}{k-\sin\alpha}$.

12.340. $\frac{a}{2}\sqrt{2\cos\alpha}$. 12.341. $\dfrac{4k^2}{4k^2+1}$. 12.342. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 12.343.

$\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 12.344. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ и $\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}$.

12.345. $\dfrac{V}{8\cos^6\dfrac{\alpha}{2}}$. 12.346. $\frac{1}{2}\arcsin\left[2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$ и $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\times$ $\times\arcsin\left[2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$. 12.347. $\arccos\left(-\dfrac{a^4}{S^2}\right)$. 12.348. $\dfrac{a}{6}\sqrt{\dfrac{3\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}}$. 12.349. $\dfrac{23}{26}$. 12.350. $\dfrac{a\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}}$. 12.351. $\operatorname{arctg}\dfrac{2\left(4+\sqrt{6}\right)}{5}$.

12.352. $\operatorname{arctg}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$. 12.353. $\operatorname{arctg} 2$. 12.354. $\dfrac{a^3}{12}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

12.355. $\dfrac{8\pi S\sin^2\dfrac{\alpha}{4}\left(1+\cos^2\dfrac{\alpha}{4}\right)}{\alpha-\sin\alpha}$. 12.356. $\arccos\dfrac{3}{5}$. 12.357. $\arcsin\dfrac{S}{l^2}\pm\dfrac{\pi}{3}$, $\arcsin\dfrac{S}{l^2}$. 12.358. $4R^2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. 12.359. $\arcsin\dfrac{\sqrt{13}-1}{3}$. 12.360. $\dfrac{18\sqrt{7}}{49}l^3\cos^3\alpha\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$. 12.361. $\dfrac{nR^2\operatorname{ctg}^2\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\beta}$. 12.362. $\dfrac{2a^2\sin\beta\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$. 12.363. $\dfrac{2\pi d^3}{\cos\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. 12.364. $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$. 12.365. $\pi R^2\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2 2\alpha$.

12.366. $\dfrac{\pi a^3}{\sin^2\alpha}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)$. 12.367. $\dfrac{2\pi l^3\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{9\sin 2\alpha}$.

12.368. $2a^3\cos^3\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{-2\cos 2\alpha}$. 12.369. $\dfrac{h^3\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\cos\alpha\sin^2\beta}$.

12.370. $\dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sin\alpha}$ и $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{\cos\alpha}$. 12.371. $\dfrac{Ha\sin\alpha}{\sqrt{H^2+a^2\sin^2\alpha}}$.

12.372. $2\arccos\dfrac{1}{\sqrt[4]{4k}}$. 12.373. $\dfrac{3\sqrt{3}\,H^3\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}{8\sin\beta}$.

12.374. $\frac{7}{15}$. 12.375. $\frac{a^3\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\alpha\sin^3\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}$. 12.376. $\frac{\pi a^3\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{24\cos^3\frac{\alpha}{2}}$.

12.377. $\frac{a^3}{3}\sin\alpha\sin^4\frac{\alpha}{2}$. 12.378. $\frac{2}{3}R^3\sin 2\alpha\,(1-\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha)$.

12.379. $\frac{2}{3}\pi R^3\sin 2\alpha\sin 4\alpha$. 12.380. $\arccos\frac{2}{\sqrt{8+\sin^2 2\alpha}}$. 12.381. $-\frac{a^2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$. 12.382. $\sin\beta\sqrt{-\frac{S\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}}$. 12.383. $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

12.384. $\frac{c^3}{36}\sqrt{3\cos^2\alpha+1}\,\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta$. 12.385. $\frac{1}{2}\pi a^3\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 12.386. $\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k+3}\operatorname{tg}\alpha\right)$. 12.387. $\frac{V}{3\pi}\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

12.388. $2\operatorname{arctg}(\cos\alpha)$ и $\pi-2\operatorname{arctg}(\cos\alpha)$. 12.389. $\frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\times\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$. 12.390. $\frac{R\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\pi-\alpha}{4}}$. 12.391. $\sqrt{a^2+b^2+2b\left(\sqrt{a^2-b^2\sin^2\alpha}\cos\alpha+b\sin^2\alpha\right)}$. 12.392. $\frac{4R^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2}$. 12.393. $\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$. 12.394. $4R\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8}$. 12.395. $2\arcsin\frac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$ и $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-2m}}{2}$, $0<m\leqslant\frac{1}{2}$. 12.396. $\arcsin\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\operatorname{tg}\alpha\right)$ и $\pi-\arcsin\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

12.397. $\frac{h}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)$. 12.398. $\frac{d^2}{8}\left[4\cos\frac{\alpha}{2}-\pi\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right]$. 12.399. $\operatorname{arctg}\frac{2ah}{a^2-b^2}$. 12.400. $\frac{H^2}{2}\sin B\cos(A-C)$. 12.401. $\frac{4a^2-b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$. 12.402. $\operatorname{arctg}\frac{a^2-b^2}{4S}$.

12.403. $\arcsin\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$ и $\pi-\arcsin\left(\frac{1}{k}\times\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2}}{2}}\right)$; $k>\sqrt{2}$. 12.404. $3\arccos\frac{2+k}{2k}$ и

$\pi - 3\arccos\frac{2+k}{2k}$. **12.405.** $\frac{4\sqrt{3}\pm 3}{10}$. **12.406.** 3/5 или 1. **12.407.** $-23/27$. **12.408.** $b^2\operatorname{ctg}\beta\,[\beta-\sin\beta\cos(2\alpha+\beta)]/4$. **12.410.** $\frac{\cos A}{\cos B\cos C}$. **12.413.** $\frac{R^2\sqrt{2}}{4}$. **12.414.** $\operatorname{arcctg}[\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+$ $+\cos^{-1}\alpha\operatorname{ctg}\gamma)]$ и $\operatorname{arcctg}[\sin\gamma\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\gamma+\cos^{-1}\alpha\operatorname{ctg}\beta)]$. **12.415.** $\pi/6$, $\pi/3$, $2\pi/3$ и $\pi/3$. **12.416.** $\pi/3$. **12.417.** $\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{m+n}{m}}-\frac{\pi}{4}$. **12.418.** $2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\sin\alpha\right)$. **12.419.** $4\pi S\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **12.420.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}\times$ $\times\left(\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha+1}-2\operatorname{ctg}\alpha\right)$. **12.421.** $\frac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$. **12.422.** $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{17}}{2}$. **12.423.** $\frac{\pi a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{9\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.424.** $\frac{1}{12}(ab+b^2)^{3/2}\operatorname{ctg}\alpha$. **12.425.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{2k-3}$, $k>\frac{3}{2}$. **12.426.** $\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4b^2}{a^2}\right)$. **12.427.** $\arcsin\frac{\sqrt{33}+1}{8}$. **12.428.** $a\sqrt{-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$ и $a\sqrt{-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$. **12.429.** $\pi/3$. **12.430.** $\operatorname{arctg}2$. **12.431.** $2\arcsin\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$. **12.432.** $\operatorname{arctg}\sqrt{9+3\sqrt{10}}$. **12.433.** $l^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **12.434.** $\frac{H^3\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)\operatorname{tg}\alpha}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}$ **12.435.** $\frac{a^2b}{4}\sqrt{3-4(\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)}$. **12.436.** $\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\times$ $\times\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **12.437.** $\frac{ab^2\sin\alpha}{2\cos\beta}\times$ $\times\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$. **12.438.** $\frac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}}{128\cos^5\frac{\alpha}{2}}$. **12.439.** $\frac{a^3\sin 2\alpha\cos\alpha\sin\beta}{4\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}$. **12.440.** $2\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$ и

$3\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$; $\quad 2\sqrt{3}/3<k<3/2$. **12.441.** $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$. **12.442.** $\arccos\frac{3}{4}$. **12.443.** $\arccos\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{b}$. **12.444.** $-\frac{1+3\cos 2\alpha}{4}$. **12.445.** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$. **12.446.** $\operatorname{arctg}\frac{4V\sin^2(\beta+\gamma)}{a^3\sin\beta\sin\gamma}$; **12.447.** $\frac{1}{3}$. **12.448.** $\frac{1}{24}(a+b)^2\times$ $\times\sqrt{a(a-2b)}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$. **12.449.** $\frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{2\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. **12.450.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$. **12.451.** $\arccos(8k^2-1)$; $0<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.452.** $\frac{h^3\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\varphi}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}$.

12.453. $\frac{5}{12}$. **12.454.** $\frac{a^2}{8}\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha$. **12.455.** $\frac{2R\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$. **12.456.** $\frac{3\sqrt{3}H^3\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{8}$. **12.457.** $\frac{H^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\sin 2\beta\sin\beta}$. **12.458.** $\frac{7a+3b}{144\cos\alpha}\times$ $\times\sqrt{3(a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha)}$. **12.459.** $\frac{H}{4}\operatorname{ctg}^2\alpha\left(\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}-1\right)$. **12.460.** $\frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{arctg}2$. **12.461.** $\operatorname{arcctg}\left(4\pm2\sqrt{2}\right)$. **12.462.** $\frac{2}{3}l^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\times$ $\times\sin\beta\sin 2\beta$. **12.463.** $\frac{3\cos\alpha}{8\cos^6\frac{\alpha}{2}}$. **12.464.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$.

12.465. $\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}k\pi-27}{6}}$; $\quad k>\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

Глава 13

13.001. 48; 80; 12; 12. **13.002.** 200 кг. **13.003.** 40 л и 80 л. **13.004.** 20 ч и 30 ч. **13.005.** 48. **13.006.** 136 га. **13.007.** На 38,8%. **13.008.** 70 кг. **13.009.** 500. **13.010.** 125 м³. **13.011.** На 6%. **13.012.** На 20%. **13.013.** На 7,1%. **13.014.** 80; 100; 90. **13.015.** 400 км. **13.016.** 4/7; 8/21; 12/35. **13.017.** 520. **13.018.** 240 руб. **13.019.** 10 мин. **13.020.** 12. **13.021.** 3. **13.022.** 240. **13.023.** 6 л. **13.024.** 68 га. **13.025.** 60 км. **13.026.** 6 ч; 2 ч. **13.027.** 32. **13.028.** 4/7; 8/21; 20/49. **13.029.** 5. **13.030.** 1260 руб.; 1050 руб.; 945 руб. **13.031.** 150 км. **13.032.** За 3 ч 45 мин. **13.033.** 8 и 9,6. **13.034.** 720 и 150. **13.035.**

5000 пар. **13.036.** 2,5 кг. **13.037.** 475 ц; 480 ц; 375 ц. **13.038.** 40; 32; 24. **13.039.** На 13,2%. **13.040.** 900 руб.; 360 руб.; 150 руб. **13.041.** 150 г и 450 г. **13.042.** 26 га. **13.043.** 105 км; 135 км; 175 км. **13.044.** 1,8 т и 3 т. **13.045.** 13,5 кг. **13.046.** Серы 3 кг, селитры 19,5 кг, угля 2,5 кг. **13.047.** 20 скрипачей, 8 виолончелистов и 4 трубача. **13.048.** 2850 км; 2250 км; 1950 км. **13.049.** 280; 200; 220. **13.050.** 49 руб. 80 коп. **13.051.** Можно увеличить на 2 дм. **13.052.** (3×4) км^2. **13.053.** 100 г и 60 г. **13.054.** 3150 ц и 3450 ц. **13.055.** 33.

13.056. $\dfrac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4abs}}{2b}$ л; $\dfrac{ab+\sqrt{a^2b^2+4abs}}{2b}$ л. **13.057.** 12 Н, 16 Н, 20 Н. **13.058.** $\dfrac{3l}{2(b-a)}$ м/с; имеет смысл при $b>a$. **13.059.** На 45. **13.060.** 15 дм^2. **13.061.** 40 коп.; 60 коп.; 80 коп. и 1 руб. **13.062.** 15. **13.063.** 21. **13.064.** 8. **13.065.** 48 и 60. **13.066.** 175 кг и 450 кг. **13.067.** 72 человека и 98 человек. **13.068.** 75 руб. и 100 руб. **13.069.** Через 4 ч. **13.070.** 450 м^3. **13.071.** 20. **13.072.** 100 км. **13.073.** 5 м и 8 м или 19,5 м и 22,5 м. **13.074.** Из 1,25 м. **13.075.** 46 и 40. **13.076.** 124 га; 35 ц с 1 га. **13.077.** 20 км; 60 км. **13.078.** Скорость автомобиля 100 км/ч или 80 км/ч; скорость катера 80 км/ч или 60 км/ч. **13.079.** 56 км. **13.080.** 14 км/ч; 28 км/ч. **13.081.** 48 км/ч. **13.082.** 5 км/ч и 3 км/ч. **13.083.** 60 км/ч. **13.084.** 1 ч 40 мин и 2 ч 5 мин. **13.085.** 3 ч 20 мин. **13.086.** 7. **13.087.** 5. **13.088.** $A(40; 0)$, $B(0; 30)$, $P(16; 18)$. **13.089.** 415 км. **13.090.** 1,5 кг. **13.091.** 120 кг и 162 руб.; 180 кг и 252 руб. **13.092.** 950 руб.; 400 руб.; 250 руб. и 300 руб. **13.093.** 3165 г; $\approx 79{,}1\%$. **13.094.** 187,5 кг. **13.095.** 2,7 м. **13.096.** 30 км/ч и 60 км/ч. **13.097.** 88 км/ч. **13.098.** 4 км/ч и 16 км/ч.

13.099. $\dfrac{-nr+\sqrt{nr(nr+s)}}{2n}$ км/ч; $\dfrac{nr+\sqrt{nr(nr+s)}}{2n}$ км/ч. **13.100.** 32.

13.101. 84 км; 6 км/ч; 4 км/ч. **13.102.** 21 и 12. **13.103.** 8 км; 4 км/ч. **13.104.** 48 км/ч. **13.105.** 25 км/ч; 48 мин. **13.106.** 850 км/ч. **13.107.** 45 дней и 30 дней. **13.108.** 10,26 ц и 11,6 ц. **13.109.** 12 км/ч и 10,5 км/ч. **13.110.** 4 ч и 8 ч. **13.111.** $\dfrac{\sqrt{tm(4s+tm)}-tm}{2t}$ км/ч.

13.112. Через 10 с. **13.113.** Через 17 мин. **13.114.** $\dfrac{a}{4t}(3-\sqrt{5})$ км/ч и $\dfrac{a}{4t}(\sqrt{5}-1)$ км/ч. **13.115.** 140 км. **13.116.** 80 км/ч.

13.117. 20 км/ч. **13.118.** 32 км/ч; 36 км/ч. **13.119.** 24. **13.120.** 75 км/ч.

13.121. $v=\dfrac{s(t_2+t_1)}{2t_2t_1}$ км/ч; $v_в=\dfrac{s(t_2-t_1)}{2t_2t_1}$ км/ч; $s_{ист}=\dfrac{s(t_2-t_1)^2}{2t_2t_1}$ км.

13.122. На середине пути; 3 ч. **13.123.** 40 км/ч. **13.124.** 60 км/ч и 63 км/ч. **13.125.** $s(a-b)/b$ км/ч; $s(a-b)/a$ км/ч. **13.126.** 4 и 6. **13.127.** ≈ 11 м. **13.128.** $\sqrt{v(v-s)}$ км/ч; при $v>s$. **13.129.** В 14 ч. **13.130.** 5/12 км/ч; 2 ч и 3 ч. **13.131.** 5/6 км/ч; 5 ч, 3 ч. **13.132.** На 56/3 мин, на 14 мин и на 24 мин. **13.133.** За $\dfrac{2abc}{ab+bc-ac}$ мин,

$\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ мин, $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ мин. **13.134.** $\frac{bn+\sqrt{b^2n^2+240abn}}{2b}$ и $\frac{-bn+\sqrt{b^2n^2+240abn}}{2b}$. **13.135.** 45 ч. **13.136.** 3 км/ч. **13.137.** За 6; 8 и 12 мин. **13.138.** За 14 и 11 дней. **13.139.** 64 **13.140.** 15 и 12. **13.141.** 85 714. **13.142.** За 132 мин и 110 мин **13.143.** $b+\sqrt{b(b-a)}$; $b-a+\sqrt{b(b-a)}$; $\sqrt{b(b-a)}$ дней; задача имеет решение при $b>a$. **13.144.** 54. **13.145.** $\frac{3a-c+\sqrt{9a^2+2ac+c^2}}{2}$ км/ч. **13.146.** 8; 4; 2 или $-6{,}4$; 11,2; $-19{,}6$. **13.147.** (10×20) см². **13.148.** 3 см. **13.149.** -220 и 264. **13.150.** 3·3 — 4. **13.151.** $\frac{l(a+b)}{2ab}$ м/с; $\frac{l(a-b)}{2ab}$ м/с. **13.152.** (40×50) м². **13.153.** 149 м и 100 м. **13.154.** 12 коп. и 80 коп. **13.155** 120 руб. **13.156.** 4 км/ч. **13.157.** 32. **13.158.** 85 кг. **13.159.** 2160 руб. **13.160.** 23. **13.161.** $\frac{\sqrt{b^2k^2+400abk}-bk}{2b}$. **13.162.** 1 руб.; 900 кг. **13.163.** 21 ц и 20 ц. **13.164.** 2 руб. **13.165.** 20 и 120. **13.166.** 1632. **13.167.** 18 км/ч и 12 км/ч **13.168.** 2. **13.169.** 35:12. **13.170.** 6 м, 8 м. **13.171.** 38, 31, 5, 7 и 9. **13.172.** 18 дней и 24 дня. **13.173.** 71. **13.174.** По 12 кг. **13.175.** 68/3 км/ч. **13.176.** 540 л, 450 л, 630 л **13.177.** Десяти. **13.178.** 50 га и 60 га. **13.179.** 3 сына и 2 дочери. **13.180.** 5/9 и 10/9. **13.181.** 9. **13.182.** 50 г, 150 г и 200 г **13.183.** 20 рядов по 25 стульев в каждом. **13.184.** 75 и 60. **13.185.** 24 г.; 30 г.. **13.186.** 16. **13.187.** 40 дней; 25% **13.188.** $\frac{-kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn}}{2k}$ и $\frac{kn+\sqrt{k^2n^2+240ktn}}{2k}$. **13.189.** $\pm0{,}5$. **13.190.** ≈ 85 г. **13.191.** 2 Н и 26 Н **13.192.** 12 л, 8 л, 7 л. **13.193.** Через 3 ч 20 мин. **13.194.** 4 м и 5 м. **13.195.** 96 м; за 14 ч. **13.196.** 56 км/ч и 84 км/ч. **13.197.** 6 мин и 10 мин. **13.198.** 280% и 175% **13.199.** 600 м. **13.200.** 90 руб. и 135 руб. **13.201.** $\frac{\sqrt{b^2+32a^2}-(b-4a)}{2}$ м, $\frac{\sqrt{b^2+32a^2}+b+4a}{2}$ м. **13.202.** 3 ч. **13.203.** 2 км/ч; 5 км/ч. **13.204.** 12 ч и 24 ч. **13.205.** 37. **13.206.** 202. **13.207.** 65 км/ч, 100 км/ч. **13.208.** 24. **13.209.** 4 мин. **13.210.** На 40% **13.211.** 842. **13.212.** $\frac{ab+\sqrt{ab(ab+4n)}}{2a}$; $a>0$, $b>0$, $n>0$. **13.213.** За 50 ч и 75 ч. **13.214.** 4:1. **13.215.** Через 50 мин. **13.216.** 40 км/ч и 50 км/ч. **13.217.** $\frac{4b\pm3at+\sqrt{16b^2+9a^2t^2}}{6t}$ км/ч; $4b>3at$. **13.218.** 16 и 52. **13.219.** $2R$ и R, а также $6R/5$ и $9R/5$. **13.220.** 3 км/ч. **13.221.** 80 км. **13.222.** 80 км/ч. **13.223.** 1 км/ч. **13.224.** За 4 дня. **13.225.** Больше на 1 ч. **13.226.** 25 ч и 20 ч. **13.227.** 10 ч и 8 ч. **13.228.** 12 ч и 15 ч. **13.229.** 12, 8, 3, 2. **13.230.** 13 и 63. **13.231.** 5% и 11%. **[13.232.]** 3 км/ч; 45 км/ч. **13.233.** За 4 дня. **13.234.** 20% и 60%. **13.235.** В 4 и в 3 раза; 3:2. **13.236.** На 20 досках. **13.237.** Приписанная цифра либо 0, либо 3, либо 8; в первом случае задумано число 2, во втором 3, в последнем 4. **13.238.** Из 16 выстрелов 6 удачных. **13.239.** 50. **13.242.** 60 м^3 и 90 м^3. **13.243.** 120, 90 и 70 ведер. **13.244.** Немного не покроются. **13.245.** 62 м^3. **13.246.** 1225 кругов на каждую фигуру. **13.247.** 9%. **13.248.** 6,75 руб. и 4,50 руб.; в каждом куске было по 5,6 м. **13.249.** 18. **13.250.** 24. **13.251.** 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин. **13.252.** За 56 с. **13.253.** 65 м^3 и 20 м^3. **13.254.** Через $\frac{45v_2(v_3-v_1)}{v_3(v_2-v_1)}$ мин. **13.255.** 22/15 м/с. **13.256.** $D=\frac{L^2+H^2-Hd}{H}$. **13.257.** 30 км/ч. **13.258.** $\frac{b(n-1)}{a-c}$ км/ч; $n>1$, $a>c$. **13.259.** 270 км. **13.260.** 60°. **13.261.** 6 км/ч; 9 км/ч; 12 км/ч; 42 км. **13.262.** Через 7 с после начала падения первого тела. **13.263.** 360 км. **13.264.** 3 м/с. **13.265.** $a+2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$. **13.266.** 500 м. **13.267.** 100 км/ч. **13.268.** $\frac{vd}{a-b}$ м/с, $a>b$. **13.269.** 1 ч 21 мин; 1 ч 20 мин; 6 км. **13.270.** $\frac{60v_1v_2}{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}}$ км/ч. **13.271.** 24 км. **13.272.** 45 км/ч. **13.273.** Через 5 с; за 0,5 метра до линии поля. **13.274.** 100 км/ч. **13.275.** 8 ч 15 мин; 8 ч 53 мин; 9 ч 16 мин; 10 ч 01 мин. **13.276.** 12 км, 40 км, 50 км. **13.277.** 1375 км. **13.278.** 50 км/ч. **13.279.** $\frac{2ab}{a+b}$; $\frac{2ab}{3b-a}$; $\frac{2ab}{a+b}$; $\frac{2ab}{3a-b}$ м/мин, где $b/3<a<3b$. **13.280.** За 58,5 мин. **13.281.** $\frac{a+3b+\sqrt{a^2-10ab+9b^2}}{4}$ км/ч. **13.282.** $\frac{v+\sqrt{9v^2+6sv}}{v}$ ч. **13.283.** Первоначально оба шли с одной скоростью 3 км/ч. **13.284.** 75,6 км/ч; 147 м. **13.285.** 24 мин. **13.286.** $AB=\frac{3c\beta}{4}$ км; $BC=\frac{\beta c(4\alpha-3\beta)}{4(2\alpha-\beta)}$ км ($\alpha>\beta$). **13.287.** $2a$. **13.288.** За 24 ч. **13.289.** $a+c+\frac{ac}{b}$ мин. **13.290.** 4 ч и 6 ч. **13.291.** 20 ч, 30 ч, 24 ч. **13.292.** За 15 дней и 7,5 дней. **13.293.** 6 и 8. **13.294.** $\frac{0,4an}{11-n}$; $\frac{0,24an}{n-9}$; $n=10$. **13.295.** За $\frac{a^2+n+\sqrt{a^4+6a^2n+n^2}}{2a}$ ч. **13.296.** За 20 ч и за 30 ч. **13.297.** $\frac{c+\sqrt{c^2+120bc}}{2}$ км/ч; $\frac{-c+\sqrt{c^2+120bc}}{2}$ км/ч. **13.298.** 1/80; 1/90. **13.299.** 12° или 60°. **13.300.** 12 м/с; 3 м/с; 360 м. **13.301.** 10, 20 и

30 зубцов. **13.302.** 3 м/с, 4 м/с. **13.303.** 300 и 600. **13.304.** 20 и 30. **13.305.** 42 и 35. **13.306.** 196 км, 84 км/ч. **13.307.** 964. **13.308.** 15 или 95. **13.309.** 9 и 10. **13.310.** 40 т и 100 т. **13.311.** 20. **13.312.** За 14,4 ч. **13.313.** 4/15. **13.314.** 9 и 2. **13.315.** 20%. **13.316.** $\approx 41{,}4\%$. **13.317.** 3 ч 40 мин и 2 ч 12 мин. **13.318.** ≈ 28. **13.319.** 200 руб.; срочный. **13.320.** 5. **13.321.** 824 и 428. **13.322.** $\approx 2{,}77$ кг. **13.323.** 35 кг и 45 кг. **13.324.** 116 руб. **13.325.** 5. **13.326.** 30 км/ч. **13.327.** 13 л, 7 л, 4 л. **13.328.** 100. **13.329.** $\frac{\sqrt{s}+\sqrt{r}}{\sqrt{s}-\sqrt{r}}\cdot a$ дней, где $s>r$. **13.330.** 10 ч и 15 ч или по 12 ч. **13.331.** 25 шариков и 16 колец или 16 шариков и 25 колец. **13.332.** 200 ч и 140 ч. **13.333.** После четвертого. **13.334.** 45 м, 36 м, 30 м. **13.335.** 53. **13.336.** 28 июня. **13.337.** Через 15 рабочих дней, или 17 июня. **13.338.** 285 714. **13.339.** $a+b-c$. **13.340.** 3. **13.341.** 18 л и 12 л. **13.342.** 8 м. **13.343.** $p=5a$; $q=5$. **13.344.** 3:4:5. **13.345.** Через $43\frac{7}{11}$ мин. **13.346.** 1. **13.347.** 12 и 1232. **13.348.** $\frac{a+2b+\sqrt{a^2+4bc}}{2}$; $\frac{2c-a+\sqrt{a^2+4bc}}{2}$ ч. **13.349.** 4 км. **13.350.** В $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ раз. **13.351.** а) 3 км/ч, б) 4 км/ч, в) 5 км/ч. **13.352.** Через 88 с. **13.353.** 159 и 234. **13.354.** 31 и 41. **13.355.** 60 км/ч. **13.356.** 105 м. **13.357.** 16 км/ч. **13.358.** 142 857. **13.359.** 21 и 10. **13.360.** $0<v\leqslant 20$ км/ч. **13.361.** 2 л. **13.362.** 9 и 35. **13.363.** $\frac{1}{2}+\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$; $\frac{1}{2}-\frac{mp-nq}{2(np-mq)}$. **13.364.** 3600. **13.365.** Более чем через полвека (≈ 55 лет). **13.366.** После 5 ударов. **13.367.** 2/3. **13.368.** $\sqrt[k-1]{k}$. **13.369.** Вышедшего из B. **13.370.** 25 м/с. **13.371.** 2,4 кг и 4,8 кг. **13.372.** $\frac{kp\pm\sqrt{2kp^2-k^2p^2}}{2k}$, $k\leqslant 2$; наибольшая потеря стоимости в два раза. **13.373.** $\frac{25-a\pm\sqrt{D}}{2a}$ кг и $\frac{25+a\pm\sqrt{D}}{2a}$ кг, где $D=a^2-130a+625$, причем если $a>5$ — нет решений, если $0<a<5$ — два решения, если $a=5$ — одно решение (2 кг и 3 кг). **13.374.** Если $s>\frac{pq}{100r}$, то на расстоянии от B, не большем, чем $\frac{s}{2}-\frac{pq}{200r}$. Если же $s<\frac{pq}{100r}$, то для любого пункта, расположенного на дороге AB, выгоднее брать уголь в A. **13.375.** $R\left(k+1\pm\pm\sqrt{k^2-6k+1}\right)/2$, $k\geqslant 3+2\sqrt{2}$. **13.376.** 20 рабочих работали по 6 часов в день. **13.377.** За 3 ч. **13.378.** Если $c<h/m$, то 1-я модель, если $c>h/m$, то 2-я модель, если $c=h/m$, то одинаково. **13.379.** Да. **13.380.** $a+a\sqrt{2}$ ч. **13.381.** $\frac{100s-r(50+s)}{(3s-r)a}$; $\frac{100s-r(50+s)}{(r-s)a}$ м/с,

где $s<r<\frac{100s}{50+s}$. **13.382.** $k=1$, 2 и 3; при $k=1$ стороны прямоугольника $4\sqrt{5}$ см и $10-4\sqrt{5}$ см, при $k=2$ стороны прямоугольника 16 см и 4 см, при $k=3$ стороны прямоугольника 20 см и 10 см, а также 12 см и 18 см. **13.383.** $5+5\sqrt{2}\approx 12$ км. **13.384.** В 10 ч 29 мин. **13.385.** 6,4 км. **13.386.** $\frac{d(k-1)}{2Tk}\pm\frac{d}{2t}\left(1-\sqrt{1+\frac{t^2(k-1)^2}{T^2k^2}}\right)$. **13.387.** 1 ч. **13.388.** Через 4 мин.; спортсмен шел медленнее троллейбуса в 3 раза. **13.389.** $\frac{3\left(-a+\sqrt{a^2+240a}\right)}{2a}$ и $\frac{-3\left(3a-\sqrt{a^2+240a}\right)}{2a}$ ч, где $a<30$. **13.390.** $\frac{4p-2q}{t}$ км/ч; $\frac{2p}{t}$ км/ч; $3p-q$ км/ч, где $0\leqslant q<2p$; $p>0$, $t>0$. **13.391.** 60 км/ч. **13.392.** 10 ч. **13.393.** 340 км. **13.394.** $\frac{s\left(-a+\sqrt{a^2+240at}\right)}{120t}$ м. **13.395.** 500 л, 1000 л и 1500 л. **13.396.** Третья. **13.397.** 120. **13.398.** 8 км. **13.399.** За 80 мин. **13.400.** $\frac{31b}{130v}$ ч. **13.401.** 11 см/с, 7 см/с. **13.402.** $2500\div3000$ м/ч. **13.403.** 5/4. **13.404.** $\frac{vt+\sqrt{2a^2-v^2t^2}}{2v}$; $a=\frac{vt}{\sqrt{2}}$. **13.405.** $0<a<68$. При $a=5$ расстояния между совхозами 60 км, 40 км и 25 км. **13.406.** $AN=$

$$=\sqrt{\frac{a^2+c^2-2b^2+2\sqrt{a^4+b^4+c^4-b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}}{3}};\quad BM=$$

$$=\sqrt{\frac{b^2+c^2-2a^2+2\sqrt{a^4+b^4+c^4-b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}}{3}}.$$

13.407. $\frac{\sqrt{b^2c^2+4abc}-bc}{2c}$ км, a, b, c — произвольные положительные числа. **13.408.** 10 и 15. **13.409.** Через 62 мин; 16 км. **13.410.** Через $\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$ мин от начала полета. **13.411.** $2ak$ км. **13.412.** 36 км/ч, 54 км/ч. **13.413.** $\frac{3m+\sqrt{9m^2+2500t^2v^2}}{50t}$ км/ч. **13.414.** За 25 мин и 24 мин. **13.415.** За $b+\sqrt{b(b-a)}$ дней. **13.416.** 21 человек; 6 ч. **13.417.** $a+\frac{-(a+b)+\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}$; $b+\frac{-(a+b)+\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}$; $\frac{-c(a+b)+c\sqrt{(a-b)^2+4abc^2}}{2(c+1)}$; $c>1$. **13.418.** В 1-й $\frac{an(n-2)}{(n-1)^2}$ см^3; во 2-й $\frac{a(n^2-2n+2)}{(n-1)^2}$ см^3; во всех остальных по a см^3. **13.419.** 4

и 12. **13.420.** За 96 мин или за 5 мин. **13.421.** В 4 раза. **13.422.** $\frac{3a+2c+\sqrt{4c^2-4ac+9a^2}}{4}$ км/ч. **13.423.** В 10 раз. **13.424.** $\frac{3a}{3u+v}$; $\frac{av}{u(3u+v)}$ ч. **13.425.** Через $\frac{ab}{\sqrt{a^2+4ab}}$ с. **13.426.** 15 м/мин; 20 м/мин; 280 м. **13.427.** 54. **13.428.** 423. **13.429.** 7,7 ч. **13.430.** 11. **13.431.** 6 л. **13.432.** $\frac{\sqrt[20]{2}}{\sqrt[20]{2}-1}$ л. **13.433.** 2 л. **13.434.** $\frac{l(3k+1)}{k+3}$ м. **13.435.** 89 кг и 35 кг. **13.436.** $\frac{p(n+1)}{n-1}$; $\frac{1}{3}$. **13.437.** 379 и 583. **13.438.** $r_1=$ $=\frac{-r+\sqrt{6R^2-3r^2}}{2}$; $r<r_1\leqslant R$ при $\frac{\sqrt{3}-1}{2}\leqslant\frac{r}{R}<\frac{\sqrt{2}}{2}$, $r_1<r\leqslant R$ при $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{r}{R}\leqslant 1$. **13.439.** 13 см. **13.440.** 22 см^2. **13.441.** 70 км/ч. **13.442.** 121. **13.443.** $MA=\frac{3m\pm 4\sqrt{25-m^2}}{25}$, где $0<m\leqslant 5$ и годятся только значения $MA<m/3$. Эта формула определяет одну возможную точку при $3\leqslant m<4$ и две возможные точки при $4\leqslant m\leqslant 5$. Точка M не существует, если $0<m<3$ или $m>5$. **13.444.** 53. **13.445.** $R\pm$ $\pm\sqrt{2a^2-3R^2}$, $3R^2/2\leqslant a^2<2R^2$. **13.446.** $a\left(3\pm\sqrt{3(4m-1)}\right)/6$, $1/4<$ $<m<1$. **13.447.** В 2 раза. **13.448.** $p(2n-1)$. **13.449.** 1 см/с и 4 см/с. **13.450.** 40%, 50% и 10%. **13.451.** $p-m-\sqrt{m^2+2mp-p^2}$, $p-$ $-m+\sqrt{m^2+2mp-p^2}$, $2m$; $m<p\leqslant m\left(\sqrt{2}+1\right)$. **13.452.** 6400 л и 600 л. **13.454.** Через 189. **13.455.** $\frac{1000(2{,}5a+sp)}{2000-sn}$. Задача имеет решение при $sn<2000$. **13.456.** 100. **13.457.** 24. **13.458.** $b>2a$. **13.459.** Решение возможно при $p=4$. В этом случае в построении первой фигуры участвовало 210 спортсменов. **13.460.** 13 участников; 156 партий. **13.461.** $v\left(ag+v-\sqrt{v(2ag+v)}\right)/g$. **13.462.** 8 задач; 127,5 мин. **13.463.** 16 ч. **13.464.** 421. **13.465.** 211. **13.466.** 10 лет и 5 лет. **13.467.** 0. **13.468.** 300 руб. и 150 руб. **13.469.** 3, 4, 5. **13.470.** $M\left(a\sqrt{3}-a;\ 0\right)$; $P\left(0;\ a\sqrt{3}-a\right)$.

Глава 14

14.001. 1/2, если $m>0$; $-1/2$, если $m<0$. **14.002.** $\sqrt[4]{b-a}$, где $b>a$. **14.003.** $\operatorname{ctg}33°$. **14.004.** $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|$. **14.005.** $\{-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\}$. **14.006.** 1/3. **14.007.** 35. **14.008.** $\{0;\ -1/3\}$. **14.009.** 2. **14.010.** $\{-\sqrt{10};\ \sqrt{10};\ -1/\sqrt{10};\ 1/\sqrt{10}\}$. **14.011.** 64. **14.012.** $\{2^{-\sqrt{6}/2};\ 2^{\sqrt{6}/2}\}$. **14.013.** 6. **14.014.** $\{10^{-6};\ 10^3\}$. **14.015.** $\sqrt{26}$. **14.016.**

$\{3;\ 1/\sqrt[4]{3}\}$. **14.017.** $\{6;\ 1/6\}$. **14.018.** 5. **14.019.** $\{1/16;\ 4\}$. **14.020.** 3. **14.021.** $\{0{,}01;\ 100\}$. **14.022.** 2. **14.023.** 1. **14.024.** $\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

14.025. $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in Z$. **14.026.** $(-1)^n \arcsin \frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$. **14.027.** $(3;\ 2)$. **14.028.** $\{(2;\ 1);\ (1;\ 2)\}$. **14.029.** $\{(0;\ 2);\ (2;\ 0)\}$. **14.030.** $(1/2;\ \sqrt{2}/5)$. **14.031.** $\{(1;\ 1);\ (4;\ 2)\}$. **14.032.** $(2\sqrt[3]{4};\ 2^2\sqrt[3]{2})$. **14.033.** 6. **14.034.** $\{-7;\ -5\}$ при $p=12$; $\{7;\ 5\}$ при $p=-12$ **14.035.** 117. **14.036.** Нет. **14.037.** Один **14.039.** $\{-2;\ -1;\ 3\}$.

14.040. 2. **14.042.** Три. **14.044.** Четыре. **[14.045.]** $\left\{\frac{-3-\sqrt{16m-7}}{4};\ \frac{-3+\sqrt{16m-7}}{4}\right\}$ при $m>7/16$; $x_1=x_2=-3/4$, при $m=7/16$ **14.046.** 55. **14.047.** $\{-2/3;\ 1\}$. **14.048.** $\{-1;\ 0;\ 1\}$. **14.049.** 0. **[14.050.]** 5. **14.051.** Нет. **14.053.** $\varnothing$ при $m=3$; бесконечное множество решений при $m=-3$. **14.054.** Минус. **14.055.** Минус. **14.056.** Минус. **14.057.** $a^{1/a}$, где $a>0$, $a\neq 1$. **14.058.** 12,5. **14.059.** 4. **14.060.** 3. **14.061.** $-\frac{1+2a}{a}$. **14.062.** $\frac{1}{a^2}$. **14.063.** $\frac{b+3a-2}{2a}$. **14.064.** 0. **14.065.** 0. **14.066.** 0. **14.067.** 0. **14.068.** 0,3010. **14.070.** Минус. **14.071.** Плюс.

14.073. Верно при $a=\frac{b}{b-1}$, где $b>1$. **14.076.** $[-2;\ 1]\cup[2;\ \infty[$. **14.077.** $]-3;\ 0[\cup]2;\ \infty[$. **14.078.** $]-4;\ 0[\cup]0;\ 4[$. **14.079.** $]-1;\ 1[\cup]2;\ \infty[$. **14.080.** $]-\infty;\ -3[\cup]-1;\ 1[\cup]3;\ \infty[$. **14.081.** $]-3;\ -2[\cup]2;\ 3[$. **14.082.** $]-\infty;\ -2/7]\cup]3;\ \infty[$. **14.083.** $]2;\ 3[$. **14.084.** $]2;\ 4[\cup]4;\ 6[$. **14.085.** $]0;\ \infty[$. **14.086.** $]-2;\ 0[\cup]2;\ \infty[$. **14.087.** $]-2;\ 1[\cup]3;\ \infty[$. **14.088.** $]-3;\ -2[\cup]0;\ 1[$. **14.089.** $]-3;\ 2[$. **14.090.** $]0;\ 1[\cup]100;\ \infty[$. **14.091.** $]0;\ 1[$. **14.092.** $]1/9;\ 3[$. **14.093.** $]0;\ 1/2[\cup]\sqrt{2};\ \infty[$. **14.094.** $]0;\ 0{,}04[$. **14.095.** $]1;\ \sqrt{3}[$. **14.096.** $]-2;\ 2[$ **14.097.** $[1/3;\ 3/4[$.

14.098. $]0;\ 1[$. **14.099.** $[2\pi n;\ \pi+2\pi n[,\ n\in Z$. **14.100.** $]\frac{\pi}{12}+\pi n;\ \frac{5\pi}{12}+\pi n[,\quad n\in Z$. **14.101.** 1) $]2\pi n-\frac{7\pi}{6};\ 2\pi n+\frac{\pi}{6}[,\quad n\in Z$; 2) $]\pi n-\frac{\pi}{6};\ \pi n+\frac{\pi}{6}[,\ n\in Z$. **14.104.** $]0;\ 1[$. **14.105.** $3^{400}>4^{300}$.

14.106. $]-1/3;\ 4[$. **[14.107.]** $]1{,}2;\ 2[$. **14.108.** $]-3;\ -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2};\ 3]$. **[14.135.]** Нет. **14.142.** $[2;\ 3[\cup]3;\ 4]$. **14.143.** $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 1[\cup]1;\ \infty[$. **14.144.** $]-3;\ -2/3[$. **14.145.** $]0;\ 1$. **[14.146.]** $]-\infty;\ 0[$. **14.147.** $]0;\ 1[$. **14.148.** $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$. **14.149.** $[0;\ 2]$. **14.150.** $[-13;\ 13]$. **14.161.** $y_{\min}=2$. **14.162.** $y_{\min}=4$. **14.163.** $y_{\max}=4$.

[14.166.] n^{-1}. **[14.167.]** $\frac{n+3}{n+1}$. **[14.168.]** $\frac{n+2}{n+1}$. **[14.169.]** $(n+2)^{-1}$.

[14.171.] Нет; да. **[14.174.]** а) и б) возрастающая; в) не монотонная;

г) убывающая. [14.175.] $\{-6, -5, -4, -2, -1, 0\}$. 14.177. Нет. [14.179.] 12870 $a^{24}x^{16}$. 14.184. 32%. 14.185. 1000^q. 14.188. $(2\sqrt{2}+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{2}+2+\sqrt[6]{32}+\sqrt[3]{4})/2$. 14.190. 31. 14.193. 1) 1, 875 ч; 2) 7,5 ч. 14.194. $a_n=2n-1$, где $n\in N$. 14.195. Нет. 14.196. $a-b$. 14.199. $\frac{2a^2\pm\sqrt{2(a^4+b^4)}}{2}$. [14.202.] $y=-4x^2-6x+1$. [14.203.] Множество четырехугольников с взаимно перпендикулярными диагоналями. 14.205. $]-\infty; 1[\cup]1; \infty[$. 14.207. 60. 14.210. 1. 14.215. Нет. 14.216. $]-5; 3[$. 14.222. Нет. 14.227. Да. 14.241. $\lg^2 x+\lg^2 y=1$. 14.242. $\log_a^{2/3}u+\log_a^{2/3}v=1$. 14.243. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, где $n\in Z$. 14.244. $\operatorname{arcctg}\frac{1-q}{p}$, где $1<q\leqslant\frac{p^2}{4}$. 14.252. а) Нет; б) Нет. 14.253. Да. 14.254. а) 6π; б) 30π. 14.255. $\pi/3$. 14.257. $-2\sqrt{5}/5$. 14.260. $y_{\max}=3/4$. 14.261. $y_{\max}=\sin 1$. 14.262. $y_{\max}=3$, $y_{\min}=2$. 14.263. $\operatorname{tg} 1$. 14.264. -1 при $m=0$; не имеет смысла при $m=-1$; $\frac{m-1}{m+1}$ при $m\neq 0$; $m\neq -1$. 14.265. $-23/36$. 14.266. Минус. 14.267. $\pi/4$. 14.268. $\pi/4$. 14.269. $m=-1/4$, $M=1/4$. 14.271. (3; 1). 14.272. Нет. 14.302. $-7/24$. 14.306. $\sqrt[512]{a^{511}}$. 14.309. Нет. 14.310. $y=x$, где $x>0$, $x\neq 1$. 14.311. $\{0\}\cup[\pi/3; \pi/2]$. [14.313.] $]-6; -5[\cup[0; 1]$. 14.319. $y_{\min}=2$ при $x\in[1; 3]$. 14.320. $a+b=kn$ и $a-b=km$ (k, n, $m\in N$), где n и m — нечетные, или k — четное, большее двух. 14.321. Нет. 14.322. $(a-1)\times\times(a+3)(a^2+3)$. 14.323. $\{]0; 1[,]1; \infty[\}$. 14.324. $]0; \infty[$. 14.327. $]-\infty; \infty[$. 14.328. $\frac{1}{b_1^{-1}+b_2^{-1}+\cdots+b_k^{-1}}$. 14.330. $x=a$, $y\neq b$ при $c=0$; $\{(a+c; b+1); (a-c; b-1)\}$ при $c\neq 0$. 14.331. 2 кв. ед. 14.332. $y_{\max}=1/26$. 14.333. $]1/2; 2[$. 14.337. $\{-31/11; 3\}$. 14.338. (2; 9). 14.339. (1; 2; 3). 14.341. $(k+1)^3(k-1)^2$. 14.343. $y_{\max}=6$. 14.344. $y_{\max}=2$. [14.345.] 2,4. 14.346. $\left\{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}; \pm\sqrt{2n+\frac{2}{3}}; \pm\sqrt{2n-\frac{2}{3}}\right\}$, $n\in N$. 14.347. $4n^2$, $n\in Z_0$. 14.349. 2. [14.350.] $\frac{1}{1-2^x}$. 14.353. Нет. 14.354. $\{2; -2/9\}$. 14.355. $]-\infty; -\sqrt{3}/3]\cup[\sqrt{3}/3; \infty[$. [14.356.] $x^4-8x^2+4=0$. 14.357. 2. 14.358. $y_{\min}=4$. 14.359. 1) Нет; 2) да; 3) нет. 14.365. $N_1=58$ для $\varepsilon=0{,}1$; $N_1=598$ для $\varepsilon=0{,}001$. 14.366. 2. 14.367. 3. 14.368. 0. 14.369. 0. 14.370. а) $a_n=3\cdot 2^{n-1}+1$; б) нет. 14.371. $(1+\sqrt{21})/2$. 14.373. 0. 14.374. $-145/42$. 14.375. 0 при $x\to\infty$ и -2 при $x\to-\infty$. 14.376. -5. 14.377. 1. 14.378. 0,25. 14.379. $-2{,}5$. 14.380. $-0{,}5$. 14.381. $-1{,}75$. 14.382. 4. 14.383. $-0{,}5$. 14.384. -2. 14.385. 4. 14.386. -1. 14.387. 1. 14.388. 0. 14.389. 0,5. 14.390. $3\sqrt{3}/2$. 14.391. 0,5.

14.392. 1/3. 14.393. 1,25. 14.394. $\frac{1}{1-x}$. 14.395. 1. 14.427. $a=-25/2$. 14.450. e^{-1}. 14.451. $]-\infty; 0[\cup]0; 2,5[$. 14.452. $[-4; -3]$. 14.453. Например, $f(x)=\sqrt[3]{x}$. 14.454. 1. 14.455. 4/9. 14.456. 2/3. 14.457. —2. 14.458. 1/8. 14.459. 1/8. 14.460. —2. 14.461. 0. 14.462. —0,5. 14.463. 1. 14.464. 1/30. 14.465. 39. 14.466. 7/6. 14.467. 1. 14.468. —0,5. 14.469. $3\ln 2$. 14.470. $3\sqrt{2}/8$. 14.471. $0,5\ln 2$. 14.472. —3. 14.473. —1. 14.474. $2/\sqrt{\pi}$. 14.475. 1. 14.476. а) $f''(1)=3-4\cos 2$; $f''(\pi)=2\ln\pi-1$; б) $f''(3)=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\sin 1$; $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi}-\frac{1}{18}$. 14.477. $y'(0)<0$. 14.478. $[0,25; 1,5]$. 14.479. $[8; 72]$. 14.480. $[0; \infty[$. 14.481. $[-8; 8]$. 14.482. $[3; 3/\cos^2 1,5]$. 14.483. $\varnothing$. 14.484. $[0; 2]$. 14.485. $[-1; 4]$ и $]-1,4[$. 14.487. $a=-1$, $b=1$. 14.488. $a=1$, $b=0,5$. 14.489. $x_1=2\pi k$, $x_2=2\pi k-2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$, $k\in Z$. 14.490. $x_1=0$, $x_2=-7/3$. 14.491. Нет.

14.492. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+C, & \text{если } x>0;\\ -\frac{x^2}{2}+C, & \text{если } x<0.\end{cases}$ 14.499. Первое — нет, второе — имеет. 14.500. $a>3$. 14.501. $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. 14.502. $y=x+1$. 14.503. $\{(4; 0); (1; -27)\}$. 14.505. $\pi/3$. 14.507. $\{(3; -2), (-1; 2/3)\}$. 14.508. $\{(2; 8/3), (3; 7/2)\}$. 14.509. $3\pi/4$. 14.510. $\pi/4$. 14.511. $(1/2; -15/32)$. 14.512. $y=\frac{1}{e}x$. 14.513. В точке $(-5; 45)$: $y=-20x-55$ и $y=-13x-20$; в точке $(2; 3)$: $y=8x-13$; $y=x+1$. 14.514. $\beta=\pi/2-\operatorname{arctg}3$. 14.515. $y=4x-13$; $y=-4x+3$. 14.516. $x+ey-2e=0$. 14.517. $8x-y+14=0$. 14.518. $\{(1; 0); (-1/3; -44/27)\}$. 14.519. $\{(0; -1); (4; 3)\}$. 14.520. а) $y=x-0,09$; б) $\{\pi/24; \pi/8; 13\pi/24; 5\pi/8\}$. 14.521. а) $3\pi/4$; б) $7\pi/18$. 14.522. $\pi/6$. 14.523. $5\sqrt{5}$. 14.524. 5 кв. ед. 14.525. $S_1=S_2=S_3=8$ кв. ед. 14.528. 1/13 м/с. 14.529. 21 м/с; 24 м/с². 14.530. $\{1; 4\}$. 14.531. $v(2)=70$ м/с. 14.532. $v_1=8$ м/с; $v_2=10$ м/с и $v_1=24$ м/с; $v_2=22$ м/с. 14.533. $a_1=14$ м/с²; $a_2=18$ м/с². 14.534. $v_1=36$ м/с; $v_2=35$ м/с. 14.535. $v=-12$ м/с. 14.538. 160π см²/с; 800π см³/с. 14.539. $\omega=12$ рад/с; $t=2$ с. 14.540. 30 г/см; 98,2 г/см.

14.542. $a>4$. 14.543. $x=e$ — точка минимума. 14.544. $x=1/e$ — точка максимума. 14.545. $x=0$ — точка минимума, $x=2$ — точка максимума. 14.546. $x=3$ — точка максимума. 14.547. $x=0,5$ — точка минимума; $y_{\min}=0,25-\ln 2$. 14.548. $x=\ln 2$ — точка максимума; $\pi/4$. 14.549. $x=\pi/4+\pi k$ — точки минимума при $k=2n+1$ и точки максимума при $k=2n$ $(n\in Z)$; $\pi/4$. 14.550. $x=0$ — точка минимума; $(-0,25; -0,25-\ln 0,75)$. 14.551. $x=-1$ — точка максимума; $x=1$ — точка минимума; $y=11,25x+13$. 14.552. $x=0$ — точка максимума; $y_1=0$, $y_2=9$. 14.554. $p>1$. 14.557. Возрастает на

$]\operatorname{arctg}(-3/4)+2\pi n;\ \operatorname{arctg}(-3/4)+(2n+1)\pi[$, $n\in Z$. **14.558.** Возрастает на $]-\infty;\ -1/2[$, убывает на $]-1/2;\ \infty[$. **14.559.** $x=7/11$ — точка минимума; возрастает на $]7/11;\ 5[$, убывает на $]-\infty;\ 7/11[$ и на $]5;\ \infty[$. **14.560.** $y_{наим}=-24$, $y_{наиб}=4$. **14.561.** $y_{наиб}=17$, $y_{наим}=0$. **14.562.** $y_{наим}=1$, $y_{наиб}=3$. **14.563.** $y_{наим}=-10/3$, $y_{наиб}=-2$. **14.564.** $y_{наим}=1$; $y_{наиб}=2{,}125$. **14.565.** $y_{наиб}=1$, $y_{наим}=0$. **14.566.** $y_{наиб}=3\sqrt{3}/8$, $y_{наим}=0$. **14.567.** а) $y_{наиб}=1$, $y_{наим}=0{,}8$; б) $y_{наиб}=2/3$, $y_{наим}=1/\sqrt{5}$. **14.568.** $y_{наим}=1$, $y_{наиб}=\pi/2$. **14.569.** $y_{наиб}=2\sqrt{3}/3$, $y_{наим}=1$. **14.570.** $y_{наим}=0{,}5$, $y_{наиб}=3/4$. **14.571.** $y_{наим}=-\pi/4$, $y_{наиб}=\pi/4$. **14.572.** а) $y_{наим}=1$, $y_{наиб}=1{,}25$; б) $y_{наим}=\left(1+2\sqrt{3}\right)/4$, $y_{наиб}=1{,}25$. **14.573.** а) $y_{наим}=1$, $y_{наиб}=\sqrt[3]{4/3}$; б) $y_{наим}=\sqrt[3]{9}/2$, $y_{наиб}=\sqrt[3]{9/5}$. **14.574.** а) $y_{наиб}=7$, $y_{наим}=-3/2$; б) $y_{наим}=2{,}5$, $y_{наиб}=9$. **14.575.** а) $y_{наим}=5$, $y_{наиб}=8$; б) $y_{наим}=-1/64$, $y_{наиб}=0$. **14.576.** а) $y_{наим}=2$, $y_{наиб}=16$; б) $y_{наим}=1$, $y_{наиб}=2$. **14.577.** а) $y_{наим}=3$, $y_{наиб}=5$; б) $y_{наим}=1$, $y_{наиб}=5$. **14.578.** $y_{наим}=0{,}5+\ln 2$, $y_{наиб}=2e^2-1$. **14.579.** $2^{1/2}\,3^{-3/4}$. **14.580.** Возрастает на $]-\infty;\ -1[$ и на $]1;\ \infty[$, убывает на $]-1;\ 0[$ и на $]0;\ 1[$; $y(x_1)<y(x_2)$. **14.581.** $]1;\ 2[\cup]2;\ 4[$. **14.582.** 3. **14.583.** $f(0)=2$. **14.584.** $[e;\ \infty[$; $\pi^e<e^\pi$. **14.585.** $y_{max}\approx 0{,}25$ при $x\approx 0{,}69$; возрастает на $]-\infty;\ \ln 2[$, убывает на $]\ln 2;\ \infty[$. **14.586.** $y_{min}=0$ при $x=0$, $y_{max}\approx 0{,}54$ при $x=2$; возрастает на $]0;\ 2[$, убывает на $]-\infty;\ 0[$ и на $]2;\ \infty[$. **14.587.** $y_{max}\approx 0{,}322$ при $x=\pi/4$; возрастает на $]-\infty;\ \pi/4[$, убывает на $]\pi/4;\ \infty[$. **14.588.** $y_{max}\approx 0{,}193$ при $x=-0{,}5$; возрастает на $]-\infty;\ -0{,}5[$, убывает на $]-0{,}5;\ 0{,}5[$. **14.589.** 9 и 9. **14.590.** 40; 80; 60. **14.591.** 0,5. **14.592.** 14 м$\times$21 м. **14.593.** 18 дм^3. **14.594.** 12 см и $3\sqrt{3}$ см. **14.595.** Две стороны параллелограмма — средние линии данного треугольника. **14.596.** Прямоугольный треугольник с длиной гипотенузы $a\sqrt{2}$. **14.597.** 100 см. **14.598.** 18 см и 18 см. **14.599.** 12 см и 9 см. **14.600.** 12 см и 9 см. **14.601.** 9 см и 7,5 см. **14.602.** $2R=14\sqrt{2}$ см. **14.603.** $2a$ м. **14.604.** 4/5. **14.605.** При $\alpha=\pi/3$ наибольшее значение равно 0,5. **14.606.** $H=R=\sqrt[3]{V/\pi}$. **14.607.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **14.608.** $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}/2\right)$. **14.609.** $\pi/3$. **14.610.** $\pi/4$. **14.611.** $k=29{,}28$; $x\approx 5{,}4$; $y\approx 5{,}4$. **14.612.** $R=r$. **14.613.** $x=-1$ — точка максимума, $x=0$ — точка минимума; возрастает на $]-\infty;\ -1[$ и на $]0;\ \infty[$, убывает на $]-1;\ 0[$. **14.614.** $x=\pm 2$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума; возрастает на $]-2;\ 0[$ и на $]2;\ \infty[$, убывает на $]-\infty;\ -2[$ и на $]0;\ 2[$. **14.615.** $x=\pm\sqrt{5}$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума; возрастает на $]-\sqrt{5};\ 0[$ и на $]\sqrt{5};\ \infty[$, убывает на $]-\infty;\ -\sqrt{5}[$ и на $]0;\ \sqrt{5}[$. **14.616.** $x=2$ — точка минимума; убывает на $]-\infty;\ 2[$, возрастает на $]2,\ +\infty[$. **14.617.** $x=0$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума; возрастает на $]-\infty;\ 0[$ и на $]2;\ \infty[$, убывает на $]0;\ 2[$. **14.618.** $x=2$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума, возрастает на $]-\infty;\ 2[$ и на $]3;\ \infty[$, убывает на $]2;\ 3[$. **14.619.** $x=\pm 1$ — точки максимума, $x=0$ — точка минимума; возрастает на $]-\infty;\ -1[$ и на $]0;\ 1[$, убывает на $]-1;\ 0[$ и на $]1;$

$\infty[$. **14.620.** $x=\pm 2$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума; возрастает на $]-2;\ 0[$ и на $]2;\ \infty[$, убывает на $]-\infty;\ -2[$ и на $]0;\ 2[$. **14.621.** $x=0$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума; возрастает на $]-\infty;\ 0[$ и на $]2;\ \infty[$, убывает на $]0;\ 2[$. **14.622.** $x=0$ — точка максимума; возрастает на $]-\infty;\ 0[$, убывает на $]0;\ \infty[$. **14.623.** $x=-1$ — точка минимума, $x=1$ — точка максимума; возрастает на $]-1;\ 1[$, убывает на $]-\infty;\ -1[$ и на $]1;\ \infty[$. **14.624.** $x=0$ — точка минимума; убывает на $]-\infty;\ 2[$, возрастает на $]2;\ \infty[$ **14.625.** $x=\sqrt[3]{1/2}$ — точка минимума; убывает на $]-\infty;\ 0[$ и на $]0;\ \sqrt[3]{1/2}[$, возрастает на $]\sqrt[3]{1/2};\ \infty[$. **14.626.** $x=2$ — точка минимума; возрастает на $]-\infty;\ 0[$ и на $]2;\ \infty[$, убывает на $]0;\ 2[$. **14.627.** $x=0$ — точка минимума; убывает на $]-\infty;\ 0[$, возрастает на $]0;\ \infty[$. **14.628.** $x=2$ — точка минимума, $x=-2$ — точка максимума; возрастает на $]-\infty;\ -2[$ и на $]2;\ \infty[$, убывает на $]-2;\ 2[$. **14.629.** Возрастает на $]-\infty;\ \infty[$. **14.630.** $x=-4$ — точка максимума; возрастает на $]-\infty;\ -8[$ и на $]-8;\ -4[$, убывает на $]-4,\ 0[$ и на $]0;\ \infty[$. **14.631.** Убывает на $]-\infty;\ -3[$, на $]-3;\ 3[$ и на $]3;\ \infty[$. **14.632.** $x=1$ — точка максимума; возрастает на $]-\infty;\ 1[$, убывает на $]1;\ \infty[$. **14.633.** $x=1/2$ — точка минимума; убывает на $]-\infty;\ 1/2[$, возрастает на $]1/2;\ 2[$ и на $]2;\ \infty[$. **14.634.** $x=2$ — точка максимума; убывает на $]-\infty;\ -2[$ и на $]2;\ \infty[$, возрастает на $]-2;\ 2[$. **14.635.** $x=1-\sqrt{3}$ — точка максимума, $x=1+\sqrt{3}$ — точка минимума; возрастает на $]-\infty;\ 1-\sqrt{3}[$ и на $]1+\sqrt{3};\ \infty[$, убывает на $]1-\sqrt{3};\ 1[$ и на $]1;\ 1+\sqrt{3}[$. **14.636.** $x=0$ — точка минимума, $x=2$ — точка максимума; убывает на $]-\infty;\ 0[$ и на $]2;\ \infty[$, возрастает на $]0;\ 2[$. **14.637.** $x=-1$ — точка минимума, $x=1$ — точка максимума; убывает на $]-\infty;\ -1[$ и на $]1;\ \infty[$, возрастает на $]-1;\ 1[$. **14.638.** $x=-\sqrt[3]{2}$ — точка минимума, $x=0$ — точка максимума; убывает на $]-\infty;\ -\sqrt[3]{2}[$, на $]0;\ 1[$ и на $]1;\ \infty[$, возрастает на $]-\sqrt[3]{2};\ 0[$. **14.639.** $x=3$ — точка минимума; возрастает на $]-\infty;\ 0[$ и на $]3;\ \infty[$, убывает на $]0;\ 3[$. **14.640.** $x=2,5$ — точка максимума; возрастает на $]-\infty;\ 1[$ и на $]1;\ 2,5[$, убывает на $]2,5;\ 4[$ и на $]4;\ \infty[$. **14.642.** а) $\frac{4x^3}{3}-\frac{9}{x}-35$; б) $\frac{x^4}{12}-2x^2+\frac{1}{3}x+7$. **14.643.** $F(x)=\frac{x^5+11}{5}$. **14.644.** $F(x)=\frac{3-\cos 2x}{2}$. **14.645.** $F(x)=-\frac{\operatorname{ctg} 3x+2}{3}$. **14.646.** $F(x)=-\frac{71x^3+8}{24x^3}$. **14.647.** $F(x)=x^4-x^3+3$. **14.648.** $F(x)=\frac{2\sin 4x-9}{8}$. **14.649.** $S(x)=7-4\sqrt{5-x}$. **14.650.** $\pi/2$. **14.651.** $3\pi/4$. **14.652.** 3. **14.653.** $(\pi-2)/4$. **14.654.** $9\sqrt{3}/2$. **14.655.** $\sqrt{3}/3$. **14.656.** 2. **14.657.** $1/2$. **14.658.** 0. **14.659.** 1120,4. **14.660.** $-101,25$. **14.661.** $46/15$. **14.662.** $(4-\sqrt{2})/6$. **14.663.** $2\ln(e+1)$. **14.664.** $0,5\ln(e/2)$.

14.665. $3\left(\sqrt[3]{9}-1\right)/4$. **14.666.** $1/8$. **14.667.** $3\pi/8$. **14.668.** $3\pi/16$. **14.669.** $11/96$. **14.670.** $1/8$. **14.671.** 12. **14.672.** $-4/5$. **14.673.** $4/9$. **14.674.** $3/5$. **14.675.** $\approx 4{,}89$. **14.676.** $11/4$ кв. ед. **14.677.** $\sqrt{2}$ кв. ед. **14.678.** $8/3$ кв. ед. **14.679.** $5/12$ кв. ед. **14.680.** $1/6$ кв. ед. **14.681.** $3/10$ кв. ед. **14.682.** 1,6 кв. ед. **14.683.** ≈ 4 кв. ед. **14.684.** 19,5 м; 5 м/с². **14.685.** $11\frac{1}{4}$ м; $\frac{1}{12}$ м/с². **14.686.** $2133\frac{1}{3}$ м. **14.687.** $s=2-0{,}25\cos 2t$. **14.688.** 0,3 Дж. **14.689.** 2,56 Дж. **14.690.** $A=100s+25s^2$.

Глава 15

15.001. Длина гипотенузы равна $\frac{n^2+m^2}{n-m}$. **15.003.** $\frac{c\cdot\sin 2\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$. **15.006.** $-1/k$. **15.007.** 20. **15.008.** 12. **15.009.** Части равновелики. **15.010.** $3R^2$. **15.023.** $4S$. **15.025.** $R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)/6$. **15.027.** 0,2. **15.029.** $C^2/(4\pi)$, C—длина окружности. **15.034.** $0{,}2R\sqrt{10}$. **15.037.** $4\sqrt{2}$. **15.038.** a. **15.045.** 60°. **15.046.** 1. **15.047.** $5\pi/16$. **15.048.** На $\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)/2$. **15.050.** 1:11. **15.051.** 5040 см². **15.052.** $\sqrt{2S_1S_2S_3/3}$. **15.057.** $a^2\left(3+\sqrt{3}\right)/2$; $a^3/6$. **15.062.** $6\sqrt{435}$ см². **15.063.** 60°. **15.064.** $a\sqrt{2}/2$. **15.074.** $1/4$. **15.075.** $c^2/4$. [15.082.] 20. **15.083.** $\left(\sqrt{5}+1\right)/4$. **15.085.** $\arccos(1/3)$. **15.093.** $h/3$. **15.094.** 1,2 см. **15.095.** 7:2. **15.097.** 180°. **15.099.** $\pi\sqrt{3}/2$. **15.101.** $\begin{cases} x'=\dfrac{-3x+4y+6}{5}, \\ y'=\dfrac{4x+3y-3}{5}. \end{cases}$

15.102. $\begin{cases} x'=\dfrac{(1-k^2)\,x+2ky-2kb}{1+k^2}, \\ y'=\dfrac{2kx-(1-k^2)\,y+2b}{1+k^2}. \end{cases}$ **15.103.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

15.104. $2ax+2by-a^2-b^2=0$, где a, b — длины катетов. **15.105.** $C(0;\ 0)$ или $C(4;\ 4)$. **15.106.** $C(5;\ 2)$, $D(3;\ 3)$, или $C(3;\ -2)$, $D(1;\ -1)$. **15.107.** $y-\frac{\sqrt{15}}{2}=0$, $y+\frac{\sqrt{15}}{2}=0$. **15.108.** $D(-1{,}4;\ -5{,}2)$.

15.109. C, $D: x=-2-5k$, $y=4k$, где $k=\frac{-3\pm\sqrt{1485}}{41}$. **15.110.** $A\left(\frac{1+7\sqrt{3}}{2};\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\frac{1-7\sqrt{3}}{2};\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$. **15.111.** $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{10}\right)^2=\frac{49}{4}$. **15.113.** $B(12;\ 5)$, $C(-5;\ 12)$, $D(-12;\ -5)$.

15.114. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=\frac{9}{4}$; $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. **15.115.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$; $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **15.118.** $15\sqrt{2}/8$. **15.119.** $(0;\ -1)$, $k=2$. **15.120.** $\sqrt{5}-1$. **15.121.** $\left(x+3-2\sqrt{2}\right)^2+$

$+(y-2)^2=4$; $\left(x+3+2\sqrt{2}\right)^2+(y-2)^2=4$. **15.122.** $\cos\hat{A}=-5/\sqrt{34}$. **15.123.** $3x+4y-15=0$; $3x-4y-15=0$. **15.124.** $\begin{cases} x'=4x-9, \\ y'=4y-3. \end{cases}$

15.125. $\cos\varphi=24/25$. **15.126.** 3. **15.127.** $\sqrt{6}/9$ **15.128.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+$ $+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{m^2}{2}-\frac{33}{4}$; при $m^2>16{,}5$—сфера, при $m^2=16{,}5$—точка, при $m^2<16{,}5$—$\varnothing$. **15.129.** (4; —3; 0), (4/21; 97/21; 40/21). **15.130.** $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$. **15.131.** M (—13; 10; —2). **15.132.** $\vec{0}$.

15.134. $k_1=1$; $k_2=-2$. **15.135.** $p=q=1$. **15.137.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AC}+$ $+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{BD}$. **15.141.** $\overrightarrow{PQ}=\frac{p\overrightarrow{CD}-q\overrightarrow{AB}}{p+q}$. **15.142.** $\frac{|AS|}{|SN|}=\frac{p(q+1)}{(p+1)(q+1)-p}$; $\frac{|BS|}{|SM|}=\frac{(p+1)(q+1)}{pq}$. **15.145.** $|AM|:|MN|=3:1$; $|CN|:|NB|=1:2$.

15.152. $k=4R^2\cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}$, где $\cos\hat{A}=\frac{1}{2bc}(b^2+c^2-a^2)$, $\cos\hat{B}=$ $=\frac{1}{2ca}(c^2+a^2-b^2)$, $\cos\hat{C}=\frac{1}{2ab}(b^2+c^2-a^2)$. **15.158.** Прямая, проходящая через середину O гипотенузы и перпендикулярная прямой CO. **15.159.** $k=-1/3$. **15.160.** $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$. **15.163.** $\overrightarrow{CD}=$ $=\frac{|CB|^2\overrightarrow{CA}+|CA|^2\overrightarrow{CB}}{|CA|^2+|CB|^2}$. **15.166.** Окружность с центром в середине отрезка AB и радиусом $r=\sqrt{k^2+\frac{|AB|^2}{4}}$. **15.167.** Окружность, построенная на диаметре PQ, где P и Q — точки, делящие отрезок AB в отношении k внутренним и внешним образом. **15.168.** Окружность с центром в середине отрезка AB и радиусом $r=$ $=\sqrt{\frac{d^2}{2}-\frac{|AB|^2}{4}}$, если $|AB|<d\sqrt{2}$. **15.169.** Окружность с центром в центроиде O треугольника ABC и радиусом $r=$ $=\sqrt{\frac{s-(|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2)}{3}}$, если $|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2<s$.

15.177. $\overrightarrow{A_1A_3}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_5}$. **15.179.** $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\times$ $\times\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)$. **15.180.** $\overrightarrow{CS}=\frac{(a+b)a}{(a+b)^2-c^2}\vec{b}+\frac{(a+b)b}{(a+b)^2-c^2}\vec{a}$, где $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$. **15.196.** $\cos\varphi=-1/3$. **15.198.** 90°. **15.201.** $\cos x=$ $=\frac{a^2+d^2-b^2-e^2}{2cf}$, где $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$, $|DA|=d$,

$|DB|=e$, $|DC|=f$. **15.202.** Плоскость, перпендикулярная прямой DS и проходящая через такую точку O этой прямой, что $\overrightarrow{SO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{SD}$, где D — центроид грани ABC.

15.205. $\overrightarrow{OH}=\frac{b^2c^2\overrightarrow{OA}+a^2c^2\overrightarrow{OB}+a^2b^2\overrightarrow{OC}}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$. **15.208.** $\cos x=\frac{1}{\sin\gamma}\times$ $\times\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$, где $\gamma=(\widehat{a,b})$, $\beta=(\widehat{a,c})$, $\alpha=(\widehat{b,c})$.
15.209. $V=\frac{1}{6}abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$.

15.217. $a\sqrt{2}/2$. **15.219.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{AC}$, где $k=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. **15.220.** $8a^2$, где a — длина ребра куба. **15.221.** $3a^2$, где a — длина стороны квадрата. **15.222.** $4a^2$, где a — длина стороны квадрата. **15.234.** 4. **15.239.** 4. **15.242.** 1:2. **15.250.** 60°. **15.255.** Направление переноса перпендикулярно оси симметрии. **15.267.** 60°. **15.270.** 120°. **15.288.** Окружность, проходящая через точки O, S и $\widetilde{S}$, где $R_0^\alpha(\widetilde{S})=S$. **15.291.** $c/2$. **15.293.** 2. **15.295.** $\cos^2\varphi$.

Глава 16

16.001. $x=\sqrt{a^2-1}$, $y=\sqrt{a^2-1}/a$. **16.002.** (0; 25). **16.003.** (2; 4). **16.004.** $x=16$. **16.005.** $\{10;\ -20,5\}$. **16.006.** 68. **16.007.** $x\in]-\infty;\ 2[\ \cup[6;\ \infty[$. **16.008.** $\{10;\ \sqrt{10}/1000\}$. **16.009.** $\frac{x^2-4x+5}{x+3}$. **16.010.** $(-2;\ 0)$ и $(2;\ 0)$. **16.012.** $k=7$. **16.013.** $p=4$, $q=8$. **16.014.** $\{-2;\ -1;\ 1;\ 2\}$. **16.015.** $x\in]-\infty;\ 2]\cup]4;\ 6[\cup[8;\ \infty[$. **16.016.** $x_{1,2}=\pm i$.
16.017. $4x^3-23x+19=0$. **16.018.** $\{0;\ -10\}$. **16.019.** $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$.
16.020. $x=0,(3)$. **16.021.** $(x-z)(z-y)(y-x)$. **16.022.** $\{-3;\ -2;\ 0;\ 1\}$. **16.023.** $a=1+i$. **16.024.** (0; 1). **16.025.** 0,75 и 0,48. **16.026.** $\sin 54°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. **16.027.** $x=17$. **16.028.** $\{-2;\ 1;\ 2\}$. **16.030.** 1 и 3; 1 и -2. **16.034.** 66. **16.035.** 638. **16.036.** $D(f)=]0,5;\ 1[\cup[3;\ \infty[$.
16.037. $a\in]-6;\ 3[$. **16.038.** $a\in[-\sqrt{3};\ 0[\cup]0;\ \sqrt{3}]$. **16.039.** 11/3. **16.040.** -1. **16.041.** $a\in]1/16;\ 1[$. **16.042.** $a\in]1;\ \infty[$. **16.043.** $x\in]-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \pi k[\cup]\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k[$, $k\in Z$. **16.044.** 9:1. **16.045.** $x=\frac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $y=\frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **16.046.** $\{2;\ -3\}$. **16.047.** $x\in[0;\ 1]$. **16.048.** $x\in]-3;-5/3[$. **16.049.** $\{1;\ 2\}$. **16.050.** $\{-2;\ 0\}$. **16.051.** $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi k\right\}$,

$k\in Z$. **16.052.** $\{1;\ 4;\ 5;\ 6\}$. **16.053.** $x\in]-\infty;\ -5[\cup]5;\ \infty[$. **16.054.** $x=0$. **16.055.** $a\in]-\infty;\ 0[$. **16.056.** $x\in[0;\ 3[$. **16.057.** $p\in]5/3;\ \infty[$. **16.058.** $m\in]-5/4;\ -1[\cup]9;\ \infty[$. **16.059.** $a\in[-9;\ -1]\cup[0;\ 1]$. **16.060.** $m\in]-\infty;\ -5/2[\cup[-2/3;\ \infty[$. **16.061.** $p\in]-3;\ 0]$. **16.062.** $19=3^3-2^3$. **16.063.** 3 и 2. **16.064.** $a=2+i$, $a=-2-i$. **16.065.** $\left\{(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}\right\}$, $k\in Z$. **16.066.** $(x^2-4x+5)(x-1)(x+4)$. **16.068.** $x=-q$. **16.069.** $\frac{3a+1}{a+3}$. **16.071.** $\lambda=7/4$. **16.072.** $x\in]1/3;\ 1[$; $y=2x-1$. **16.073.** $\{-\sqrt{10};\ -1;\ 0;\ 1;\ \sqrt{10}\}$. **16.074.** $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$; $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k\right\}$; $k\in Z$. **16.075.** $\frac{\sqrt{B^2-2AC}}{|A|}$. **16.076.** $\frac{z-3}{z-4}$. **16.077.** $p=1$; $q=3$. **16.078.** $x\in]0;\ 0,5]\cup]1;\ 2]$. **16.079.** $\{(3;\ -2),\ (2;\ -3),\ (-2;\ 3),\ (-3;\ 2)\}$. **16.080.** $\{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. **16.081.** 9. **16.082.** $x\in[-1;\ 0[\cup]8;\ 9]$. **16.083.** $x\in]0;\ 1[$. **16.084.** 0,(3). **16.085.** $x\in]-0,75;\ 0[\cup]3;\ \infty[$. **16.087.** $x\in]\operatorname{arctg}2+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k[$, $k\in Z$. **16.088.** $x\in[1;\ 4-2\sqrt{2}[\cup]4+2\sqrt{2};\ 7]$. **16.089.** $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$. **16.090.** $\{0;\ 1/16\}$. **16.091.** $\alpha=\pi/6$; $\beta=\pi/4$; $\gamma=\pi/3$. **16.092.** $x\in]-\infty;\ -2[\cup]2;\ \infty[\cup 0$. **16.093.** 25. **16.094.** 4, 5, 6, 7 и 8 (см). **16.095.** (100; 0). **16.096.** $k=4$. **16.097.** $(x^2-2)(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$. **16.098.** $x\in]0;\ 1[$. **16.099.** $x\in]3;\ 4[\cup]5;\ \infty[$. **16.100.** 51°. **16.101.** c. **16.102.** $\sin 2x=m$. **16.103.** $a=-21$, $b=-45$, $c=5$. **16.104.** $\{a^2;\ 1/a^2\}$. **16.105.** $a=-6$; $b=11$; $c=-6$. **16.106.** $\lambda\in]2;\ \frac{3+2\sqrt{3}}{3}[$. **16.107.** -4. **16.108.** $\{(4;\ 1),\ (1;\ 4),\ (-4;\ -1),\ (-1;\ -4)\}$. **16.109.** $\{(3/4;\ 8/9),\ (8/9;\ 3/4)\}$. **16.110.** $\{-\sqrt[5]{31};\ 2\}$. **16.111.** $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}$. **16.112.** $x\in]-\infty;\ -7]$. **16.113.** $k\in\{-2;\ 3\}\Rightarrow x\in\{-3;\ 4\}$. **16.114.** 1/2. **16.115.** $\{(0;\ 0),\ (1;\ -1),\ (1/2;\ 0)\}$. **16.116.** $a^2x^2+5abx+(6b^2+ac)=0$. **16.118.** 1) 5, 7, 9, 11, 30 (см); 2) 6, 8, 10, 12, 30 (см); 3) 7, 9, 11, 13, 30 (см). **16.119.** 5. **16.120.** а) $m\in]2;\ 4[$; б) $\{2;\ 4\}$. **16.121.** $3b^2+a^4=4ac$. **16.122.** $-b$. **16.123.** $-4<x<4$. **16.125.** (3; 6). **16.127.** m^2/n^2 и n^2/m^2. **16.128.** -2. **16.129.** $\{(3/2;\ 2/3),\ (-1;\ -1),\ (1;\ 1),\ (-3/2;\ -2/3)\}$. **16.131.** 2. **16.132.** В 7381 раз. **16.133.** 2. **16.134.** $\{(2;\ 1;\ 3),\ (2;\ 3;\ 1)\}$. **16.135.** $a=165,5$ и $b=158,5$. **16.136.** 4 и -3. **16.137.** $y=\frac{3x-x^3}{2}$. **16.138.** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=3$. **16.139.** $x=2$, $y=-3$. **16.143.** $a=1$. **16.144.** $a\in]-\infty;\ -2\sqrt{5}/5]\cup[2\sqrt{5}/5;\ \infty[$. **16.145.** $-(x-y)(y-z)\times(z-x)(x+y+z)$. **16.148.** (1; 1). **16.149.** 1. **16.150.** $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$, $x_{5,6}=1\pm i$, $x_{7,8}=-1\pm i$. **16.151.** $a^2+b^2=c^2$. **16.154.** $x_1=-q$, $x_{2,3}=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)q$, $x_{4,5}=\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)q$. **16.156.** (16; 2; 4). **16.157.** 0. **16.158.** $x_1=1+i$, $x_2=2-i$. **16.159.** $\{19;\ 20;\ 21;\ 22;\ 23;\ 24;\ 25\}$. **16.161.** 3 при $k=3p$; 0 при $k\neq 3p$, где p — целое число.

16.163. $\{\sqrt{2}-1;\ \sqrt{2};\ \sqrt{2}+1\}$. **16.165.** $a=2-i$. **16.166.** 3. **16.167.** $x_1=-1+i$, $x_2=-1-i$, $x_3=-(a+1)$, $x_4=-(a+3)$. **16.168.** $\{-1/4;\ 1/8;\ 1/2\}$. **16.169.** $x\in]-\infty;\ -1[\cup[0;\ 1[$. **16.171.** $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right\}$, $k\in Z$. **16.174.** $\{2+\sqrt{3};\ 10\}$. **16.175.** $a\in]-1;\ 1[\cup]1;\ 2[$. **16.179.** $a>1\Rightarrow x\in]0;\ a^{-2}[\cup]a^2;\ \infty[$; $a\in]0;\ 1[\Rightarrow x\in]a^{-2};\ a^2[$. **16.180.** $x\in[-1;0[\cup]0;1]$. **16.184.** $2=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. **16.185.** $(a+\sqrt{a^2+4})\times\times(b+\sqrt{b^2+4})(c+\sqrt{c^2+4})=8$. **16.186.** $5\sqrt[3]{5}/3$. **16.187.** $a=-7$, $b=1$, $c=6$. **16.188.** x. **16.189.** 1. **16.190.** $]-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n[$, $n\in Z$. **16.191.** $]0;\ 1/16]\cup[4;\ +\infty[$. **16.192.** $\frac{(a+b)S-2ab}{2S-(a+b)}\cdot S$. **16.194.** (2; 1). **[16.195.]** $[-\pi/4;\ 0]$. **16.196.** $[-3;\ -1[\cup]-1;\ 1]$. **16.197.** $]-2;\ +\infty[$. **16.200.** $\left\{\left(-1;\ 1+\frac{\pi}{4}(1+2k)\right)\right\}$, $k\in Z$. **16.201.** $\left\{\left(-3;\ \frac{\pi}{18}(4k-1)\right);\ \left(3;\ \frac{\pi}{18}(4k-1)\right)\right\}$, $k\in Z$. **16.202.** $\left\{\left(-2;\ \frac{\pi}{2}\times\times(2k+1)\right)\right\}$, $k\in Z$. **16.203.** $\left\{\left(\frac{2\pi k}{5};\ 1\right),\ (\pi(2k+1);\ 1)\right\}$, $k\in Z$. **16.204.** 8. **16.206.** $\{\pi(4k-1)\}$, $k\in Z$. **16.207.** $x\in]\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+\pi k[$, $k\in Z$. **16.208.** $x\in R\not\subset\left\{\frac{\pi}{2}k\right\}$, $k\in Z$. **16.209.** $a\in[3;\ \infty[$. **16.210.** $x\in]-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \pi k[\cup]\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi k[$, $k\in Z$. **16.211.** $m\in]-5/4;\ -1[$. **16.212.** 1. **16.214.** $a>b$. **16.215.** 2) 2,4 и 6 см. **16.216.** $x\in[-1;\ 0,\ 1]$. **16.217.** $a=1$; $b=2$. **16.218.** $\{1/2;\ 2/3;\ 5/6\}$. **16.219.** $\left\{\left(\frac{\pi}{4}(2k+1);\ 4\right)\right\}$, $k\in Z$. **16.220.** $\frac{1}{|a|}\sqrt{b^2-2ac}$, $|b|>\sqrt{2ac}$. **[16.221.]** $[1;\ 2\ln 2]$. **16.222.** $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **16.223.** $n=17$. **16.224.** $-\frac{B+\sqrt{B^2-2AC}}{2A}$. **16.225.** $m=47$. **16.228.** $\frac{\pi(B^2-2AC)}{4A^2}$. **[16.229.]** -13 м/с. **16.230.** 1) $ab>0$; $(0;\ a+b)$; 2) $ab<0$; $(\log_2(-b/a);\ 0)$, $(0;\ a+b)$. **16.231.** $y=-2x^2-x+3$. **16.232.** $b=5$. **16.233.** $(-3;\ 0)$ и $(2;\ 0)$. **16.235.** $\log_2 1{,}75<a<1$. **16.236.** $A(x_1)<0$, $A(x_2)>0$, $A(x_3)<0$. **16.237.** 1) $a=4$, $b=-6$; 2) $a=4$, $b=-5$; 3) $a=5$, $b=-6$. **16.238.** Делится. **16.239.** Не делится. **16.240.** $x\in[-1;\ \sqrt{2}/2[$. **16.241.** $x=-1$. **16.242.** $\pi(a^2-2b)$. **16.243.** 1000, 1121, 1244, 1369 и 1496. **16.244.** $x\in[-1;\ -0{,}3]\cup[0;\ 0{,}3]$. **16.246.** $\frac{m+1}{n+1}n$. **16.248.** $3n$. **16.249.** $-20\,100$. **16.250.** 0.

16.252. $\{2;\ 3\}$. **16.253.** 10 000. **16.254.** 1. **16.255.** $x\in\,]0;\ 1]$. **16.256.** $A\in[-2;\ 1]$. **16.257.** $\{-\pi/2;\ \pi/2\}$. **16.258.** $x=0$. **16.259.** 8. **16.261.** $x\in\{1;\ 2;\ 3\}$, $p=11$; $q=-6$. **16.262.** $p\in\,]1;\ 3[$; $q\in\,]-15;\ -8[$.

16.263. $x\in\,]1;\ \sqrt[4]{2}]$. **16.264.** 46. **16.265.** $\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}}+\sqrt{\frac{r-a}{2}}i\right)$, $\sqrt{a-bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}}-\sqrt{\frac{r-a}{2}}i\right)$ $b>0$, $r=\sqrt{a^2+b^2}$. **16.266.** $\left\{\sqrt{2}/2;\ \sqrt[3]{2};\ \sqrt[6]{2}\right\}$, $\left\{\sqrt{2}/2;\ \sqrt[5]{4};\ \sqrt[10]{2}\right\}$.

16.267. $a=2\sqrt[b]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$, $b=\log_{a/2}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **12.269.** $a=b=1/2$. **16.270.** $\{4;\ 4;\ 1/2\}$. **16.271.** $2-A$. **16.272.** $\varphi=\pi/6$, $m=2$. **16.273.** $\{-1;\ 2\}$. **16.274.** $\left\{\left(-\sqrt{3};\ 4\right),\ (-1;\ 2),\ (1;\ 2),\ \left(\sqrt{3};\ 4\right)\right\}$. **16.275.** $\{(-3;\ 57),\ (2;\ 2)\}$. **16.276.** 7. **16.277.** В пятиугольнике. **16.279.** $n\in\{3;\ 4\}$.

16.280. $c\in[S/\sqrt{2};\ S[$. **16.282.** $x\in\,]\frac{\pi}{12}(4k-1);\ \frac{\pi}{12}(4k+1)[$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

16.284. $x\in\,]\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{4}(4k+1)[$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **16.285.** $x\in[-3;\ 2[\,\cup\,]3;\ \infty[$.

16.286. $x\in[\frac{\pi}{6}(6k+1);\ \frac{\pi}{2}(2k+1)]$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **16.287.** $x\in\,]\frac{\pi}{3}(6k+1);\ \frac{\pi}{3}(6k+5)[$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **16.289.** $x\in\,]0;\ \pi/12[\,\cup\,]5\pi/12;\ \pi/2[$. **[16.291.]** $a\geqslant 1/3$. **[16.293.]** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **[16.294.]** $\widehat{BAC}_{\text{наиб}}=\pi/6$ при $\alpha=2\pi/3$. **[16.295.]** $a/2$; $H/2$. **[16.297.]** 1) $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}$; $\overrightarrow{MP}=-3\overrightarrow{m}$; $\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{n}-2\overrightarrow{m}$; 2) 22. **[16.300.]** $x^2+y^2-ax-by=0$.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В КНИГЕ

Любая прописная латинская буква: A, B,... 1) множество; 2) точка

N — множество натуральных чисел

Z — множество всех целых чисел

Z_0 — множество всех неотрицательных целых чисел

Z^- — множество отрицательных чисел

Q^-, Q^+, Q — множество отрицательных, положительных, всех рациональных чисел

R^-, R^+, R — множество отрицательных, положительных, всех действительных чисел

$n \in N$ — n — любое натуральное число

$\{\ \}$ — конечное множество, элементы которого указаны в скобках

$\varnothing$ — пустое множество

Φ — фигура (всякое множество точек)

$\Phi_1 = \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 совпадают

$\Phi_1 \neq \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 не совпадают

$\Phi_1 \cong \Phi_2$ — фигуры Φ_1 и Φ_2 конгруэнтны

$A \in \Phi$ — точка A принадлежит фигуре Φ

$A \not\subset \Phi$ — точка A не принадлежит фигуре Φ

$\Phi_1 \cup \Phi_2$ — объединение фигур Φ_1 и Φ_2 (Φ_1 или Φ_2)

$\Phi_1 \cap \Phi_2$ — пересечение фигур Φ_1 и Φ_2 (общая часть Φ_1 и Φ_2)

$\rho(\Phi_1, \Phi_2)$ — расстояние между фигурами Φ_1 и Φ_2

(AB), a, b, ... — прямая AB, прямая a, прямая b, ...

$[AB]$ — отрезок AB

$|AB|$ — длина отрезка AB (расстояние от точки A до точки B)

$[AB)$ — луч AB

$a \subset \alpha$ — прямая a лежит в плоскости α

$[AB] \not\subset a$ — отрезок AB не лежит на прямой a

(A, B) — упорядоченная пара точек

(u_n) — последовательность с общим членом u_n

$\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ — вектор

$\vec{0}$, $\overrightarrow{AA}$ — нулевой вектор

$|\vec{a}| = a$, $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$ — длина вектора

$\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ — скалярное произведение векторов

$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$	— угол между векторами
f	— отображение, функция, преобразование
$f(x)$	— образ элемента x при отображении f
D	— знак области определения
E	— знак множества значений
$[a; b]$, $[a; \infty[$, $[a; b[$, $]a; \infty[$, $]a; b]$, $]-\infty; a]$, $]a; b[$, $]-\infty; a[$	— обозначения числовых промежутков
$g \circ f$	— композиция отображений (преобразований) f и g (сначала f)
S_O	— центральная симметрия с центром O
S_l	— осевая симметрия с осью l
S_α	— симметрия относительно плоскости α
R_O^α, $R_O^{+\alpha}$, $R_O^{-\alpha}$	— поворот (O — центр, α — угол поворота, $+\alpha$ — поворот против хода часовой стрелки, $-\alpha$ — поворот по ходу часовой стрелки)
R_l^α	— поворот вокруг оси l
$\Rightarrow$	— следует
$\Leftrightarrow$	— равносильны
$\forall x$	— для всякого (любого) x
$\exists x$	— существует такое x

СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ ВО ВТУЗЫ

Под редакцией М. И. Сканави

Егерев Виктор Константинович
Зайцев Владимир Валентинович
Кордемский Борис Анастасьевич
Маслова Тамара Николаевна
Орловская Ираида Федоровна
Позойский Роман Исаевич
Ряховская Галина Сергеевна
Сканави Марк Иванович
Скопец Залман Алтерович
Федорова Нина Михайловна

Редактор А. М. Суходский
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор А. К. Нестерова
Корректоры М. И. Козлова и Г. Н. Буханова

ИБ № 1006

Изд. № ФМ-617. Сдано в набор 03.01.77. Подп. в печать 14.11.78. Формат 84×108 1/32. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 27,3 усл. печ. л. 28,72 уч.-изд. л. Тираж 300 000 экз. (допечатка). (2-й завод 125 001—300 000 экз.) Зак. № 780. Цена 95 коп.

Издательство «Высшая школа»,
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Отпечатано с матриц типографии изд-ва «Уральский рабочий», г. Свердловск, проспект Ленина, 49 во Владимирской типографии «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

95 коп.